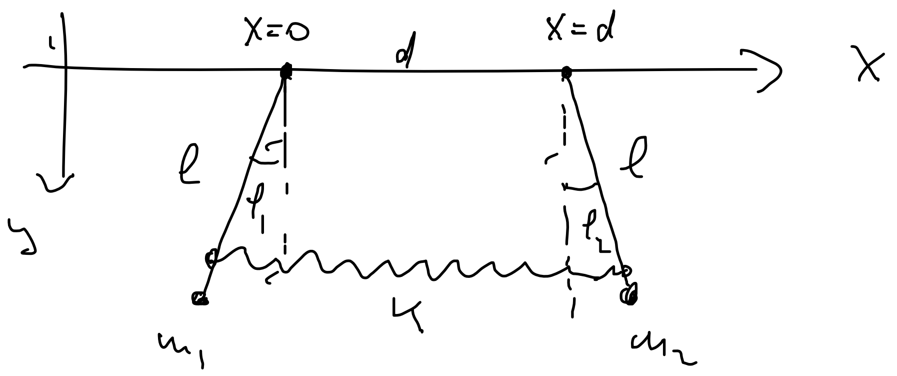
Gekoppelte Schwingungen



$$x_1 = l \sin(-\varphi_1)$$
$$y_1 = l \cos \varphi_1$$
$$x_2 = l \sin \varphi_2 + d$$
$$y_2 = l \cos \varphi_2$$

ohne Feder: $T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(l^2 \cos^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + l^2 (-\sin\varphi_1)^2 \dot{\varphi}_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 l^2 \left(\cos^2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + \sin^2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$m_1 = m_2$

$$= \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

$$U = -mgy_1 - mgy_2 = -mg\ell(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

$$\overset{\varphi_{1,2} \ll 1}{=} -mg\ell\left(\cancel{2} - \frac{1}{2}\varphi_1^2 - \frac{1}{2}\varphi_2^2\right) = \frac{1}{2}mg\ell(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2) - \frac{1}{2}mg\ell(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

<u>mit Feder</u>: zusätzlich Kraft $\vec{F}_2 = k\,(x_1 - (x_2 - d))\,\vec{e}_x = -\vec{\nabla}_2 U$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_1 U$$

$$U = \frac{k}{2}(x_2 - d - x_1)^2$$

$$= \frac{k}{2}(\ell\sin\varphi_2 - \ell\sin\varphi_1)^2$$

$$= \frac{k\ell^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

$$L_{lin} = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2} m g \ell (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{k}{2} \ell^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

<u>E-L-Gl:</u>

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -mg\ell\,\varphi_1 + k\ell^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -mg\ell\,\varphi_2 - k\ell^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = m\ell^2 \dot{\varphi}_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m\ell^2 \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1,2}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{1,2}} = 0 \iff \begin{cases} -m\ell^2 \ddot{\varphi}_1 - mg\ell\varphi_1 + k\ell^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ -m\ell^2 \ddot{\varphi}_2 - mg\ell\varphi_2 - k\ell^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases}$$

2 gekoppelte DGL 2. Ordnung

Schreiben in Matrixform

$$\frac{d}{dt^2}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

$$M = \begin{pmatrix} g/e + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{e} + \frac{k}{m}\end{pmatrix}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{g}{e} + \frac{k}{m}\right)\varphi_1 - \frac{k}{m}\varphi_2 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \frac{k}{m}\varphi_1 + \left(\frac{g}{e} + \frac{k}{m}\right)\varphi_2 = 0$$

Lösungsansatz:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad , \ \omega \text{ reell}, \ \varphi_{1,2}^0 = \text{konstant}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (*): \quad -\omega^2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\left(M - \omega^2 \mathbb{1} \right)}_{\begin{pmatrix} \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} \cancel{e^{i\omega t}} = 0 \qquad \text{charakteristische Gleichung}$$

oder $\qquad M\vec{\varphi} = \omega^2 \vec{\varphi}\,, \qquad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem ist in Form eines Eigenwertproblems

d.h. ω^2 sind die Eigenwerte der Matrix M

$\vec{\varphi}$ sind die Eigenvektoren.

