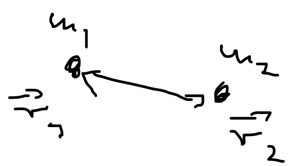
4. Vorlesung: 2-Körper-Problem

(z. B. 2 Planeten, Sonne + Planet, Atomkern + Elektron)

2-Körper Problem: 2 Teilchen mit nur inneren Kräften



NG:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec r}_1 &= \vec F_{12} \equiv \vec F \\ m_2 \ddot{\vec r}_2 &= \vec F_{21} = -\vec F_{12} = -\vec F \end{aligned}\right\} \text{6 DGL 2. Ordnung}$$

actio = reactio

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 & (1) \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 2\vec{F} & (2) \end{cases}$$

(1) beschreibt Bewegung des kräftefreien Schwerpunktes

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2\right), \qquad M = m_1 + m_2$$

Ortsvektor des Schwerpunktes

Gesamtmasse

$$(1) \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \vec{R}(t) = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

$\hat{=}$ geradlinig - gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes

$\Rightarrow$ 3 DGL gelöst!

(gilt immer, wenn keine äußeren Kräfte

(2) beschreibt die Relativbewegung um den Schwerpunkt

<u>Def</u>: $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\mu := \dfrac{m_1 m_2}{M}$

Relativkoordinate reduzierte Masse

($m_1 \gg m_2$: $M \approx m_1$, $\mu \approx m_2$)

Sonne Erde

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \mu(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1 m_2}{M}\left(\frac{\vec{F}}{m_1} + \frac{\vec{F}}{m_2}\right) = \underbrace{\left(\frac{m_2}{M} + \frac{m_1}{M}\right)}_{1} \vec{F} = \vec{F}$$

$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$ ist noch zu lösen (3 DGL)

Annahme $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = f(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ (Zentralkraft)

$$\Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}\right) + U$$

Es gilt: 1) $E = E_S + E_{rel}$ mit $E_S = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$

$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^{\,2} + U(|\vec{r}|)$

2) $\dot{E}_S = 0 = \dot{E}_{rel}$

3) $\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{rel}$

mit $\vec{L}_S = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$, $\vec{L}_{rel} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

4) $\dot{\vec{L}}_S = 0 = \dot{\vec{L}}_{rel}$

~~Beweis~~ Beweis 1)–4) Aufg. 3 / Blatt 3

Konsequenzen 1) – 4) :

a) $\vec{L}_{rel} = \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ steht $\perp$ auf $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$

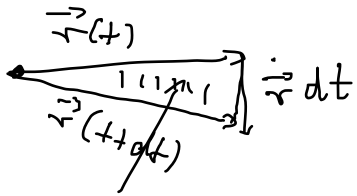
$\frac{d\vec{L}_{rel}}{dt} = 0 \Rightarrow$ Bewegung verläuft in Ebene mit $\vec{L}_{rel}$ als Normalvektor

wähle x-y-Ebene, $\vec{L}_{rel} = \ell\, \vec{e}_z$, $\dot{\ell} = 0$

$\Rightarrow \quad z(0) = 0 = \dot{z}(0) = \ddot{z} \quad \Rightarrow$ 1 DGL gelöst

$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = x(t)\, \vec{e}_x + y(t)\, \vec{e}_y$

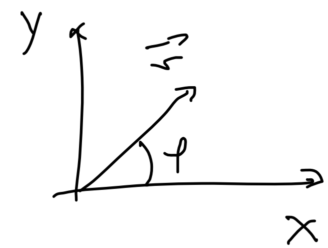
b)



Fläche: $dF = \frac{1}{2}\left|\vec r \times \dot{\vec r}\right| dt = \frac{1}{2\mu}\left|\vec L_{rel}\right| dt$ zeitlich konstant

