**Übungsblatt 13** Theoretische Physik I WS 09/10

Abgabe: 28.1

## Aufgabe 1

a) Zeigen Sie

$$(\Delta + k^2)\,\frac{e^{\pm ikr}}{r} \;=\; -4\pi\,\delta(\vec{x})\ .$$

b) Zeigen Sie, dass

$$G(\vec{x},t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\omega t \pm kr)}}{r}\,d\omega$$

für $\omega = ck$ die Gleichung

$$(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\,G \;=\; -4\pi\,\delta(\vec{x})\,\delta(t)$$

erfüllt.

c) Vergleichen Sie $G$ mit der in der Vorlesung berechneten Greenschen Funktion.

## Aufgabe 2

Das Vektorpotenzial der Dipolstrahlung lautet

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\mathrm{Re}\left(-i\omega\vec{p}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\right)\ , \qquad r \neq 0\ .$$

a) Berechnen Sie das skalare Potenzial $\Phi$ zur führenden Ordnung in $\frac{1}{r}$ aus der Lorentzeichung.

b) Berechnen Sie ebenfalls zur führenden Ordnung $\vec{B}$ und $\vec{E}$.

## Aufgabe 3

Gegeben sei eine elektromagnetische Welle in der Form

$$\vec{A} = A_0\cos(kz - \omega t)\,\vec{e}_x\ , \quad \Phi = 0\ , \qquad A_0 \in \mathbb{R}\ , \quad \omega = ck\ .$$

a) Berechnen Sie das zugehörige $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Feld. Um was für eine Welle handelt es sich?

b) Berechnen Sie die Energiedichte $\epsilon$, den Poyntingvektor $\vec{S}$ sowie den zeitlichen Mittelwert $\overline{\vec{S}}$ für diese Welle.

c) Berechnen Sie den Maxwell-Tensor für diese Welle.

## Aufgabe 4

Für eine bewegte Punktladung $q$ sind Ladungs- und Stromdichte gegeben durch

$$\rho(\vec{x},t) = q\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0(t)) \ , \qquad \vec{j}(\vec{x},t) = q\vec{v}_0(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0(t)) \ ,$$

wobei $\vec{x}_0(t)$ der Ort und $\vec{v}_0 = \dot{\vec{x}}_0$ die Geschwindigkeit der Punktladung sind.

a) Berechnen Sie $\Phi_{\text{ret}}$ ausgehend von der Formel

$$\Phi_{\text{ret}}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{x}',t')\,G_{\text{ret}}(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\,d^3x'dt' \ .$$

*Hinweis*:

Führen Sie im Gegensatz zur Vorlesung zunächst die $x'$-Integration aus. Das verbleibenden $t'$-Integral vereinfacht sich mit Hilfe der Formel

$$\delta(f(t)) = \sum_i \left|\frac{df}{dt}(t=t_i)\right|^{-1} \delta(t-t_i) \ ,$$

wobei $t_i$ die Nullstellen von $f(t)$ sind (also $f(t_i)=0$). Nehmen Sie weiterhin an, dass $c(t-t') - |\vec{x}-\vec{x}_0(t')|$ genau eine Nullstelle bei $t'=t_{\text{ret}}$ hat.

b) Wie lautet $\vec{A}_{\text{ret}}$?

c) Prüfen Sie, dass der Spezialfall $\vec{x}_0 =$ konstant die richtigen $\Phi_{\text{ret}}$ und $\vec{A}_{\text{ret}}$ ergibt.