Nachtrag zu letzten Vorlesung:

Impuls des e-m Feldes

$$\frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = \vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$q = \int d^3x'\, \rho(x') \,, \qquad \rho = q\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}'')$$

Verallgemeinerung

$$\frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = \int d^3x' \Big(\underbrace{\rho(\vec{x}')}_{\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}}\, \vec{E} + \underbrace{\overset{\vec{v}\,\rho}{\vec{j}}(\vec{x}')}_{\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)} \times \vec{B} \Big)$$

Bemerkung: $\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{Mech}}{dt} = \int d^3x' \Big\{ \epsilon_0 (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \epsilon_0\, \vec{E}\times \underbrace{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{-\vec{\nabla}\times\vec{E}} \Big\}$$

Letzte Vorlesung:

$$\vec{S} := \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{Poynting vector}$$

$$\mathcal{E} := \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}^2 \qquad \text{Energiedichte}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{Mech}}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int d^3x'\, \vec{S} + \int d^3x' \Big\{ \epsilon_0 (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0})\,\vec{B}}_{\text{"0 addiert"}} - \epsilon_0\, \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \Big\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d(P_{Mech})_i}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int d^3x' \, S_i + \int d^3x' \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x'^j} \overline{T}_{ji}}$$

$$\boxed{\overline{T}_{ji} := \epsilon_0 E_j E_i + \frac{1}{\mu_0} B_j B_i - \frac{1}{2}\delta_{ji} \mathcal{E}}$$

Maxwell Tensor

<u>Beweis:</u>

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \overline{T}_{ji} = \sum_j \Big\{ \epsilon_0 (\partial_j E_j) E_i + \epsilon_0 E_j \partial_j E_i$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}(\partial_j B_j) B_i + \frac{1}{\mu_0} B_j (\partial_j B_i) - \frac{1}{2}\delta_{ji} \Big[\epsilon_0 \partial_j \sum_k E_k E_k$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} \partial_j \sum_k B_k B_k \Big\}$$

$$= \epsilon_0 (\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) E_i + \epsilon_0 (\vec{E}\cdot\vec{\nabla}) E_i$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) B_i + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}\cdot\vec{\nabla}) B_i$$

$$- \left(\epsilon_0\, \partial_i \vec{E}) \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \partial_i \vec{B}) \cdot \vec{B} \right. = \sum_j \partial_j \overline{T}_{ji}$$

$$\left(\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right)_x = B_y \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B})_z}_{\partial_x B_y - \partial_y B_x} - B_z \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B})_y}_{\partial_z B_x - \partial_x B_z}$$

$$= B_y \partial_x B_y - B_y \partial_y B_x - B_z \partial_z B_x + B_z \partial_x B_z$$

$$= \underbrace{\sum_u B_u \partial_x B_u}_{\vec{B}\,\partial_x \vec{B}} \underbrace{- B_x \partial_x B_x - B_y \partial_y B_x - B_z \partial_z B_x}_{-(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\, B_x}$$

$$\boxed{\left(\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right)_i = \vec{B}\,\partial_i \vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\, B_i}$$

analog: $\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = \vec{E}\, \partial_i \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\, E_i$ $\blacksquare$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(P_{Mech} + P_{Feld}\right)_i = \sum_j \int d^3x' \, \frac{\partial}{\partial x'_j}\, T_{ji}}$$

$$\boxed{\vec{P}_{Feld} = \frac{1}{c^2}\, \vec{S}}$$

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein 1905)

Frage: Was sind die Inertialsysteme der Elektrodynamik?

Inertialsystem (IS) = Koordinatensystem, in denen die vorgegebenen phys. Gesetze die gleiche Form haben

IS der Mechanik:

- rotiertes KS $\quad x^i \to x'^i = \sum_j R^{ij} x^j$

  ↑ Drehmatrix 3×3

- geradlinig gleichförmig bewegtes KS

  $$x^i \to x'^i = x^i + x_0^i + v_0^i t \quad \left(\text{Galilei-Transf.}\right)$$

Newton $\quad m \ddot{x}^i = F^i$

Problem in E-Dynamik: c = Geschwindigkeit e-m Welle erscheint als Naturkonstante

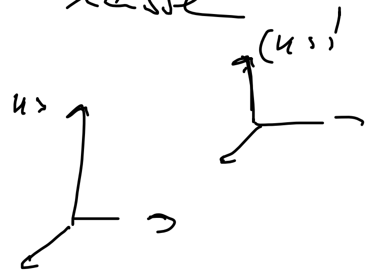
$$\frac{dx'^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} + v_0^i \neq \frac{dx^i}{dt}$$

Geschwindigkeit ist nicht invariant unter Galilei-Transf.

