Teil 2: Elektrodynamik

bisher Berechnung von $\vec{r}(t)$ aus $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$

jetzt: woher kommt die Kraft $\vec{F}$

wie wird sie übertragen?

z.B.: i) Gravitationskraft zwischen 2 Massen m_1, m_2

an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$

$$\vec{F} = -K \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

ii) Elektrostatische Kraft zwischen 2 Ladungen q_1, q_2 an den Orten $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$:

$$\vec{F} = -K \frac{q_1 \, q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Zentrale Idee: übertragen der Kraft durch <u>Felder</u>

(i) Gravitationsfeld

(ii) elektr. Feld

Man unterscheidet

a) skalares Feld $T(\vec{x},t): \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$(\vec{x},t) \mapsto T$$

z.B. Temperaturfeld

b) Vektorfeld $\vec{E}(\vec{x},t): \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$(\vec{x},t) \mapsto \vec{E}$$

z.B. elektrisches Feld, mag. Feld $\vec{B}(\vec{x},t)$

c) Tensorfelder (z.B. Gravitationsfeld) → ART

d) Spinorfelder (Materiefelder)

Achtung: $\vec{x} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ parametrisiert den $\mathbb{R}^3$

$\neq \vec{r}(t)$ = Ortsvektor des Teilchens

insbesondere gilt $\vec{x} \neq \vec{x}(t)$

Kraft $\vec{F}$ auf eine Ladung q am Ort $\vec{r}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

ist
$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(\vec{x},t)\right)\Bigg|_{\vec{x}=\vec{r}(t)} \qquad (2)$$

Aufgabe der Elektrodynamik: Berechne $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$

aus Maxwell-Gleichungen für vorgegebene Ladungsdichte

$\rho(\vec{x},t)$ und Stromdichte $\vec{j}(\vec{x},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\, \rho(\vec{x},t) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0\, \vec{j}(\vec{x},t)
\end{aligned}}
\qquad
\begin{array}{ll}
3 & \text{Gleichungen} \\
1 & '' \\
1 & '' \\
3 & '' \\
\hline
8 & ''
\end{array}$$

ϵ_0, μ_0, c sind Naturkonstanten

$\left(\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \right)$

also 8 gekoppelte, partielle DGL 1. Ordnung

$\rightarrow$ Aufgabe der E-Dynamik: finde $\vec{E}, \vec{B}$ für vorgegebene $\rho, \vec{j}$

Zunächst Spezialfall: <u>Elektrostatik</u>

$$\vec{B} = 0 = \vec{j} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

d.h. es gibt nur $\vec{E}(\vec{x})$, $\rho(\vec{x})$

↳ Maxwell:
der Elektrostatik

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned}}$$

Bei symmetrischer Ladungsverteilung lässt sich $\vec{E}$ oft mit Hilfe des Gaussschen Satzes finden:

Satz 17: (Gauss)

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \int_{\substack{F=\partial V \\ \text{„Rand von } V\text{"}}} \vec{A}\cdot d\vec{F} \equiv \Phi_{\vec{A}}$$

V = Volumen, F = Randfläche von V, $\vec{F} = F\,\vec{n}$

$\vec{n}$: Normalenvektor auf F „zeigt nach außen"

$\Phi_{\vec{A}}$ = Fluß des Vektorfeldes $\vec{A}$

Beweis: Honerkamp, Römer oder Math. Vorl.

Anwendung auf Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV \underset{\text{Gauss}}{\uparrow}= \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_V \varrho\, dV}_{= q_V}$$

$= q_V$ = im Volumen V eingeschlossene Gesamtladung

$$\Rightarrow \boxed{q_V = \varepsilon_0 \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F}}$$

Gaußsches Gesetz

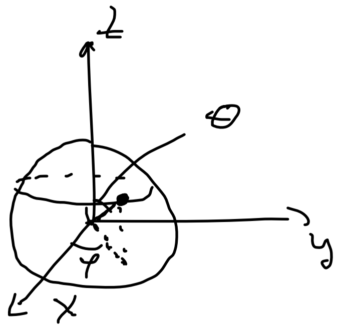
Beispiel 1: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(|\vec{x}|)$

$$\Rightarrow \vec{E}(|\vec{x}|) = E_r(|\vec{x}|)\,\vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \text{radiale Einheitsvektor}$$

Beschreibung in Kugelkoordinaten $(x,y,z) \to (r,\theta,\varphi)$

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{aligned}\right.$$



$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

Volume Element: $dV = dx\,dy\,dz = J\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin\theta$$

$$\int_{V_{\text{Kugel radius } R}} dV = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{R^3}{3} \underbrace{\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi}}_{=+2} 2\pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3 ,$$

Abkürzung $d\Omega \equiv \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\int_{F_{\text{Kugeloberfläche}}} d\Omega = 4\pi$$

Gauss

$$\Updownarrow \quad q_V = \epsilon_0 \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F}$$

wähle: F = Oberfläche einer Kugel mit Radius r

$$\Rightarrow \quad q_V = \epsilon_0 \int_F \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_r \, r^2 d\Omega = r^2 \vec{E}(r) \vec{u}_r \, \epsilon_0 \underbrace{\int_F d\Omega}_{4\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_r = \frac{q_V}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \, , \quad \vec{E} = |\vec{E}| \, \vec{u}_r$$