$\hat{=}$ Verallgemeinerung des 2. Kepler Gesetz

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \\ r &= |\vec r| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$ Polarkoordinaten



$$\dot x(t) = \dot r\cos\varphi + (-r\sin\varphi\,\dot\varphi)$$

$$\dot y = \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot\varphi$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 = \dot r^2 (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}) + \dot\varphi^2 r^2 (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1})$$

$$+ \dot r \dot\varphi (\underbrace{-2r\sin\varphi\cos\varphi + 2r\sin\cos\varphi}_{=0})$$

$$= \dot r^2 + \dot\varphi^2 r^2$$

$$\vec L_{rel} = \ell\,\vec e_z = \mu(\vec r \times \dot{\vec r}) = \mu(x\dot y - y\dot x)\,\vec e_z$$

$$= \dots = \mu r^2 \dot\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi = \frac{\ell}{\mu r^2},$$

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec r}^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot r^2 + \dot\varphi^2 r^2) + U(r)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\dot r^2 + \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}\right) + U(r) \equiv \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + U_{eff}(r)$$

mit $\boxed{U_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)}$

$\Rightarrow$ $E_{rel} = E_{rel}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) =$ konstant

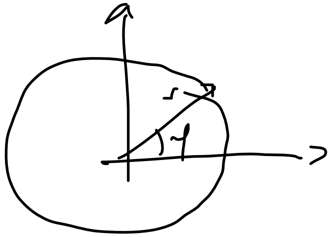
$\Rightarrow$ Problem auf 1 dim. Problem reduziert

$\Rightarrow$ $r(t)$ kann durch Integration erhalten $\Rightarrow$ Problem gelöst!

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff} \Leftrightarrow \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} dt}_{t - t_0} = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}}$$

Berechnung der Bahnkurve $r(\varphi)$ und nicht $r(t)$, $\varphi(t)$



$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d(r(\varphi))}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U_{eff})}}{\frac{\ell}{\mu r^2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{2\mu}}{\ell}\, r^2 \sqrt{(E-U_{eff})}$$

Trennung d. Veränd.: $\quad d\varphi = \pm\dfrac{dr}{\frac{\sqrt{2\mu}}{\ell}\cdot\sqrt{E-U_{eff}}\; r^2}$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm\frac{\ell}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi-\varphi_0 = \pm\frac{\ell}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{E-U_{eff}}}}$$

Kepler Problem

$$\boxed{U(r) = -\frac{K}{r}}\,, \qquad K = \text{konstant}$$

z.B. 1) $K = \gamma m_1 m_2 > 0$, $\quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{K\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

Newtons Gravitationskraft

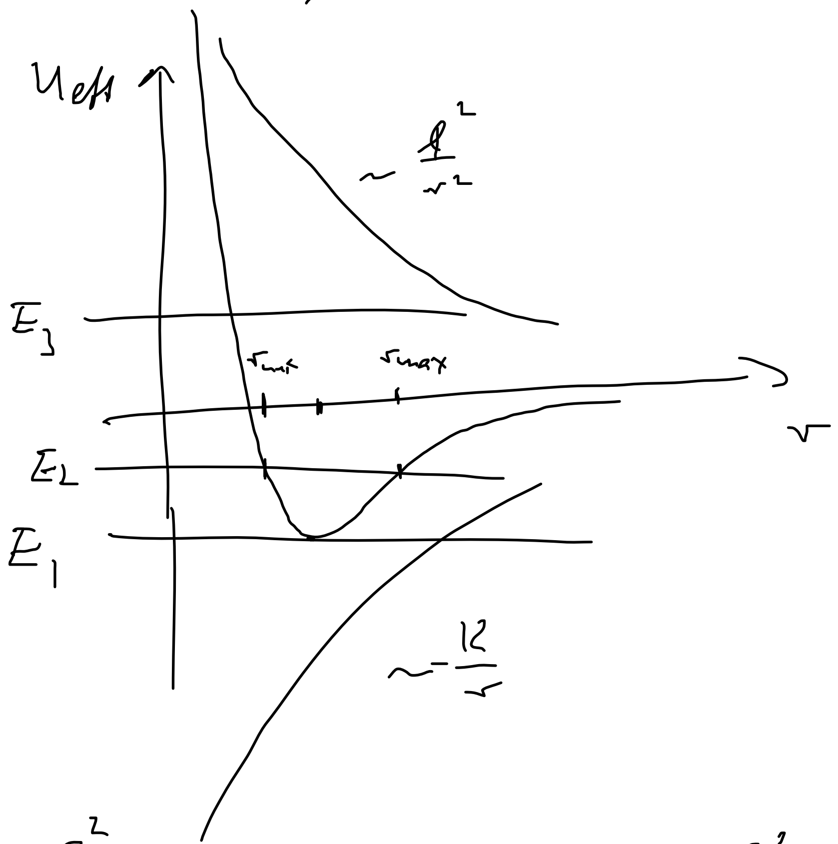
2) $K = -q_1 q_2$, $\quad \vec{F} = -\frac{q_1 q_2}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0}_{=1}} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$K > 0$ für 2 verschiedene Ladungen

