**Übungsblatt 10** Theoretische Physik I WS 09/10

Abgabe: 7.1

## Aufgabe 1

Lösen Sie die Laplace Gleichung $\Delta\Phi(x, y, z) = 0$ in kartesischen Koordinaten mit einem Produktansatz

$$\Phi = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

a) Welche Differentialgleichungen erfüllen $X, Y$ und $Z$ und was sind ihre Lösungen.

b) Zwei in $z$-Richtung unendlich ausgedehnte Metallplatten bei $x = 0$ und $x = a$ seien geerdet, während auf zwei weitere Platten bei $y = 0$ und $y = a$ ein konstantes Potential $\Phi_0$ anliege. Bestimmen Sie $\Phi(x, y, z)$.

   *Hinweis*: Überlegen Sie zunächst, ob $\Phi$ von $z$ abhängen kann. In der weiteren Rechnung ist die Beziehung

$$\int_0^a \sin(\tfrac{m\pi}{a}x)\, \sin(\tfrac{n\pi}{a}x)\, dx = \tfrac{a}{2}\, \delta_{nm}$$

   nützlich.

## Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Legendrepolynome

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l$$

   die Legendresche Differentialgleichung

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P_l}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_l}{d\xi} + l(l+1) P_l = 0$$

   erfüllen.

   *Hinweis*: Differenzieren dazu $(l + 1)$-mal die Gleichung

$$(\xi^2 - 1) \frac{d}{d\xi}(\xi^2 - 1)^l = 2l\xi(\xi^2 - 1)^l \,.$$

b) Berechnen Sie explizit die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}$ für $l = 0, 1, 2$.

## Aufgabe 3

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius $R$ liege die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \sigma_0 \left(3\cos^2\theta - 1\right) .$$

a) Berechnen Sie die Gesamtladung der Kugel.

b) Berechnen Sie das Potenzial $\Phi(r, \theta)$ innerhalb und außerhalb der Kugel.

   *Hinweis*: Passen Sie die Koeffizienten in der allgemeinen Lösung der Laplace Gleichung so an, dass sie bei $r = 0$ nicht singulär wird, $\lim_{r\to\infty} \Phi = 0$ gilt und die Randbedingungen bei $r = R$ erfüllt sind.

## Aufgabe 4

Vor einer geerdeten leitenden Kugel mit Radius $R$ befinde sich eine Punktladung $q$ am Ort $a\,\vec{e}_z$.

a) Finden Sie das Potenzial $\Phi(\vec{x})$ indem sie eine Bildladung $q'$ am Ort $a'\vec{e}_z$ annehmen und $q'$ und $a'$ so bestimmen, dass die Randbedingung auf der Kugeloberfläche erfüllt ist.

   *Hinweis*: Benutzen Sie kartesische Koordinaten.

b) Berechnen Sie die auf der Kugel induzierte Oberflächenladung $\sigma$ und zeigen Sie

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R} \frac{R^2 - a^2}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}} .$$

*************************************************************************

**Das Theorie I - Team wünscht frohe Weihnachten und ein erfolgreiches 2010 !!**

*************************************************************************