Universität Hamburg, Department Physik

Übungsblatt 8 Theoretische Physik I WS 09/10

Abgabe: 10.12

Aufgabe 1

Ein starrer Körper K befinde sich in der $x - y$ Ebene.

a) Zeigen Sie, dass dann für die Komponenten des Trägheitstensor gilt

$$I_{13} = I_{23} = 0 \qquad \text{und} \qquad I_{11} + I_{22} = I_{33} \ .$$

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente von K als Funktion von I_{11}, I_{22}, I_{12}.

c) Berechnen Sie I_{11}, I_{22}, I_{12} explizit für ein System von 4 Massenpunkten mit Masse m an den Ecken eines Quadrats mit Kantenlänge a.

d) Berechnen Sie I_{11}, I_{22}, I_{12} explizit für ein System von 3 Massenpunkten an den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit Grundline a und Höhe h. (Siehe Abbildung.)

Aufgabe 2

Manchmal ist es günstiger den Trägheitstensor in einem Koordinatensytem zu berechnen, in dem nicht der Schwerpunkt S, sondern ein anderer Punkt P der Ursprung ist. In diesem verschobenen körperfesten Koordinatensytem sind die Ortsvektoren der Teilchen $\vec{b}' = \vec{b} - \vec{d}$ wobei $\vec{d} = (\vec{SP})$ sei.

a) Zeigen Sie, dass zwischen den Trägheitstensoren in den beiden Koordinatensytemen der folgende Zusammenhang besteht

$$I'_{ik} = I_{ik} + M(\delta_{ik}\vec{d}^2 - d_i d_k) \ . \qquad (*)$$

b) Berechnen Sie I_{ik} für einen Quader mit Kantenlängen a, b, c und konstanter Massendichte ρ für die folgenden Fälle (und verfizieren Sie $(*)$):

i) wenn der Schwerpunkt im Ursprung liegt,

ii) wenn ein Eckpunkt im Ursprung liegt.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein kräftefreier starrer Körper mit Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2$, I_3.

a) Wie sieht ein solcher Körper aus?

b) Lösen Sie die Eulerschen Kreiselgleichungen für diesen Fall.

c) Zeigen Sie, daß $\vec{\Omega}$ eine Kreisbewegung um $\vec{e}_3$ ausführt. Wie bewegt sich $\vec{L}$?

d) Zeigen Sie, daß $\vec{\Omega}, \vec{e}_3, \vec{L}$ in einer Ebene liegen, d.h. es gilt

$$\vec{\Omega} = a\,\vec{e}_3 + b\,\vec{L} \ ,$$

und berechnen Sie die Konstanten a und b.

Aufgabe 4

Ein Körper auf der Nordhalbkugel falle frei im homogenen Gravitationsfeld der Erde. Nehmen Sie an, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Erde $\vec{\Omega}$ klein und konstant ist und berücksichtigen Sie daher nur die Corioliskraft.

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Körpers?

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung störungstheoretisch zur ersten Ordnung in $|\vec{\Omega}|$ durch den Ansatz $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

c) Berechnen Sie die durch die Erddrehung bedingte Ablenkung eines frei fallenden Körpers aus der Höhe h von der Vertikalen.

   Hinweis: Wählen Sie die z-Achse vertikal nach oben und die x-Achse in Richtung des Meridians zum Pol, so dass gilt $\vec{\Omega} = \vec{e}_x\,\Omega\cos\lambda + \vec{e}_z\,\Omega\sin\lambda$, wobei λ die geographische Breite ist.

d) Wie lautet die Ablenkung, wenn der Körper mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{e}_x\,v_{0x} + \vec{e}_z\,v_{0z}$ aus der Höhe $h = 0$ abgeworfen wird.