Massive lineare Multipletts in der $N = 1$ Supersymmetrie

Diplomarbeit am
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

Vorgelegt von
Waldemar Schulgin

Oktober 2004

Gutachter der Diplomarbeit:	Prof. Dr. Jan Louis
Zweitgutachter:	Jun.-Prof. Dr. Henning Samtleben

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eines der Konzepte für die Erweiterung des Standardmodells der Elementarteilchen stellt die Supersymmetrie dar. In der $N = 1$ Supersymmetrie wird die Anzahl der Elementarteilchen verdoppelt. Jedes bosonische Teilchen erhält einen supersymmetrischen Partner, ein Fermion, und umgekehrt. Mehrere Gründe sprechen dafür, daß die Supersymmetrie in Zukunft auch eine experimentelle Bestätigung finden wird (siehe etwa [1, 2]).

Einen weiteren Ansatz bietet die Stringtheorie. Sie gibt die Annahme über die punktförmige Natur der Elementarteilchen auf und beschreibt die Elementarteichen als Schwingungsmoden von eindimensionalen Objekten, sogenannten Strings. Steckt man dieses Konzept in die Maschinerie der Quantenphysik hinein, so stellt man fest, daß eine konsistente Theorie nur in zehn Dimensionen existieren kann [3]. Konsistente Stringtheorien verlangen das Konzept der Supersymmetrie.

Um aus der zehndimensionalen Theorie das Standardmodell oder zumindest ein Modell in vier Dimensionen, das zum Standardmodell führen kann, zu reproduzieren, reduziert man mit dem Kaluza-Klein-Mechanismus die Anzahl der Dimensionen auf vier. Das heißt, man nimmt an, daß die zehndimensionale Mannigfaltigkeit ein Produkt aus dem Minkowskiraum und einer kompakten sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit ist. Die Klasse der letzteren, die dem Formalismus der Stringtheorie genügen, ist sehr groß. Verschiedene solche Mannigfaltigkeiten führen zu unterschiedlichen phänomenologischen Modellen in vier Dimensionen. Mannigfaltigkeiten, die die minimale Supersymmetrie erhalten, sind Calabi–Yau-Mannigfaltigkeiten.

Eines der Modelle, das diese Arbeit motiviert hat, ist die Kompaktifizierung der Type IIB Stringtheorie[1] auf den Calabi–Yau-Orientifolds [4]. Ein Orientifold läßt sich aus einer Calabi–Yau-Mannigfaltigkeit konstruieren, indem man aus ihr ein Produkt aus einer diskreten Symmetriegruppe und dem Orientierungswechsel herausdividiert (siehe etwa [5]). Bei dieser Konstruktion wird die Supersymmetrie von $N = 2$ zu $N = 1$ reduziert und bei der weiteren Einschaltung der Hintergrundflüsse wird die $N = 1$ Supersymmetrie gebrochen. Eines der $N = 2$ Supermultipletts im Spektrum der Type IIB Stringtheorie, das sogenannte "double-tensor"-Multiplett, wird in diesem Modell nach der Kaluza-Klein-Reduktion bei Anwenesheit der Hintergrundflüsse zu einem massiven $N = 1$ linearen Multiplett.[2]

Das massive lineare Multiplett im Superfeldformalismus der $N = 1$ Supersymmetrie ist in

[1] Es gibt mehrere Stringtheorien. II bedeutet, daß die Theorie zwei Supersymmetrien hat und B weist darauf hin, daß die Fermionen gleiche Chiralität haben.

[2] Man kann davon sprechen, daß das chirale Spinormultiplett, auch Tensormultiplett genannt, welches im linearen enthalten ist, massiv wird. Da wir unsere Betrachtung von dem linearen Multiplett ausgehend starten, werden wir in dieser Arbeit durchgehend vom massiven linearen Multiplett sprechen.

der Literatur wenig untersucht worden [6, 7, 8].[3] Insofern war das Ziel dieser Arbeit, das massive lineare Multiplett zu diskutieren und, motiviert durch [10, 4], seine niederenergetische effektive Wirkung zu bestimmen.

