Abgabe: 3.12

Aufgabe 1

Gegeben sei eine eindimensionale linear Kette (siehe Abbildung 1) mit 3 Teilchen gleicher Masse m die durch zwei Federn mit Federkonstante k verbunden sind und deren Ruhelage bei $x_1 = 0, x_2 = d, x_3 = 2d$ liegt. Benutzen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Auslenkungen aus der Ruhelage

$$q_1 = x_1 \ , \qquad q_2 = x_2 - d \ , \qquad q_3 = x_3 - 2d \ .$$

Das Potential dieses System lautet dann $U = \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}k(q_3 - q_2)^2$.

a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3} \sum_{b=1}^{3} \left(g_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b - M_{ab} q_a q_b \right)$$

und berechnen Sie g_{ab} und M_{ab}.

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des Systems. Wie lautet die allgemeine Lösung $q_a(t)$?

c) Finden Sie die Normalkoordinaten Q_a und drücken Sie L durch Q_a und $\dot{Q}_a$ aus.

d) Welchen Schwingungen entsprechen die drei Eigenschwingungen?

e) Wie ändern sich U, M_{ab} und die Eigenfrequenzen ω, falls Teilchen 1 und Teilchen 3 mit je einer weiteren Feder an einer Wand befestigt sind (siehe Abbildung 2)?

Aufgabe 2

Ein Seil wird am linken Ende ($x = 0$) durch harmonische Auslenkungen zu transversalen Schwingungen angeregt, während das rechte Ende ($x = L$) fest sei. Die Randbedingungen lauten somit

$$q(x=0,t) = A\cos\Omega t\ , \qquad q(x=L,t) = 0$$

a) Berechnen Sie $q(x,t)$ mit Hilfes des Bernoullischen Produktansatz.

b) Zeigen Sie, daß die Lösung auch in der d'Alembertschen Form

$$q(x,t) = q_R(x - vt) + q_L(x + vt)$$

geschrieben werden kann und berechnen Sie q_R und q_L.

Aufgabe 3

Gegeben sein ein eindimensionalen Systems mit Potential

$$U = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \tfrac{1}{3}m\epsilon x^3$$

a) Wie lautet die Euler-Lagrange Gleichung?

b) Benutzen Sie den störungstheoretischen Ansatz

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

und lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für kleine ϵ zunächst zur führenden Ordnung ϵ^0 und bestimmen Sie x_0. Lösen Sie in einem zweiten Schritt die Euler-Lagrange Gleichung zur Ordnung ϵ^1 und bestimmen Sie x_1.

Hinweis: Es gilt $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

c) Wieviele freie Parameter enthält Ihre Lösung und warum?

Wie lautet $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$.