Gleichungssystem hat nur dann nicht-triviale Lösungen

falls $\det(M - \omega^2 \mathbb{1}) = 0$

$$\Rightarrow \left(g/l + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= g/l \end{aligned}}$$

<u>Eigenvektoren:</u> Bestimme $\vec{\varphi}$, die Gleichungssystem lösen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}: \quad \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{\ell}: \quad \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Allgemeine Lösung ist Linearkombination

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} &= \frac{A}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{+i\omega_1 t} + \frac{A^*}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-i\omega_1 t}\\ &\quad + \frac{B}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{i\omega_2 t} + \frac{B^*}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{-i\omega_2 t}\end{aligned}}$$

4 Integrationskonstanten: A, B $\widehat{=}$ 2 DGL 2. Ordnung

Spezialfälle:

i) $A = A^* = 0$: $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \frac{B}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{i\omega_2 t} + \frac{B^*}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{-i\omega_2 t}$

Es gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ für alle t, $\omega_2^2 = g/\ell$

Federkraft nicht angespannt, Bewegung wie einzelnes Pendel.

ii) $B = B^* = 0$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{A}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + \frac{A^*}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_2 t}$$

$\varphi_1 = -\varphi_2$ für alle t Pendel schwingt entgegengesetzt

mit Frequenz $\omega_2^2 = g/\ell + 2\frac{k}{m}$

Federkraft ist maximal

Diese beide Schwingungen heißen Eigenschwingungen

Allgemeine Bewegung ist beliebige Überlagerung der Eigenschwingungen

Man definiert Normalkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &:= \varphi_1 - \varphi_2 \\ Q_2 &:= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2) \\ \varphi_2 &= \tfrac{1}{2}(Q_2 - Q_1) \end{aligned}$$

$$Q_1 = A\sqrt{2}\, e^{i\omega_1 t} + A^* \sqrt{2}\, e^{-i\omega_1 t}$$

$$Q_2 = B\sqrt{2}\, e^{i\omega_2 t} + B^* \sqrt{2}\, e^{-i\omega_2 t}$$

$\Rightarrow$ Q_1 und Q_2 sind Koordinaten von entkoppelten harm. 1 dim Oszillatoren

Sieht man auch an den Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)\varphi_1 - \frac{k}{m}\varphi_2 &= 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)\varphi_2 - \frac{k}{m}\varphi_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)\left(Q_1 + Q_2\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(Q_2 - Q_1\right) &= 0 \quad (1) \\ \frac{1}{2}\left(\ddot{Q}_2 - \ddot{Q}_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)\left(Q_2 - Q_1\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(Q_2 + Q_1\right) &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} (1)+(2):\quad & \ddot{Q}_2 + \left(\frac{g}{\ell} + \cancel{\frac{k}{m}}\right)Q_2 - \cancel{\frac{k}{m}Q_2} = 0 \\ (1)-(2):\quad & \ddot{Q}_1 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)Q_1 + \frac{k}{m}Q_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \ddot{Q}_2 + \omega_2^2\, Q_2 = 0 & \omega_2^2 = g/l \\ \ddot{Q}_1 + \omega_1^2\, Q_1 = 0 & \omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \end{array}\right.$$

2 DGL 2er entkoppelte harm. Osz.

Normalkoordinate entkoppeln die Bewegungsgleichungen!

Was passiert in L

$$L_{mit} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2} m g l (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{k}{2} l^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2}(Q_2 \pm Q_1) \quad , \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = -Q_1$$

$$\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 = \frac{1}{4}\left(\dot Q_2 + \dot Q_1\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\dot Q_2 - \dot Q_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\dot Q_2^2 + \frac{1}{2}\dot Q_1^2$$

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{1}{2}Q_2^2 + \frac{1}{2}Q_1^2$$

$$\curvearrowright \quad L_{mil} = \frac{1}{4} m \ell^2 \left(\dot Q_1^2 + \dot Q_2^2\right) - \frac{1}{4} m g \ell \left(Q_1^2 + Q_2^2\right) - \frac{k}{2}\ell^2 Q_1^2$$

$$= L_1(Q_1) + L_2(Q_2)$$

$$L_1 = \frac{1}{4} m \ell^2 \dot Q_1^2 - \frac{1}{4} m g \ell\, Q_1^2 - \frac{k}{2}\ell^2 Q_1^2$$

$$= \frac{1}{4} m \ell^2 \left(\dot Q_1^2 - \underbrace{\left(\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}\right)}_{\omega_1^2} Q_1^2\right) = \frac{1}{4} m \ell^2 \left(\dot Q_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2\right)$$

$$L_2 = \frac{1}{4} m l^2 \dot{Q}_2^2 - \frac{1}{4} m g l \, Q_2^2$$

$$= \frac{1}{4} m l^2 \left(\dot{Q}_2^2 - \omega_2^2 Q_2^2 \right) , \quad \omega_2^2 = g/l$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} L &= L_1(Q_1) + L_2(Q_2) \\ L_1 &= \frac{1}{4} m l^2 \left(\dot{Q}_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2 \right) \\ L_2 &= \frac{1}{4} m l^2 \left(\dot{Q}_2^2 - \omega_2 Q_2^2 \right) \end{aligned}}$$

Lagrangefkt lässt als Summe von Lagrangefkten für harm. Osz. schreiben!