Bei der $N = 1$ Supersymmetrie enthält das chirale Spinormultiplett[4] einen antisymmetrischen Tensor. Das lineare Multiplett ist das Feldstärke-Multiplett vom chiralen Spinormultiplett. Für den Fall des masselosen antisymmetrischen Tensors wird seine supersymmetrische Wirkung in Termen von L wiedergegeben und ist bekannt [11, 7, 8, 12, 6, 13, 14]. Im massiven Fall ist die Situation anders. Das chirale Superfeld Φ_α tritt in der Wirkung explizit auf. Um dabei die Eichinvarianz zu erhalten, muß Φ_α an mindestens ein Vektormultiplett V gekoppelt werden. In dieser Arbeit leiten wir die supersymmetrische Wirkung für den an n_V Vektormultipletts gekoppelten massiven antisymmetrischen Tensor her. Zusätzlich erlauben wir, motiviert durch [4], daß die Massenkopplungen von n_c chiralen Multipletts N^i, $i = 1, \ldots, n_c$, abhängen.

Ein anderes Modell, welches nach der Kaluza-Klein-Reduktion zum massiven antisymmetrischen Tensor im Spektrum führt, ist die Kompaktifizierung auf den Calabi–Yau-Threefolds mit Hintergrundflüssen mit $N = 2$ Supersymmetrie [10]. Darin wird auf der Ebene der Komponentenfelder gezeigt, daß der massive antisymmetrische Tensor zum massiven Vektorfeld dual ist. In dieser Arbeit führen wir diese Dualitätstransformation für $N = 1$ auf der Ebene der Superfelder durch und zeigen, daß unser Ergebnis in Komponenten mit dem aus [10] übereinstimmt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in folgender Weise: In Abschnitt 2 geben wir einen Überblick über die globale Supersymmetrie und stellen die notwendigen Grundlagen zum Verständnis dieser Arbeit zur Verfügung. In Abschnitt 3 diskutieren wir das chirale Spinorsuperfeld Φ_α, seine Feldstärke, das lineare Superfeld L, und ihre Eichtransformationen. Wir geben die Wirkung für das masselose lineare Multiplett an, anschließend motiviert durch [4] konstruieren wir die Wirkung für das massive lineare Multiplett mit Hilfe des Stückelbergmechanismus. Wir zeigen, daß die Wirkung den Green-Schwarz-Term enthält. Wir diskutieren das skalare Potential und zeigen, daß es nicht die $N = 1$ "Standardform" hat. In Abschnitt 4 führen wir die Dualitätstransformation sowohl im masselosen wie auch im massiven Fall auf der Ebene der Superfelder durch. Aus den erhaltenen Wirkungen berechnen wir ihren Komponenteninhalt und zeigen, daß das masselose lineare zum chiralen Multiplett und das massive lineare zum massiven Vektormultiplett dual ist. Anschließend vergleichen wir die Potentiale und stellen fest, daß sie die gleiche Form haben, wie vor der Dualitätstransformation.

Anhang A enthält eine Zusammenfassung unserer Notation und einige für die Rechnungen im Superfeldformalismus nützliche Identitäten. In Anhang B geben wir die Herleitung des allgemeinen chiralen Spinorsuperfeldes an und zeigen seinen Zusammenhang mit dem linearen Superfeld auf der Komponentenebene. Anhänge C und E enthalten detailierte Rechnungen für die Komponentenform der in dieser Arbeit auftretenden Superfeldwirkungen. In Anhang D geben wir einen Überblick über die Dualitätstransformationen im "first order"-Formalismus und zeigen, wie die Dualitätstransformation im Falle des massiven linearen Multipletts auf der Ebene der Komponentenfelder stattfindet. Anhang F enthält die Erklärung des Stückelbergmechanismus im Falle eines massiven Vektorfeldes.

[3] Während der Abschlussphase dieser Diplomarbeit erschien die Arbeit [9], die das gleiche Thema behandelt.
[4] Dieser Begriff wird in Abschnitt 3 erklärt.

Kapitel 2

Grundlagen der globalen Supersymmetrie

2.1 Motivation der SUSY-Algebra

Symmetrien spielen in der Teilchenphysik eine besonders wichtige Rolle. Eine der fundamentalsten Symmetrien ist die Symmetrie der Poincaré-Gruppe, d.h. Rotationen und Translationen im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Außer dieser fundamentalen gibt es eine Reihe anderer sogenannter innerer Symmetrien. Eine systematische Suche nach solchen Symmetrien hat zur Entwicklung der nichtabelschen Eichtheorien geführt, dessen Vorhersagen eine hervorragende experimentelle Bestätigung erhalten haben.

