

Aufgabe 1

a) Beweisen Sie die geometrische Summenformel

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} .$$

*Hinweis:* Multiplizieren Sie die rechte Seite explizit aus.

b) Bestimmen Sie die lokalen und absoluten Extrema der Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c , \quad x, a, b, c \in \mathbb{R} ,$$

im Intervall  $A \geq x \geq B$  ( $B < A$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ ).

c) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von L'Hospital:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x , \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} , \quad a, b \in \mathbb{R}^+ , \quad iii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x-a}{x-b} , \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \\ iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} , \quad v) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} , \quad vi) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} .$$

d) Für welchen Wert von  $a$  wird der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{-x} \ln \frac{x}{a}}{\sin \frac{x-a}{a^2}}$$

maximal?

Aufgabe 2

a) Wie lauten die Stammfunktionen folgender Funktionen:

$$f(x) = \ln x , \quad f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j , \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

b) Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

$$\int_a^b (\alpha x + \beta) dx , \quad \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} , \quad \int_a^b \sinh(\alpha x) dx , \quad \int_a^b e^{\alpha x} dx .$$

### Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration die Stammfunktionen folgender Funktionen ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} i) f(x) &= \ln x, & ii) f(x) &= x^2 \sin(\alpha x), & iii) f(x) &= \sinh^2(\alpha x), \\ iv) f(x) &= x\sqrt{\alpha x + \beta}, & v) f(x) &= (\ln x)^2, & vi) f(x) &= e^{\alpha x} \sin(\beta x). \end{aligned}$$

### Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Kurven  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = \sqrt{x}$  im Intervall  $x \in [a, b]$  für

i)  $a, b \in [0, 1]$ ,

ii)  $a \in [0, 1], b > 1$ .

b) Berechnen Sie die Fläche unterhalb der Kurve  $f(x) = 2$  und überhalb der Kurve  $g(x) = \frac{1}{1-|x|}$ .

### Aufgabe 5

Berechnen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

$$i) f(x) = \cot \alpha x, \quad ii) f(x) = \tanh \alpha x, \quad iii) f(x) = \coth \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$