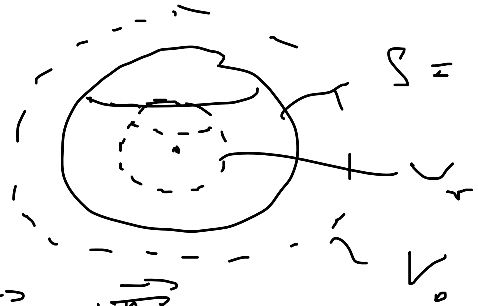
$$\boxed{\vec{E}(r) = \underbrace{\frac{q_V}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}}_{|\vec{E}|} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{q_V \, \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 \, r^3}}$$

Coulomb Gesetz

$$\left(\text{Prüfe} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right) = 0 \right)$$

Bemerkung: Coulomb Gesetz gilt nicht nur für Punktladung sondern für jede kugelsymm. Ladungsverteilung

Beispiel 2: el. Feld innerhalb einer homog. geladenen Kugel



$$q_V = \int_V \rho \, dV = \epsilon_0 \int_F \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 \int_V dV = \epsilon_0 \, \vec{E}(r) \, \vec{u}_r \, r^2 \int_F d\Omega \quad , \quad r \leq R$$

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{4\pi}{3} r^3 = \epsilon_0 \, \vec{E}\cdot\vec{u}_r \, 4\pi r^2$$

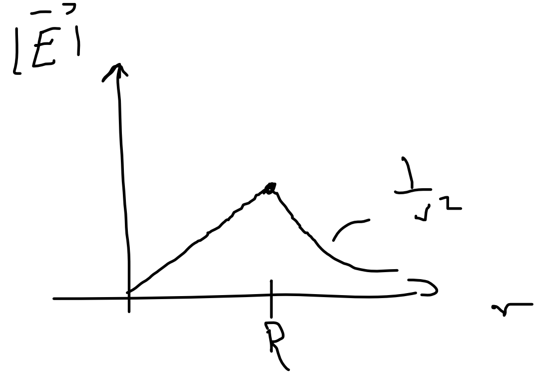
$$\Rightarrow \quad \vec{E}\cdot\vec{u}_r = \frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\epsilon_0} r$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\epsilon_0} r \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}$$

$$q = \int_{V_\varnothing} \rho_0 \, dV = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{3}{4\pi R^3} q$$

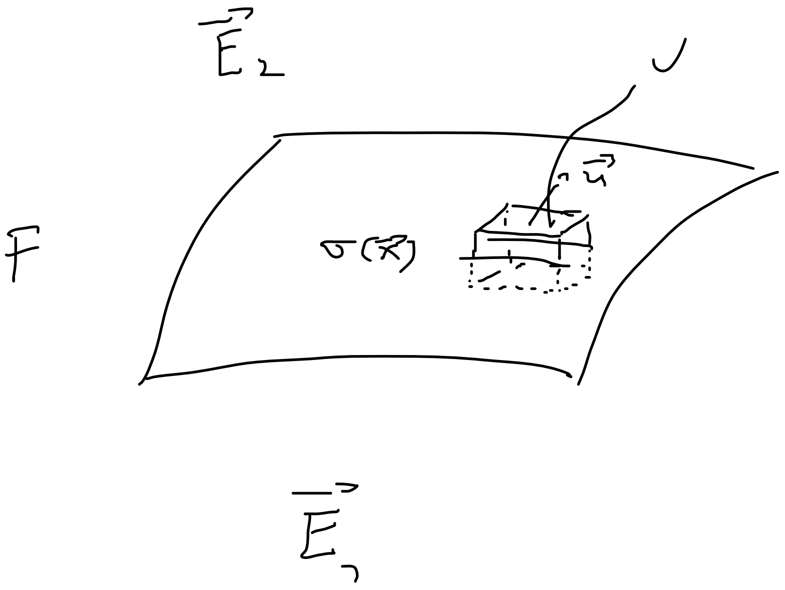
Radius R

Gesamtladung der Kugel



$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} & r > R \\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} & r < R \end{cases}}$$

Beispiel 3: auf einer (unendlich ausgedehnten) Fläche F sei eine Oberflächenladung $\sigma(x)$



Gauß:

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \vec E \cdot d\vec A = \int (\vec n \cdot \vec E_2 - \vec n \vec E_1)\, dA$$

$$= \int_V \rho \, dV = \int_A \sigma \, dA$$

$A \to 0$: $\boxed{\vec n (\vec E_2 - \vec E_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma}$

Komponente des $\vec E$-Feld $\perp$ zu F springt um $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ an der Oberfläche

Satz 18 Stokes

$$\int_{F} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Anwendung auf Elektrostatik

$$\int_{F} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} \cdot d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \vec{e} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$\Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_{\parallel} = \vec{0}$ d.h. ändert sich nicht!