Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\Box \Phi = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0 \qquad (*)$$

Lösung durch Seperationsansatz

$$\Phi(\vec{x}, t) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)\, T(t)$$

$$\leadsto (*): \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y Z T + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X Z T + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} X Y T - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X Y Z = 0$$

$$\Phi^{-1}: \quad \underbrace{\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{= K_1} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{= K_2} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{= K_3} - \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}_{= K_4} = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{c^2} K_4$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - k_1 X = 0 \quad , \qquad \text{etc.}$$

Lösung: $X = a_1 e^{\sqrt{k_1}\, x} + b_1 e^{-\sqrt{k_1}\, x}$

$\sqrt{k_1}$ reell: exp ansteigende + abklingende Lösung

$\sqrt{k_i}$ imaginär: Oszillierende Lösung

bei Wellenlösung: $\sqrt{k_1} = i K_1 \quad , \quad K_1 = \text{reell}$

$(k_1 < 0) \qquad k_1 = -K_1^2 \lessapprox 0$

$\Rightarrow \quad X = A_1 e^{iK_1 x} + A_1^* e^{-iK_1 x} \qquad T = A_4 e^{i\omega t} + A_4^* e^{-i\omega t}$

analog $\quad Y = A_2 e^{iK_2 y} + A_2^* e^{-iK_2 y} \qquad i\omega = \sqrt{k_4}$

$\quad Z = A_3 e^{iK_3 z} + A_3^* e^{-iK_3 z} \qquad \omega^2 = -k_4 = -c^2 (k_1 + k_2 + k_3)$

Dispersionsrel.: $\boxed{\omega^2 = c^2 (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)}$

Def: Wellenvektor $\vec{k} := k_1 \vec{e}_x + k_2 \vec{e}_y + k_3 \vec{e}_z$

$$\boxed{c^2 \vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2} \quad , \qquad \omega(\vec{k}) = c|\vec{k}| \geq 0$$

allgemeinste Lösung

$$\boxed{\Phi(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\vec{k})\, \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)}}_{e^{ik_1x}\, e^{ik_2y}\, e^{ik_3z}} + B(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right) dk_1\, dk_2\, dk_3 \right.}$$

Prüfen:

$$\Box \Phi = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = \mathrm{Re}\left\{ \iiint \left(A \underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(\vec{k}\vec{x}+\omega t)}}_{\underbrace{-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}_{-\vec{k}\cdot\vec{k}} + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0} + B\, \Box\, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right) d^3k \right.$$

$= 0$ ✓

$$\boxed{\Phi = \mathrm{Re} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x}+\omega t)} + B(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right) d^3k}$$

$$\boxed{\vec{A} = \mathrm{Re} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\vec{C}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x}+\omega t)} + \vec{D}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right) d^3k}$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$ Lorenzeichung

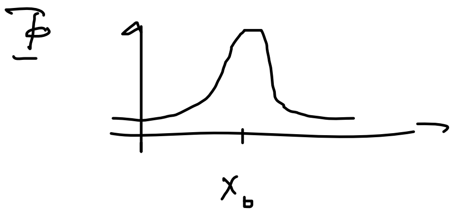
$$i\vec{k}\vec{C} + i\frac{\omega}{c^2} A = 0$$

$$\vec{k}\vec{D} + \frac{\omega}{c^2} B = 0$$

phys. Interpretation:

$\Phi(\vec{k}\vec{x} \pm \omega(k) t)$ beschreibt laufende Welle

Verallgemeinerung von $f(x \pm vt)$



zur Zeit $t = 0$ Maximum bei $X = X_0$

$t = t_1$ " " $\vec{k}\vec{x} = \vec{k}\vec{x}_0 \pm \omega t$

Geschwindigkeit des Maximums $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \mp \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \mp c$

Ausbreitungsrichtung $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$

- monochromatische Welle: fester $\vec{k}$-Wert $\vec{k}_0$

$$\Phi = \mathrm{Re}\left(A\, e^{i(\vec{k}_0 \vec{x} \pm \omega t)}\right)$$

dann ist möglich zu wählen $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_z$ $\hat{=}$ ebene Welle

Lorenzeichung erfüllt $\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

wird erreicht durch $\Box \Lambda = f(x)$

$$\Lambda = \lambda_{part} + \lambda_{hom} \quad \text{mit} \quad \Box \lambda_{hom} = 0, \quad \Box \lambda_{part} = f(x)$$

diese zusätzliche Eichfreiheit kann benutzt werden um

$\boxed{\Phi = 0}$, $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$ zu wählen

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \Phi - \underbrace{\frac{\partial \lambda_{part}}{\partial t}}_{\text{eindeutig}} - \underbrace{\frac{\partial \lambda_{hom}}{\partial t}}_{\text{frei}} \stackrel{!}{=} 0$$

Wellengleichung für $\vec{E}$, $\vec{B}$ für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

