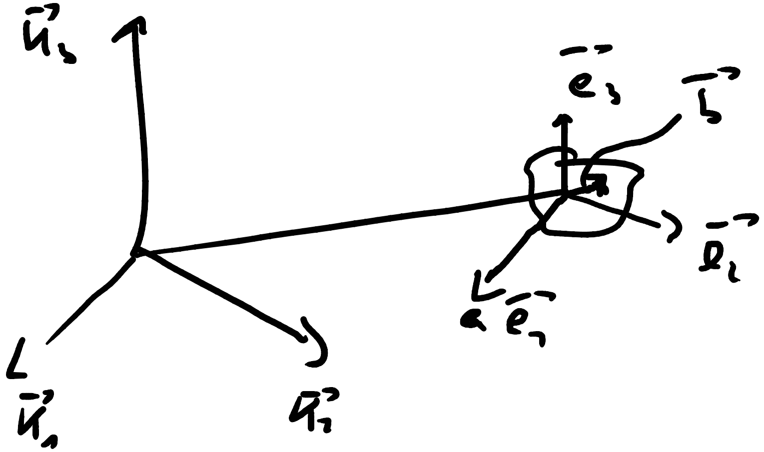
Drehimpuls starrer Körper



$$\vec{L} = \sum_{I=1}^{N} \vec{b}_I \times m_I \dot{\vec{b}}_I \qquad \text{(körperfesten KS)}$$

letzte Vorlesung: $\dot{\vec{b}}_I = \vec{\Omega} \times \vec{b}_I$

momentane Winkelgeschw.

$$\curvearrowright \vec{L} = \sum_I m_I \vec{b}_I \times (\vec{\Omega} \times \vec{b}_I)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_I m_I \left((\vec{b}_I^{\,2})\vec{\Omega} - (\vec{b}_I \cdot \vec{\Omega})\vec{b}_I \right)$$

$$= \sum_I m_I \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} b_{Ii} b_{Ii} \right)}_{\vec{b}_I^{\,2}} \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{3} \Omega_k \vec{e}_k}_{\vec{\Omega}}}_{\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \Omega_j \vec{e}_k \delta_{jk}} - \underbrace{\left(\sum_i b_{Ii} \Omega_i \right)}_{\vec{b}\cdot\vec{\Omega}} \underbrace{\left[\sum_l b_{Il} \vec{e}_l \right]}_{\vec{b}_I}$$

$$=$$

$$\cancel{= \sum_I m_I \sum_i \sum_k \sum_j}$$

$$\sum_l b_{Il} \vec{e}_l$$

$$= \sum_I m_I \Big\{ \sum_{\cancel{k}\, j} \sum_{\cancel{l}\, i} \sum_{\cancel{m}\, l} b_{I\cancel{k}\,j}\, b_{I\cancel{k}\,j}\, \Omega_{\cancel{l}\, i}\, \vec{e}_{\cancel{m}\, l}\, \delta_{\cancel{l}\, i\, \cancel{m}\, l}$$

$$- \sum_i \sum_l b_{Ii}\, b_{Il}\, \Omega_i\, \vec{e}_l \Big\}$$

$$= \sum_I m_I \sum_i \sum_l \Big(\underbrace{\sum_j b_{Ij}\, b_{Ij}}_{\vec{b}_I^{\,2}}\, \delta_{il} - b_{Ii}\, b_{Il} \Big)\, \Omega_i\, \vec{e}_l$$

$$= \sum_i \sum_l \underbrace{\sum_I m_I \big(\vec{b}_I^{\,2}\, \delta_{il} - b_{Ii}\, b_{Il} \big)}_{= I_{il}}\, \Omega_i\, \vec{e}_l$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \sum_i \sum_l I_{il}\, \Omega_i\, \vec{e}_l} \qquad \boxed{L_l = \sum_i I_{il}\, \Omega_i}$$

