Lösung der Poissongleichung

Elektrostatik: $\vec{B} = \vec{j} = 0$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Maxwell Gl.: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ (1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Lösung von (1): $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi + \vec{a}$ ← konstant

Elektrostatisches Potential

weil $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$

Φ ist nicht eindeutig: $\Phi \to \Phi + c$ ← konstante

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{"} \vec{a} = \vec{0} \text{"}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \curvearrowright \quad (2): \quad \boxed{\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}}$$ Poisson Gleichung

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ Laplace Operator

$\Rightarrow$ 4 Max. Gl. sind auf 1 Poisson-Gleich zurückgeführt (2. Ordnung)

Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_h \,, \qquad \Delta \Phi_p = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \,, \qquad \Delta \Phi_h = 0$$

Laplace Gleichung

$$\Delta \Phi = \underbrace{\Delta \Phi_p}_{-\frac{\rho}{\epsilon_0}} + \underbrace{\Delta \Phi_h}_{=0} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \checkmark$$

Strategie:
1) Finde Φ_p für Punktladung
2) " " für N Punktladungen (Superposition)
3) " " für kont. Ladungsverteilung
4) Finde Φ_h

1) Für Punktladung q ist Φ_p schon bekannt

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$$ Coulomb Gesetz

$\vec{x}_0$ = Ort von q

$$= -\vec{\nabla}\Phi_p, \quad \boxed{\Phi_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}}, \quad \text{weil}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$$

Prüfe $\Delta\Phi_p = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Für $\vec{x}_0 = \vec{0}$: $\Phi_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$, $r = |\vec{x}|$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \\ \theta &= \arccos\frac{z}{r} \end{aligned}\right.$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$(x,y,z) \to (r,\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \dots$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x} f(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi))}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(r(x,y,z), \theta(x,y,z), \varphi(x,y,z))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\Delta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hausaufgabe}}}{= \cdots =} \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2 \cancel{\sin\theta}} \cancel{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}}_{-\frac{1}{r^2}} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{r^2} = 0$$

für $r \neq 0$

Untersuche $r = 0$ mit Gaußschem Satz

$$\int_V \left(\Delta \frac{1}{r}\right) dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r}\right) dV \underset{\text{Gauß}}{=} \int \underbrace{\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r}\right)}_{-\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}} \cdot \underbrace{d\vec{F}}_{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot R^2 d\Omega} \Big|_{r=R}$$

$$= -\int \frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^4} \Big|_{r=R} \cdot R^2 \, d\Omega = -\int d\Omega = -4\pi$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \, \delta(\vec{x}) \quad \leftarrow \text{Diracsche Deltafunktion}$$

<u>Def</u>:

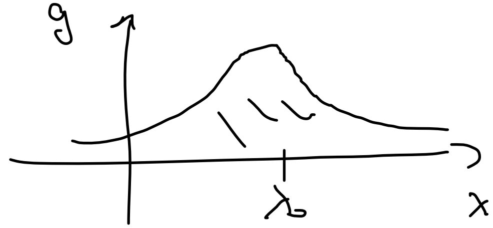
$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \, f(x) \, dx$$

$\delta(x - x_0)$ heißt Delta-Funktion und es gilt

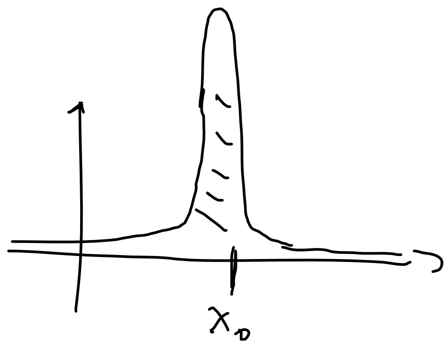
$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ \infty & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

kann als Grenzübergang einer Funktionenfolge

$$g_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{n}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2n^2}}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2n^2}}\,dx}_{=\sqrt{2\pi}\,n} = 1$$



$$\lim_{n\to 0} g_n = \delta(x-x_0)$$

(rigoros in Mathematik: Theorie der Distributionen) verallg. auf 3 Dim:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0) := \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

so dass

$$f(x_0,y_0,z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\, f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Wir haben gezeigt: $\boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{x})}$