Eine der entscheidendsten Denkanstöße für die Entdeckung der Supersymmetrie war der Versuch die Raum-Zeit-Symmetrie der Poincaré-Gruppe mit der Symmetrie einer inneren Gruppe zu verbinden. Coleman und Mandula haben gezeigt [15], daß, wenn man solche Forderungen wie Lokalität, Positivität der Energie, endliche Teilchenanzahl und Energiespalte (energy gap) zwischen dem Vakuum- und Einteilchenzuständen stellt, die Invarianzgruppe der Theorie höchstens ein direktes Produkt der Poincaré- und einer kompakten (inneren) Gruppe sein kann, was keine echte Verallgemeinerung der Poincaré-Symmetrie darstellt.

In der Arbeit von Haag, Lopuszanski und Sohnius wurde gezeigt [16], daß die Einschränkungen des Theorems von Coleman und Mandula umgangen werden können, erlaubt man neben Kommutatoren auch Antikommutatoren. Die SUSY-Algebra (Supersymmetrie-Algebra) ist die einzige gradierte Lie-Algebra von S-Matrix-Symmetrien ist, die man im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie haben kann.

Die SUSY-Algebra [17, 1] ist

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\}_+ &= 2\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} P_m \delta^A{}_B \ , \\
\{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\}_+ &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\}_+ = 0 \ , \\
[M_{mn}, Q_\alpha{}^A]_- &= \frac{1}{2}(\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta Q_\beta{}^A \ , \\
[M_{mn}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}{}^A]_- &= -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}{}^A(\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \ , \\
[P_m, Q_\alpha{}^A]_- &= [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}]_- = 0 \ , \\
[P_m, P_n]_- &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

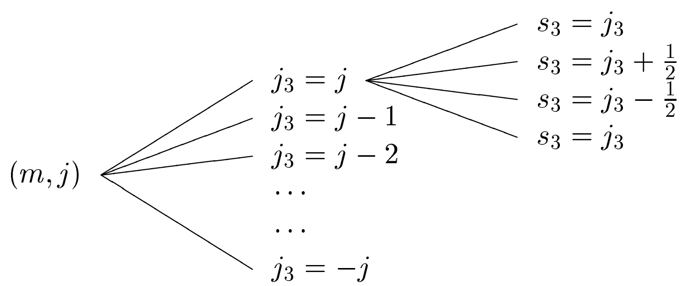
Die griechischen Indizes $(\alpha, \beta, \ldots, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots)$ nehmen die Werte eins und zwei an und entsprechen den zweikomponentigen Weylspinoren. Lateinische Indizes $(m, n, \ldots)$ nehmen die Werte von null bis drei an und entsprechen den Vierer-Lorentzvektoren. Die lateinischen Indizes $(A, B, \ldots)$ nehmen die Werte von eins bis zu einem Wert $N \geq 1$ an. In dieser Arbeit wird nur der Fall $N = 1$ untersucht, d.h. wir haben nur ein Paar von Generatoren der SUSY-Transformationen $(Q, \bar{Q})$. P_m sind die Generatoren der Translationen der Poincaré-Gruppe und M_{mn} sind die Generatoren der Lorentzgruppe.

2.2 Irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra

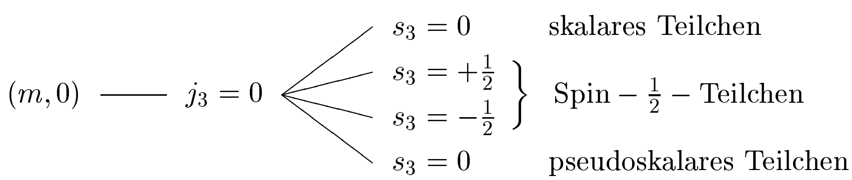
Die irreduziblen Darstellungen[1] der SUSY-Algebra werden nach den Eigenwerten der Casimir-operatoren[2] klassifiziert. Sie lauten im Fall der SUSY-Algebra

$$\begin{aligned} P^2 &= P_m P^m \qquad \text{und} \qquad C^2 = C_{mn} C^{mn} \ , \\ \text{mit} \quad C^{mn} &= Y^m P^n - Y^n P^m, \quad Y^m = \frac{1}{2} g^{mk} \epsilon_{knpq} P^n M^{pq} - \frac{1}{4} Q \sigma^m \bar{Q} \ . \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Für jedes Paar (m, j), wobei m^2 und $j(j+1)$ Eigenwerte von P^2 und C^2 sind, erhalten wir eine irreduzible Darstellung der SUSY-Algebra. Zu allen Zuständen mit festen Werten (m, j) gehören $(2j+1)$ Unterräume, die den verschiedenen Werten von j_3 entsprechen. j_3 nimmt dabei Werte j, $j-1$, $j-2$, $\ldots$, $-j$. Jeder Unterraum zu einem fixierten j_3 enthält Eigenzustände des Spinoperators S_3 mit Eigenwerten $s_3 = j_3$, $j_3 + \frac{1}{2}$, $j_3 - \frac{1}{2}$ und wieder j_3. Diese Struktur läßt sich mit Hilfe des folgenden Diagramms veranschaulichen.



