3. Vorlesung

1) Ein-dimensionale Systeme

Motivation: i) niedrig dim. Systeme zeigen besondere Eigenschaften

ii) treten als effektive Systeme von 3d. System auf (z.B Kepler-Problem)

$$\underbrace{\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x\,, \qquad \vec{F} = F_x(x)\,\vec{e}_x}$$

NG: $\quad m\ddot{x} = F_x$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{e}_y(\partial_z F_x - \partial_x F_z) + \vec{e}_z(\partial_x F_y - \partial_y F_x) = \vec{0}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \,, \qquad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

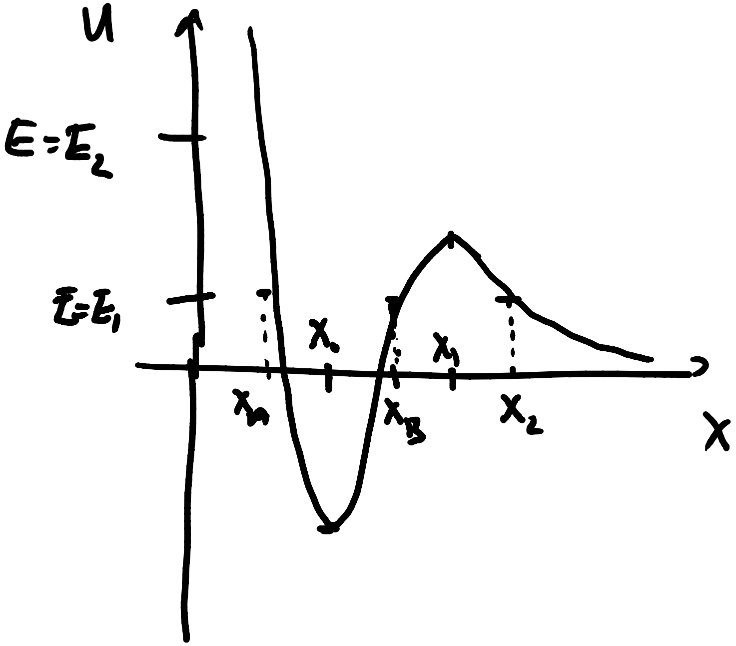
$\Rightarrow$ Energie $E = T + U = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{= T} + U \quad , \quad \frac{dE}{dt} = 0$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$ DGL 1. Ordnung

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} = dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

- numerisch in der Regel immer lösbar
- analytisch komplizierter als Lösung von NG (in der Regel)

Bewegung im beliebigen Potential $U(x)$



Es gilt $T \geq 0$

$\Rightarrow E \geq U$

$\Rightarrow E > U(x_0)$

Minimum von U

Fall 1: $E = E_1 \Rightarrow$ Teilchen nur im Bereich

$x_A \leq x \leq x_B$ (1)

$x_2 \leq x$ (2)

① periodische Bewegung um Gleichgewichtslage x_0

Umkehrpunkte: x_A, x_B

Gleichgewichtslage: $\frac{dU}{dx} = 0$, $\frac{d^2U}{dx^2} = \begin{cases} >0 & x_0 \text{ stabiles Gleichg.} \\ <0 & x_1 \text{ instabiles ″} \end{cases}$

U minimal → T maximal ⇒ Teilchen hat bei $x = x_0$ seine größte Geschwindigkeit

$\left(\frac{d\dot{x}}{dx} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = x_0 \right)$

$E_1 = U(x_A) = U(x_B) \Rightarrow T = 0 \Rightarrow \dot{x}(x = x_{A,B}) = 0$

Periode $\tau = 2 \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1 - U)}}$

kleine Schwingung um die Gleichgewichtslage:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{U(x)} = \underbrace{U(x_0)}_{\substack{\text{Konstante} \\ \text{kann } U(x_0)=0 \\ \text{gewählt werden.}}} + \underbrace{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}}_{=0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$$

$$\approx \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (x-x_0)^2$$

mit $\boxed{\omega^2 = \frac{1}{m} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}}$ Frequenz der Schwingung

$\left.\begin{array}{l} E = E_2 \\ ② \; x \geq x_2 \end{array}\right\}$ Bewegung unbeschränkt Teilchen läuft nach $x = \infty$

N Punktteilchen

bisher 1 Teilchen : $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

jetzt N Teilchen : $\underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i}_{3N \text{ gekoppelte DGL 2. Ordnung}}$, $i = 1, \ldots, N$

m_i : Masse des i-ten Teilchens

$\vec{r}_i$: Ortsvektor " "

$\vec{F}_i$: Kraft, die auf das i-te Teilchen wirkt

$\Rightarrow$ $2 \cdot 3N = 6N$ Integrationskonstanten

werden festgelegt durch
$$\left.\begin{array}{ll} \vec{r}_i(t=0) & 3N \text{ RB} \\ \dot{\vec{r}}_i(t=0) & 3N \text{ RB} \end{array}\right\} 6N \text{ RB}$$

Def 7: $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ kin. Energie von N Punktteilchen

Annahme: $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) \neq \vec{F}(\dot{\vec{r}}_1, \dots \dot{\vec{r}}_N, t)$

Def 8 Die Kräfte $\vec{F}_i$ heißen konservativ falls das Wegintegral

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1, C_i}^{t_2} \vec{F}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \, dt$$ wegunabhängig ist

Weg

Satz 8: $\vec{F}_i$ ist konservativ genau dann wenn

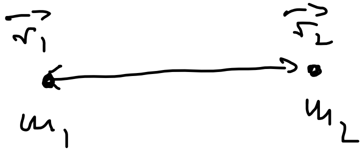
$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i \, U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N)$$

Wobei: $\vec{\nabla}_i := \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x_i} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y_i} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z_i}$

Beweis: wie ~~bei~~ bei einem Teilchen

$\Rightarrow$ D.h. alle Kräfte $\vec{F}_i$ können durch eine einzige skalare Fkt. $U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N)$ ausgedrückt werden!