Zurück zu Poisson

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Delta\frac{1}{r} = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{x}) \overset{!}{=} -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \Rightarrow \boxed{\rho = q\,\delta(\vec{x})}$$

Für Punktladung $\quad \rho = q\, \delta(\vec{x})$

$$\int_V \rho\, dV = q \int_V \delta(\vec{x}) = q$$

Punktladung am Ort $\vec{x}_0$:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \;, \qquad \Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}}_{-4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)} = -\frac{q}{\epsilon_0}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} = -4\pi\, \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

$$\rho = q\, \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

2) N Punktladungen q_I an den Orten $\vec{x}_I$, $I = 1, \dots, N$

Superposition:

$$\boxed{\Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{I=1}^{N} \frac{q_I}{|\vec{x} - \vec{x}_I|}}$$

erfüllt

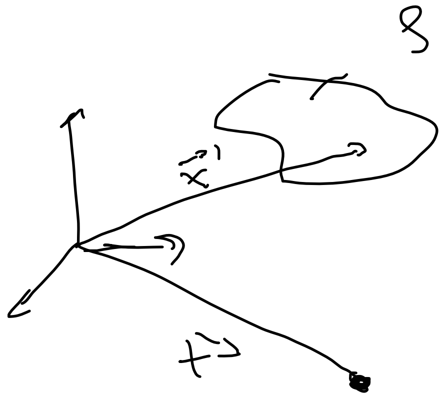
$$\Delta \Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_I q_I \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_I|}}_{-4\pi\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_I)} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_I q_I\, \delta(\vec{x} - \vec{x}_I)$$

$$= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \boxed{\rho = \sum_I q_I\, \delta(\vec{x} - \vec{x}_I)}$$

$$\int_V \rho = \sum_I q_I \int \delta(\vec{x} - \vec{x}_I)\, dV = \sum_I q_I \equiv Q$$ Gesamtladung

$$\vec E = -\vec\nabla \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{I=1}^{N} q_I \frac{(\vec x - \vec x_I)}{|\vec x - \vec x_I|^3}$$

3) Kont. Ladungsverteilung $\rho(\vec x')$



$$\boxed{\Phi_P(\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}\, d^3x'}$$

Prüfe Poisson:
$$\Delta\Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec x') \underbrace{\left(\Delta\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)}_{-4\pi\,\delta(\vec x-\vec x')} d^3x'$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Phi_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int\limits_V \rho(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,d^3x'}_{\rho(\vec{x})} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad \checkmark$$

$$\vec{E}_p = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_V \rho(\vec{x}') \underbrace{\left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{-\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}} d^3x' = -\vec{\nabla}\Phi_p$$

$$\boxed{\vec{E}_p(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_V \rho(\vec{x}')\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,d^3x'}$$

Greensche Funktion des Laplace Operators

Def 20: Die Greensche Funktion $G(\vec{x}-\vec{x}\,')$ eines Differentialoperator $D_{\vec{x}}$ erfüllt

$$\boxed{D_{\vec{x}}\, G(\vec{x}-\vec{x}\,') = c\, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')}\,, \qquad c = \text{Konstante}$$

Satz 19.: Mit Hilfe von G werden DGL der Form

$$D_{\vec{x}}\, \Phi = f(\vec{x})$$

durch $\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int f(\vec{x}\,')\, G(\vec{x}-\vec{x}\,')\, d^3x' + \phi_h$

gelöst falls $D_{\vec{x}}\, \phi_h = 0$

Beweis:
$$D_{\vec{x}}\, \Phi = \frac{1}{c} \int f(\vec{x}\,') \underbrace{\left(D_{\vec{x}}\, G(\vec{x}-\vec{x}\,') \right)}_{c\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')} d^3x' + \underbrace{D_{\vec{x}}\, \Phi_h}_{=0}$$

$$= f(\vec{x}) \qquad \blacksquare$$

(analog in L.A.: $\quad M \vec{v} = \vec{f} \;\Rightarrow\; \vec{v} = M^{-1} \vec{f}$)

Heute: $\quad G$ für $D_x = \Delta$ bestimmt

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = -4\pi\, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \;\Rightarrow\; \boxed{G(\vec{x}-\vec{x}\,') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}$$