Wir geben zwei Beispiele an. Die Darstellung mit der kleinsten Dimension (kleinsten Anzahl der Zustände) ist gegeben für $j = 0$. Dieses Multiplett enthält einen Skalar $(s = 0)$, ein Fermion $(s = \pm\frac{1}{2})$ und einen Pseudoskalar (s=0).



Diese Darstellung wird als chirales Multiplett bezeichnet. Es beschreibt Materiefelder. Das zweite Beispiel ist die Darstellung für $j = \frac{1}{2}$. An der folgenden Skizze sieht man die Aufteilung

[1] Im Folgenden verwenden wir auch hier äquivalenten Ausdruck Teilchenmultipletts

[2] Unter einem Casimiroperator einer Gruppe versteht man einen Operator, der mit allen Generatoren der Gruppe vertauscht.

der Zustände.

$$
(m,\tfrac{1}{2})\;
\begin{cases}
j_3 = -\frac{1}{2} & \begin{cases} s_3 = \frac{1}{2} & \text{Fermion} \\ s_3 = 1 & \text{Boson} \\ s_3 = 0 & \text{Boson} \\ s_3 = \frac{1}{2} & \text{Fermion} \end{cases} \\[2ex]
j_3 = +\frac{1}{2} & \begin{cases} s_3 = -\frac{1}{2} & \text{Fermion} \\ s_3 = 0 & \text{Boson} \\ s_3 = -1 & \text{Boson} \\ s_3 = -\frac{1}{2} & \text{Fermion} \end{cases}
\end{cases}
$$

Diese Darstellung wird als Vektormultiplett bezeichnet und wird zur Beschreibung der Eichbosonen und ihrer Superpartner herangezogen. Diese Darstellung enthält zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, ein Vektorteilchen (Spin 1) und ein pseudoskalares Teilchen (Spin 0).

2.3 Superfeld-Darstellungen der SUSY-Algebra

Die SUSY-Algebra wird vom Translationsoperator P_m und den SUSY-Generatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ erzeugt. Ein Element der korrespondierenden Gruppe ist

$$G(x^m,\theta,\bar\theta) = \exp\Big(i(\theta Q + \bar\theta\bar Q - x^m P_m)\Big)\ , \tag{2.3.1}$$

wobei θ_α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$ grassmannwertige Spinorparameter sind.

Das Produkt zweier Gruppenelemente induziert eine Translation im $(x^m,\theta,\bar\theta)$-Parameterraum. Mit der Hausdorff-Formel[3] findet man

$$G(a^m,\xi,\bar\xi)G(x^m,\theta,\bar\theta) = G(x^m + a^m - i\xi\sigma^m\bar\theta + i\theta\sigma^m\bar\xi, \theta+\xi, \bar\theta+\bar\xi)\ . \tag{2.3.2}$$

Die induzierte Translation im Parameterraum ist damit

$$\exp\Big(i(\xi Q + \bar\xi\bar Q - a^m P_m)\Big) : (x^m,\theta,\bar\theta) \to (x^m + a^m - i\xi\sigma^m\bar\theta + i\theta\sigma^m\bar\xi, \theta+\xi, \bar\theta+\bar\xi)\ . \tag{2.3.3}$$

