Aufgabe 1

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator erfüllt die DGL

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{1}$$

a) Lösen Sie (1) durch den Ansatz

$$z(t) = \tfrac{1}{2}\left(Ae^{\lambda t} + A^* e^{\lambda^* t}\right) , \qquad A, \lambda \in \mathbb{C} , \tag{2}$$

und bestimmen Sie λ. Wie hängt die Lösung (2) mit der in der Vorlesung angegebenen Form

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \tag{3}$$

zusammen?

b) Zeigen Sie, dass (3) auch in der Form

$$z(t) = c \cos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

angegeben werden kann. Wie hängen c, φ mit z_0, v_0 und A zusammen?

Aufgabe 2

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Reibung erfüllt die DGL

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega^2 z = 0 , \qquad \gamma \in \mathbb{R} \tag{5}$$

a) Lösen Sie (5) erneut durch den Ansatz (2) und bestimmen Sie wieder die Konstanten λ und A.

b) Diskutieren Sie die Lösung von (5) für die Fälle

$$(i) \quad \gamma^2 > 4\omega^2 , \qquad (ii) \quad \gamma^2 < 4\omega^2 , \qquad (iii) \quad \gamma^2 = 4\omega^2 .$$

Aufgabe 3

a) Gegeben sei eine skalare Funktion $f(\vec{r})$ und ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$. Zeigen Sie

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = (\nabla f) \cdot \vec{A} + f(\nabla \cdot \vec{A}) \,, \qquad \nabla \times (f\vec{A}) = (\nabla f) \times \vec{A} + f(\nabla \times \vec{A}) \,. \tag{6}$$

b) Berechnen Sie die Ausdrücke

$$(i) \quad \nabla\left(\frac{1}{r^n}\right) \,, \qquad (ii) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^n}\right) \,, \qquad (iii) \quad \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^n}\right) \,, \qquad r := |\vec{r}|, \quad r \neq 0 \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

c) Zeigen Sie, dass jede Zentralkraft $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ konservativ ist.

Aufgabe 4

Auf eine Teilchen in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ wirkt die Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Bestimmen Sie $\vec{r}(t)$ des Teilchens und zeigen Sie, dass es sich um eine Spiralbewegung handelt. *Hinweis*: Entkoppeln Sie die Bewegungsgleichungen durch nochmaliges differenzieren.