Abgabe: 12.11

Aufgabe 1

Der Lenz-Runge Vektor $\vec{A}$ eines 2-Körper-Problems ist definiert als

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L}_{\rm rel} - \kappa \, \frac{\vec{r}}{r} \, , \qquad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \; .$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße ist, falls $U(r) = -\kappa/r$ gilt.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie dabei die Relation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} \; .$$

b) Zeigen Sie $|\vec{A}|^2 = \kappa^2 \epsilon$ für das in der Vorlesung definierte ϵ.

c) Zeigen Sie

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{L_{\rm rel}^2}{\mu} - \kappa r$$

und berechnen Sie unter Verwendung von $\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}||\vec{r}| \cos\varphi$ die Bahnkurve $r(\varphi)$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung hergeleiteten Flächensatzes $dF = \frac{l}{2\mu} dt$ das 2. Keplersche Gesetz

$$\kappa T^2 = 4\pi^2 \mu \, a^3 \; ,$$

wobei T die Umlaufzeit eines Planeten und a die große Halbachse seiner Ellipsenbahn ist.

b) Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn im Gravitationsfeld der ruhenden Sonne. Seine Bahnebene fällt mit der als kreisförmig anzunehmenden Erdbahn zusammen. Der Perihelabstand beträgt ein Drittel des Radius R der Erdbahn. Zeigen Sie, daß die Zeit T, die der Komet innerhalb der Erdbahn verbringt durch

$$T = \alpha R^{\frac{3}{2}}$$

gegeben ist und berechnen Sie die Konstante α.

Aufgabe 3

Bei einer Streuung im Laborsystem habe das einlaufende Teilchen 1 die Geschwindigkeit $\vec{v}_1 := \dot{\vec{r}}_1(t=-\infty)$, während das Teilchen 2 zunächst ruht. Der Streuwinkel θ_L im Laborsystem ist definiert durch die Beziehung

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1' = |\vec{v}_1||\vec{v}_1'| \cos\theta_L \ , \qquad \text{mit} \qquad \vec{v}_1' := \dot{\vec{r}}_1(t=+\infty) \ .$$

Zeigen Sie, daß der Streuwinkel θ_L im Laborsystem mit dem in der Vorlesung berechneten Streuwinkel θ im Schwerpunktsystem über die Formel

$$\cos\theta_L = \frac{m_1 + m_2\cos\theta}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta}}$$

zusammenhängt.

Hinweis: Drücken Sie $\vec{v}_1'$ durch die Relativgeschwindigkeiten $\vec{v} := \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ und $\vec{v}' := \vec{v}_1' - \vec{v}_2'$ aus.

Aufgabe 4

Ein Teilchen A ruht im Laborsystem und zerfällt in drei Teilchen (B, C, D) mit gleicher Masse m

$$A \to B + C + D \ .$$

Das Teilchen A stellt für diesen Zerfall eine Ruheenergie E_0 zur Verfügung. (Die Ruheenergie der Zerfallsprodukte B, C, D sei vernachlässigbar.)

a) Stellen Sie Impuls- und Energiebilanz des Zerfalls auf.

b) Zeigen Sie, daß die möglichen Energiewerte der Teilchen B und C innerhalb der Kurve

$$X_B^2 + X_C^2 + X_B X_C - (X_B + X_C) + \frac{1}{4} = 0 \ , \quad \text{für} \quad X_{B,C} \equiv \frac{E_{B,C}}{E_0} \ , \qquad (*)$$

liegen.

Hinweis: Eliminieren Sie E_D durch die Impulsbilanz und bestimmen Sie die Randkurve der Energieerhaltung.

c) Zeigen Sie, daß $(*)$ eine (verschobenen und gedrehte) Ellipse der Form

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

beschreibt und bestimmen Sie a, b, x_0, y_0. Skizzieren Sie die Ellipse in der X_B–X_C–Ebene.