<u>Einstein</u>: Postuliert Konstanz von c

und definiert IS als die KS, die c invariant lassen

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \frac{dx'^i}{dt'} \frac{dx'^i}{dt'} = c'^2 = c^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} \quad \text{für e-m. Welle} \quad (*)}$$



Welche Koordinatentrafo. respektiert (*) ?

andere Schreibweise

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{i=1}^{3} dx^i dx^i = ds'^2 = c^2 dt'^2 - \sum_{i=1}^{3} dx'^i dx'^i \qquad (**)$$

$ds^2 = ds'^2 = 0$ für eine Welle

Fasse $\underbrace{\text{Raum + Zeit}}_{\text{Minkowski-Raum}}$ zu einem "Vierervektor" zusammen:

$$x^\mu := (ct, x, y, z) = (ct, x^i) \quad , \quad dx^\mu = (c\,dt, dx, dy, dz)$$

$\mu = 0,1,2,3$ $\qquad$ $i = 1,2,3$

metrische Tensor im Minkowski-Raum $\quad \eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{(**)} \quad \boxed{\sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = ds^2} \quad \text{(***)}$$

$\eta_{\mu\nu}$: Pseudo-euklidischer metrischer Tensor im Minkowski-Raum

ds^2: Linienelement im Minkowskiraum

Welche Koordinatentrsf. lassen ds^2 invariant

Ansatz für linearen Trasf.

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \sum_{\rho=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, x^{\rho}$$

$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}$: 4x4 Matrix mit konstanten Matrixelementen

$$dx^{\mu} \to dx'^{\mu} = \sum_{\rho=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, dx^{\rho}$$

Λ, (***)

$$\sum_\mu \sum_\nu \eta_{\mu\nu}\, dx'^\mu dx'^\nu = \sum_\mu \sum_\nu \sum_\rho \sum_\sigma \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\rho\, dx^\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma\, dx^\sigma$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_\rho \sum_\sigma \eta_{\rho\sigma}\, dx^\rho dx^\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_\mu \sum_\nu \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

Bedingung an $\Lambda^\mu{}_\rho$

in Matrixform

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

analog Def. ⊂ Drehmatrix $R^i{}_j$ (3x3 Matrix)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\, R^i{}_k\, R^j{}_l = \delta_{kl} \qquad \text{folgt} \quad |\vec{x}'|^2 = |\vec{x}|^2$$

oder in Matrixform

$$R^T \mathbb{1} R = \mathbb{1}$$

<u>Unterschied:</u>

$$R_{3\times 3} \longrightarrow \Lambda_{4\times 4}$$

$$-\mathbb{1}_{3\times 3} \longrightarrow \eta_{4\times 4}$$

Wieviele unabhängige Parameter hat $\Lambda^\mu{}_\nu$?

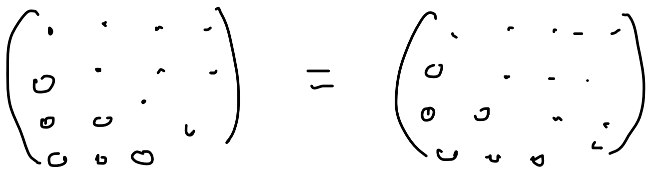
ohne Bed.: Λ : 16 Parameter

R : 9 "

Bed.: 16 bzw 9 Gleichungen aber nicht linear unabhängig

$$(\Lambda^T g \Lambda)^T = \Lambda^T g^T \Lambda = \Lambda^T g \Lambda = g^T = g$$

$\Rightarrow$ 10 (6) linear unabhängige Gleichungen



$\Rightarrow$ Λ hat $16 - 10 = 6$ unab. Param.

R hat $9 - 6 = 3$ unab. Parameter $\hat{=}$ 3 Drehwinkel

R ist ein spezielles Λ!

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R_{3\times 3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \underbrace{\boxed{-R^T \mathbb{1} R}}_{-\mathbb{1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \eta$$

$\Rightarrow$ 3 der Parameter sind Drehwinkel

$\Rightarrow$ Was sind die anderen 3 ?

Spezialfall: IS' bewegt sich in x-Richtung gegenüber IS

d.h. $y' = y$, $z' = z$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{2\times 2} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\Lambda_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

$$\curvearrowright \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{2\times 2}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{2\times 2}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - c^2 = 1 = d^2 - b^2, \qquad ab - cd = 0$$

3 Gleichungen für 4 Parameter

Zusätzliche Forderung $\quad \lambda^0{}_0 > 0 \quad$ (keine Zeitumkehr)

Lösung $\quad a = \cosh\psi = d$

$\quad b = c = -\sinh\psi \qquad \psi$ = Rapidität

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}$$, v_x = Geschwindigkeit des (KS') Systems