Falls $\vec{e}_\ell$ entlang Hauptträgheitsachsen

dann gilt $I_{\ell i} = I_i \delta_{\ell i}$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{L_\ell = I_\ell \Omega_\ell}$ $\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$ falls $\vec{\Omega}$ entlang Hauptträgheitsachsen

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(a)} \leftarrow \text{(Def. 14)}$$

äußere Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \sum_l I_{il}\, \Omega_i\, \vec{e}_l \right)$$

$$= \sum_i \sum_l I_{il} \left(\dot{\Omega}_i\, \vec{e}_l + \Omega_i\, \underbrace{\dot{\vec{e}}_l}_{\vec{\Omega} \times \vec{e}_l} \right)$$

$$\vec{e}_j \cdot \dot{\vec{L}} = N_j^{(a)} = \sum_i \sum_l I_{il} \left(\dot{\Omega}_i\, \underbrace{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{jl}} + \Omega_i\, \underbrace{\vec{e}_j \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{e}_l)}_{\vec{\Omega} \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_j)} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{N_j^{(a)} = \sum_i I_{ij}\, \dot{\Omega}_i + \sum_i \sum_l I_{il}\, \Omega_i\, \vec{\Omega} \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_j)}$$

Falls $\vec{e}_j$ entlang Hauptträgheitsachse

$I_{ij} = I_i \, \delta_{ij}$

$$\curvearrowright \quad \boxed{N_j^{(a)} = I_j \dot{\Omega}_j + \sum_i I_i \Omega_i \, \vec{\Omega} \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)}$$

$$N_1^{(a)} = I_1 \dot{\Omega}_1 + I_2 \Omega_2 \, \vec{\Omega} \cdot \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + I_3 \Omega_3 \, \vec{\Omega} \cdot \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{\vec{e}_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} N_1^{(a)} &= I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \, \Omega_2 \Omega_3 \\ N_2^{(a)} &= I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \, \Omega_1 \Omega_3 \\ N_3^{(a)} &= I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \, \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned}}$$

Eulersche Kreisel-Gleichungen

Kräftefreie Bewegung: $N_i^{(a)} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot\Omega_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3 = 0 \\ &\dot\Omega_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2}\Omega_1\Omega_3 = 0 \\ &\dot\Omega_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2 = 0 \end{aligned}}$$

Lösung durch ellipt. Integral

(siehe Landau-Lifschitz)

$I_{ik} = \delta_{ik} I_i$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k I_{ik}\,\Omega_i\Omega_k = \frac{1}{2}\sum_i I_i\,\Omega_i^2$$

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{L_i^2}{I_i}}$$

$$\frac{d}{dt}T_{rot} = \sum_i I_i\,\dot\Omega_i\,\Omega_i$$

$$= -\Omega_1\Omega_2\Omega_3\,(I_3 - I_2 + I_1 - I_3 + I_2 - I_1)$$

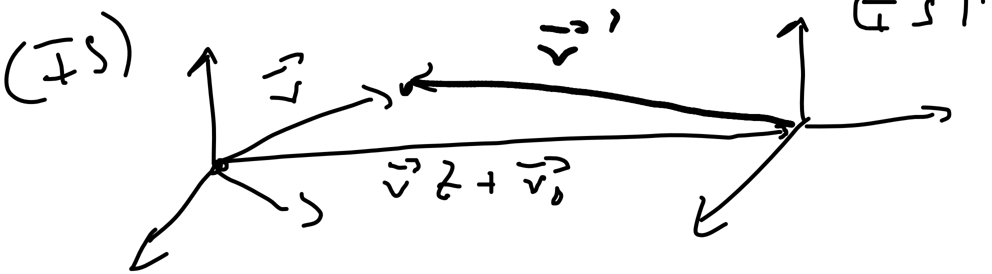
$$= 0$$

Bewegung in nicht-Inertialsystemen (NIS)

