Universität Hamburg, Department Physik

Übungsblatt 6 Theoretische Physik I WS 09/10

Abgabe: 26.11

Aufgabe 1

Ein Teilchen bewege sich im Potential

$$U = U_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) , \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 , \qquad U_0, \rho_0 \in \mathbb{R} ,$$

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) definiert als

$$x = \rho \cos\varphi , \qquad y = \rho \sin\varphi , \qquad z = z ,$$

auf und berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen.

b) Welche zyklischen Koordinaten hat das System und wie lauten die zugehörigen Erhaltungsgrößen?

c) Welche Symmetrien hat das System? Wie hängen diese Symetrien mit den unter b) berechneten Erhaltungsgrößen zusammen?

Aufgabe 2

a) In der Vorlesung wurden die drei Drehmatrizen $R_a(\varphi_a), a = 1, 2, 3$, berechnet. Entwickeln Sie die R_a zur ersten Ordnung in φ_a gemäß

$$R_a = \mathbf{1} + \varphi_a T_a + \mathcal{O}(\varphi^2)$$

und berechnen Sie die drei Matrizen T_a.

b) Die Exponentialfunktion einer Matrix T ist über die Reihenentwicklung

$$e^T := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n \qquad (*)$$

mit $T^0 = \mathbf{1}$ definiert. Berechnen Sie e^{T_3} und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Drehmatrix R_3. (Es sei $R_3 \equiv R_z$ und $T_3 \equiv T_z$.)

Hinweis: Berechnen Sie zunächst T_3^2, T_3^3, T_3^4 und leiten Sie daraus einen Ausdruck für T_3^{2n} und T_3^{2n+1} her. Spalten Sie dann die Summe $(*)$ in einen gerade und einen ungraden Anteil auf.

c) Das Liesche Produkt (Kommutator) zweier Matrizen ist definiert als

$$[T_a, T_b] := T_a T_b - T_b T_a .$$

Berechnen Sie $[T_1, T_2], [T_1, T_3], [T_2, T_3]$.

Aufgabe 3

Die Euler-Lagrange Gleichungen für das ebene Doppelpendel wurden in Aufgabe 2, Blatt 5 bestimmt.

a) Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen für $l_1 = l_2$ im Limes kleiner Schwingungen?

   Hinweis: Vernachlässigen Sie alle Terme quadratisch in $\varphi, \dot{\varphi}$.

b) Lösen Sie die in a) bestimmten Gleichungen durch den Ansatz

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 e^{i\omega t} \ , \qquad \varphi_2 = \varphi_2^0 e^{i\omega t} \ ,$$

   und bestimmten Sie die möglichen Werte für ω^2.

   Hinweis: Schreiben Sie die Euler-Lagrange Gleichungen in Matrixform und bestimmen Sie ω^2 als die Eigenwerte dieser Matrix.

c) Berechnen Sie ω^2 für die die Spezialfälle

   (i) $m_1 \ll m_2$,

   (ii) $m_1 \gg m_2$,

   (iii) $m_1 = m_2$.

   Berechnen Sie in allen drei Fällen die Eigenvektoren $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.