Beispiel: Zentralkräfte



NG: $$m_1 \ddot{\vec r}_1 = \vec F_1 = f(|\vec r_1 - \vec r_2|) \cdot \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

$$m_2 \ddot{\vec r}_2 = \vec F_2 = -\vec F_1 \quad (\text{actio} = \text{reactio}, \text{3. NG})$$

$$U(|\vec r_1 - \vec r_2|), \quad |\vec r_1 - \vec r_2| = \sqrt{(\vec r_1 - \vec r_2)\cdot(\vec r_1 - \vec r_2)} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U' \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} |\vec r_1 - \vec r_2| = U' \frac{1}{2\sqrt{}} \cdot 2(x_1 - x_2) = U' \frac{x_1 - x_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \dots = -U' \frac{x_1 - x_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = U' \frac{y_1 - y_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|} = -\frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_1} = U' \frac{(z_1 - z_2)}{|\vec r_1 - \vec r_2|} = -\frac{\partial U}{\partial z_2}$$

$$\Rightarrow \vec F_1 = f \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|} = -\vec\nabla_1 U, \quad \text{falls } f = -U'$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 U = -\vec{F}_1$$

$$E = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

z.B. Gravitationsfeld durch 2 Massen: $f = \frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}$$

Def 9: Impuls eines Teilches

$$\vec{p}(t) := m\,\vec{v}(t) = m\,\dot{\vec{r}}(t)$$

Def 10: N - Teilchen:

$$\vec{p}_i(t) := m_i\,\vec{v}_i(t) = m_i\,\dot{\vec{r}}_i(t)$$

Gesamtimpuls $\vec{P}(t) := \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t)$

Def 11: Schwerpunkt der N-Teilchen

$$\vec{R} := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \,, \qquad M = \sum_i m_i$$

Gesamtmasse

Bemerkungen

i) $$M \dot{\vec{R}} = \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$$

$$\boxed{M \dot{\vec{R}} = \vec{P}}$$

ii) Newton Gesetz gilt:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i \qquad (\neq m \ddot{\vec{r}}_i) \text{ notwendig}$$

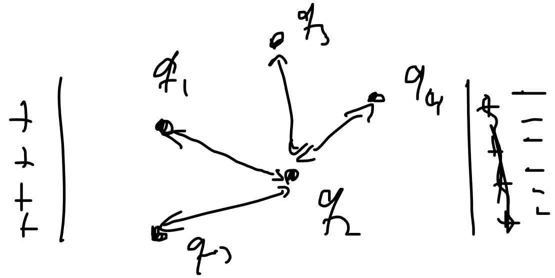
Def 12: **innere Kräfte** $\vec{F}_i^{I}$ sind Kräfte, die zwischen den N Teilchen wirken.

Beispiel: Gravitationskraft, elektromag. Kraft

äußere Kräfte $\vec{F}_i^{A}$ sind Kräfte die von außen auf das System der N Punktteilchen wirken.

Allgemein gilt:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{A}(\vec{r}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{I}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$



$\vec{F}_{ij}$ ist die Kraft, die das j-Teilchen auf das i-te Teilchen ausübt.

Satz 9 Der Gesamtimpuls ist erhalten, wenn die Summe der äußeren Kräfte verschwindet, also wenn $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{A} = 0$

Beweis:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \overset{(NF)}{=} \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\vec{F}_i^{A}}_{\substack{=0 \\ \text{nach Vor.}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{I} \Big)$$

$$= \sum_{i} \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \vec{F}_{ij}^{I} = 0 \quad \text{weg} \quad \vec{F}_{ij} = - \vec{F}_{ji}$$

(actio = reactio)

$\blacksquare$

Def 13 Drehimpuls eines Teilchens

$$\vec{L} := \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m\,\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

N-Teilchen: $\vec{L}_i := \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i\,\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

Gesamtdrehimpuls: $\boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i}$

Def 14: Drehmoment $\vec{N}$

1 Teilchen: $\vec{N} := \frac{d\vec{L}}{dt}$

N-Teilchen: $\vec{N}_i := \frac{d\vec{L}_i}{dt}$

Gesamtdrehmoment

$$\boxed{\vec{N} := \sum_{i=1}^{N} \vec{N}_i}$$

<u>Satz 10</u>: Für Zentralkraft ist der Gesamtdrehimpuls erhalten

<u>Beweis</u>: für 1 Teilchen, $\vec{F} = f(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= f(|\vec{r}|) \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0} \quad \blacksquare$$

<u>N-Teilchen</u>:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \Big(\underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{=0} + \vec{r}_i \times \underbrace{\dot{\vec{p}}_i}_{\vec{F}_i} \Big)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} f(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\, \vec{r}_i \times \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{f(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{1}{2}\left(\underbrace{\vec{r}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{r}_j \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}_{\underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}_{= \vec{0}}} \right)$$

$$= \vec{0} \quad \blacksquare$$