Universität Hamburg, Department Physik

Übungsblatt 9 Mathematischen Grundlagen der Physik WS 11/12

Aufgabe 1

a) Gegeben seien folgende Funktionen:

$$i)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} ,$$

$$ii)\quad g(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ überall stetig ist während $g(x,y)$ unstetig im Punkt $(0,0)$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten für i).

b) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)+1}-1} = 2$$

Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten.

c) Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

nicht existiert. *Hinweis*: Nähern Sie sich dem Punkt $(0,0)$ auf der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = y$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen

$$i)\quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ , \qquad ii)\quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\ , \quad a,b \in \mathbb{R}\ , x \neq a, y \neq b$$

$$iii)\quad f(x,y) = e^x \cos y\ , \qquad iv)\quad f(x,y) = x^y\ , \quad x,y \in \mathbb{R}_+\ .$$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für die obigen Funktionen.

b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung, also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ ,$$

für die obigen Funktionen.

c) Was können Sie über die Ableitungen im Fall ii) bei $x \neq a, y \neq b$ aussagen?

Aufgabe 3

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylorreihe um den Punkt $x = 0 = y$ bis zur 2. Ordnung

$$i) \quad f(x,y) = e^x \ln(1+y) \ , \qquad ii) \quad f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy} \ ,$$

$$iii) \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \ .$$

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie das totale Differential folgender Funktionen:

$$i) \quad f(x,y) = \arctan(xy) \ , \qquad ii) \quad f(x,y,z) = x^l y^n z^m \ , \quad l,m,n \in \mathbb{N} \ ,$$

$$iii) \quad f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \ .$$

b) Berechnen Sie die totale Ableitung folgender Funktionen:

$$i) \ f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \ , \quad ii) \ f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ , \quad iii) \ f(x,y,z) = e^z(x^2-y^2) \ .$$

für

$$x = R\cos\omega t \ , \quad y = R\sin\omega t \ , \quad z = t \ , \qquad R, \omega \in \mathbb{R} \ .$$