Inertialsysteme der Newtonschen Mechanik sind <u>alle</u> K.S. die sich geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegen (oder die rotiert sind), so dass die Newton-Gleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ gilt

~~(IS) sei~~

In (IS)' sein Koordinaten $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0$



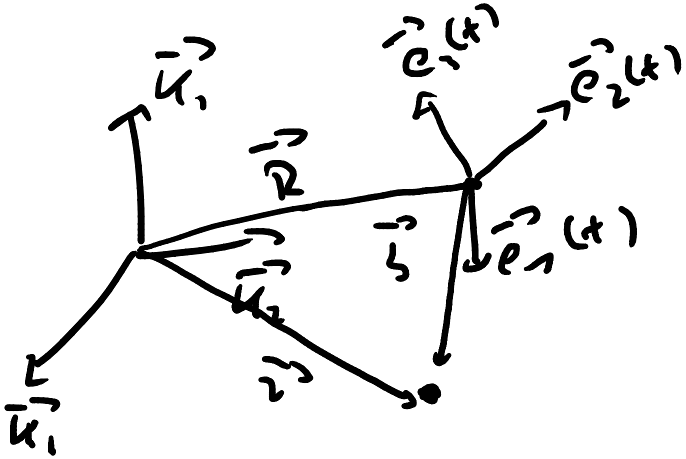
$$m\ddot{\vec{r}}\,' = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

rotierte KS: $\vec{e}_i = \sum_j R_{ij}\, \vec{e}_j{}'$

$$m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \sum_i \left(\ddot{r}_i - \frac{F_i}{m}\right) \vec{e}_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad m \sum_i \sum_j \left(\ddot{r}_i - \frac{F_i}{m}\right) R_{ij}\, \vec{e}_j = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{r}_i - F_i = 0}$$



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{b}$$

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i(t)\, \vec{e}_i(t)$$

$\dot{b}_i \neq 0$ im Unterschied zum starren Körper!

Bewegungsgleichung im NIS

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec R} + \ddot{\vec b}$$

$$\dot{\vec b} = \sum_i \Big(\underbrace{\dot b_i \vec e_i}_{\equiv \vec v} + b_i \underbrace{\dot{\vec e}_i}_{\vec\Omega \times \vec e_i} \Big) = \vec v + \vec \Omega \times \vec b$$

$$\ddot{\vec b} = \underbrace{\sum_i \Big(\ddot b_i \vec e_i + \dot b_i \underbrace{\dot{\vec e}_i}_{\vec\Omega\times\vec e_i} \Big)}_{\dot{\vec v}} + \dot{\vec\Omega} \times \vec b + \vec\Omega \times \underbrace{\dot{\vec b}}_{\vec v + \vec\Omega \times \vec b}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec b} = \vec a + \vec\Omega \times \vec v + \dot{\vec\Omega} \times \vec b + \vec\Omega \times \vec v + \vec\Omega \times (\vec\Omega \times \vec b)$$

$\vec a := \sum_i \ddot b_i \vec e_i$ = Beschleunigung im N.I.S.

Newton Gleichung im NIS

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{b}}$$

$$= m\left[\ddot{\vec{R}} + \vec{a} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{b} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{b})\right]$$

$$\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F} \underbrace{- m\ddot{\vec{R}} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v} - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{b} - m\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{b}}_{\text{Scheinkräfte}}$$

$m\ddot{\vec{R}}$: Trägheitskraft der Translationsbewegung

$m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{b}$: Trägheitskraft der Rotation des N.I.S.

$m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{b})$: Zentrifugalkraft

$2m(\vec{\Omega}\times\vec{v})$: Corioliskraft

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1 + \epsilon \vec{F}_2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \epsilon \vec{r}_2 \,, \qquad m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1$$

$$m(\ddot{\vec{r}}_1 + \epsilon \ddot{\vec{r}}_2) = \vec{F} + \epsilon \vec{F}_2$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1$$