$\vec{\nabla} \times (1)$:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{\vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E}} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = 0$$

$$\boxed{- \Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box \vec{E} = 0}$$

$\vec{\nabla} \times (4)$: ...

$$\boxed{\Box \vec{B} = 0}$$

Lösung:
$$\vec{E} = \mathrm{Re} \iiint \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega t)}\, d^3k \qquad \omega = c|\vec{k}|$$

$$\vec{B} = \mathrm{Re} \iiint \vec{B}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega t)}\, d^3k$$

Prüfe Max Gl. (für monochromatische Welle einfachheitshalber)

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega t)}\right) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = i\vec{k}\vec{E} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{B} = \mathrm{Re}\left(\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega t)}\right) \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = i\vec{k}\cdot\vec{B} \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{B}_0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = i\vec{k}\times\vec{E} \pm i\omega\vec{B} = \vec{0} \qquad \vec{B}_0 = \pm\frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\times\vec{E}_0$$

$\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$, d.h. bilden orthogonales Dreibein

$\vec{E}, \vec{B}$ oszillieren in Ebene $\perp$ zu $\vec{k}$ (Ausbreitungsrichtung)

Wahl: $\vec{k} = k\,\vec{e}_z$, $\quad \vec{E} = E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2$, $\quad \vec{B} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2$

$$E_{1/2} = \mathrm{Re}\left(E^0_{1/2}\, e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}\right) = |E^0_{1/2}|\, \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha_{1/2}}\, e^{i(kz-\omega t)}\right)$$

$$E^0_{1/2} = |E^0_{1/2}|\, e^{i\alpha_{1/2}}$$

$$\boxed{E_{1/2} = |E^0_{1/2}| \cos(kz - \omega t + \alpha_{1/2})}$$

Spezialfall: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$: $\vec{E} = (|E^0_1|\,\vec{e}_1 + |E^0_2|\,\vec{e}_2) \cos(kz - \omega t + \alpha)$

linear polarisierte Welle

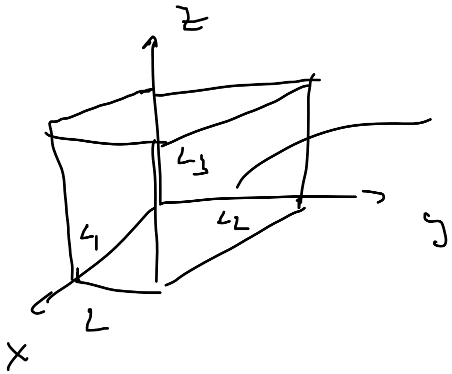
ii) $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$, $|E_1^0| = |E_2^0| = |E^0|$

$$\vec{E} = |E^0| \left(\cos(kz - \omega t + \alpha_1)\, \vec{e}_1 + \sin(kz - \omega t + \alpha_1)\, \vec{e}_2 \right)$$

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E^0|^2 \left(\cos^2(\ ) + \sin^2(\ ) \right) = |E^0|^2$$

Kreisgleichung für E_1, E_2 zirkular polarisierte Welle

Hohlraumresonator



geerdete Metallwände $\Rightarrow \vec{E}_{\parallel}\Big|_{\text{Wand}} = 0$

RB:

$$\left.\begin{aligned} &E_x(x,y,z=0,t) = E_x(x,y,z=L_3,t) = 0 \\ &E_x(x,y=0,z,t) = E_x(x,y=L_2,z,t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$E_y(z=0) = E_y(z=L_3) = E_y(x=0) = E_y(x=L_1) = 0 \quad (2)$$

$$E_z(x=0) = E_z(x=L_1) = E_z(y=0) = E_z(y=L_2) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad E_x = \mathrm{Re}\left(E_x^0 e^{i(k_x x - \omega t)}\right) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

erfüllt (G1) falls $k_y = \frac{m\pi}{L_2}$, $k_z = \frac{n\pi}{L_3}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

$$E_y = \mathrm{Re}\left(E_y^0 e^{i(k_y y - \omega t)}\right) \sin(k_x x) \sin(k_z z), \quad k_x = \frac{\ell\pi}{L_1}, \ \ell \in \mathbb{Z}$$

$$E_z = \mathrm{Re}\left(E_z^0 e^{i k_z z - \omega t}\right) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_x = E_x^0 (\cos k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad \cos \omega t$$

$$E_y = E_y^0 \sin(k_x x) \quad \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad \cos \omega t$$

$$E_z = E_z^0 \sin(k_x x) \quad \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad \cos \omega t$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \iff k_x E_x^0 + k_y E_y^0 + k_z E_z^0 = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E}^0 = 0$$

$$\vec{E} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \vec{E}(n, m, \ell)$$

$$\omega^2_{n\ell m}(k) = c^2 \vec{k}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{\ell^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2} \right)$$