$K < 0$ für 2 gleiche Ladungen

Zunächst $K > 0$

$$U_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}$$



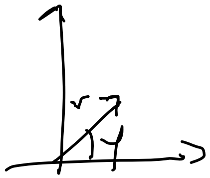
$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Longleftrightarrow \frac{K}{r^2} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = 0 \Rightarrow r_{min} = \frac{\ell^2}{K\mu}$$

$$U_{eff}(r = r_{min}) = -\frac{K^2\mu}{2\ell^2}$$

Qualitative Diskussion der Bewegung

1) $E_{rel} = E_1 \quad \Rightarrow \quad E_{rel} = U_{eff}(r_{min}) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{eff}$

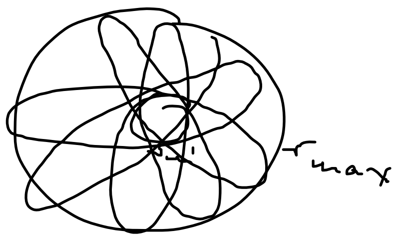
$$\Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \, , \quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2} = \frac{\ell}{\mu r_{min}^2} \neq 0$$



$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{\ell}{\mu r_{min}^2}\, t + \varphi_0 \quad \Rightarrow$$ Kreisbewegung mit $r = r_{min}$

2) $E_{rel} = E_2 \qquad r_{min} \leq r \leq r_{max}$

Perihel — Aphel



Rosettenbewegung

$$\underline{\underline{\Delta\varphi}} = \pm \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}}}$$

3) $E_{rel} = E_3 \qquad r_{min} \leq r \leq r_{max} = \infty$

Relativbewegung ist unbeschränkt

r gross: $\quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2} \longrightarrow 0 \quad$ Bahnkurve ist gerade

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)} \longrightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} E} = V_\infty$$

Fluchtgeschwindigkeit

Berechnung der Bahnkurve für $U = -\frac{k}{r}$

$$\varphi(r) = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E-U_{eff}}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E+\frac{k}{r'}-\frac{\ell^2}{2\mu r'^2}}}$$

<u>Subs:</u> $r' = \frac{1}{s}$, $dr' = -\frac{1}{s^2}\,ds$

$$\varphi(r) = -\frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int^{1/r} \frac{ds}{\cancel{s^2}}\, \cancel{s^2}\, \frac{1}{\left(E+ks-\frac{\ell^2 s^2}{2\mu}\right)^{1/2}} = -\int^{\frac{1}{r}} \frac{ds}{\left(\frac{2\mu E}{\ell^2}+\frac{2\mu k s}{\ell^2}-s^2\right)^{1/2}}$$

Integraltafel: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma+2\beta x-x^2}} = -\arccos\left(\frac{x-\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma}}\right)$ für $\beta^2+\gamma>0$

$$\beta = \frac{\mu k}{\ell^2}, \quad \gamma = \frac{2\mu E}{\ell^2}, \quad \beta^2+\gamma = \frac{\mu^2 k^2}{\ell^4} + \frac{2\mu E}{\ell^2} \geq \frac{\mu^2 k^2}{\ell^4} + \frac{2\mu}{\ell^2}\left(-\frac{k^2\mu}{2\ell^2}\right) = 0$$

$E \geq U_{eff}(r_{min})$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu k}{\ell^2}}{\left(\frac{\mu^2 k^2}{\ell^4} + \frac{2\mu E}{\ell^2}\right)^{1/2}} \right) = \arccos\left(\frac{\frac{\ell^2}{r\mu k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}}} \right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\frac{p}{r} - 1}{\epsilon} \right), \qquad p \equiv \frac{\ell^2}{\mu k}$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\varphi}}$$