Wir nehmen eine allgemeine Funktion $S(x,\theta,\bar\theta)$, welche auf dem Parameterraum definiert ist (im Folgenden nennen wir solche Funktionen Superfelder) und entwickeln sie nach der Anwendung des Gruppenelementes um die Stelle $(x,\theta,\bar\theta)$:

$$\begin{aligned} F(x^m + a^m - i\xi\sigma^m\bar\theta + i\theta\sigma^m\bar\xi, \theta+\xi, \bar\theta+\bar\xi) =& F(x^m,\theta,\bar\theta) + (a^m - i\xi\sigma^m\bar\theta + i\theta\sigma^m\bar\xi)\frac{\partial S}{\partial x^m} \\ &+ \xi^\alpha\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} + \bar\xi_{\dot\alpha}\frac{\partial S}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} + \dots\ . \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Man sieht, daß die Wirkung der SUSY-Algebra auf die Superfelder

$$S(x^m,\theta,\bar\theta) \to \exp\Big(i(\xi\hat Q + \bar\xi\hat{\bar Q} - a^m P_m)\Big)S(x^m,\theta\bar\theta) \tag{2.3.5}$$

durch folgende Differentialoperatoren erzeugt wird

$$P_m = i\partial_m\ , \qquad i\hat Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_m\ , \qquad i\hat{\bar Q}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\ . \tag{2.3.6}$$

[3] $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

Man kann zeigen, daß die Differentialoperatoren $P_m, \hat{Q}_\alpha, \hat{\bar{Q}}_{\dot\alpha}$ der SUSY-Algebra genügen. Da wir den Konventionen von [17] folgen wollen, definieren wir die Differentialoperatoren als

$$Q_\alpha = i\hat{Q}_\alpha \ , \qquad \bar{Q}_{\dot\alpha} = -i\hat{\bar{Q}}_{\dot\alpha} \ . \tag{2.3.7}$$

Kovariante Ableitungen $\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$,[4] die mit den SUSY-Generatoren antikommutieren, lassen sich definieren als

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_m \ , \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \ . \tag{2.3.8}$$

Man rechnet nach, daß

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\} &= -2i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \ , \\ \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} &= \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Ein allgemeines Superfeld $F(x^m, \theta, \bar\theta)$ kann in eine Reihe nach θ und $\bar\theta$ entwickelt werden. Die Reihe ist endlich, da höhere Potenzen als zwei für die zweikomponentigen Grassmanvariablen θ und $\bar\theta$ verschwinden. Die Koeffizienten verschiedener Potenzen von den Grassmannparametern in einer solchen Entwicklung sind gewöhnliche Funktionen (Funktionen von x).

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar\theta) =& f(x) + \theta\phi(x) + \bar\theta\bar\xi(x) + \theta\theta m(x) + \bar\theta\bar\theta n(x) \\ &+ \theta\sigma^m\bar\theta v_m(x) + \theta\theta\bar\theta\lambda(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\psi(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta d(x) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Damit stellt das Superfeld eine Darstellung der SUSY-Algebra, allerdings eine reduzible. Um eine irreduzible Darstellung zu erhalten werden den Superfeldern bestimmte kovariante Constraints auferlegt.

2.4 Chirale Superfelder

Das chirale Superfeld[5] ist durch folgende kovariante Bedingung definiert

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Phi = 0 \ . \tag{2.4.1}$$

Um diesen Constraint zu lösen, geht man zu neuen Koordinaten

$$\theta'_\alpha = \theta_\alpha \ , \quad \bar\theta'_{\dot\alpha} = \bar\theta_{\dot\alpha} \ , \quad y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar\theta \tag{2.4.2}$$

über, wobei die gestrichenen θ'- und $\bar\theta'$-Parameter mit den nichtgestrichenen Parametern übereinstimmen. Wir haben die gestrichenen Parameter eingeführt, um die Koordinatentransformation deutlicher zu machen. Wegen

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\theta_\alpha = 0 \ , \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}y^m = 0 \tag{2.4.3}$$

ist jede Funktion, die nur von θ und y^m abhängt, eine Lösung von (2.4.1). Rechnet man die kovarianten Ableitungen (2.3.8) in die gestrichenen Koordinaten (2.4.2) um, so erhält man

$$\mathcal{D}_\alpha(y,\theta',\bar\theta') = \frac{\partial}{\partial\theta'^\alpha} + 2i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta'^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^m} \ , \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}(y,\theta',\bar\theta') = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta'^{\dot\alpha}} \ . \tag{2.4.4}$$

[4] In dieser Arbeit verwenden wir ein kalligrafisches $\mathcal{D}$ zur Kennzeichnung von kovarinaten Ableitungen.
[5] Das auf diese Weise definierte Multiplett gibt in Abschnitt 2.2 angegebene Darstellung für $j = 0$ wieder.

In den Koordinaten (2.4.2) lautet (2.4.1)

$$\bar{\mathcal{D}}'_{\dot\alpha}\Phi(y,\theta,\bar\theta) = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta'^{\alpha}}\Phi(y,\theta',\bar\theta')\ . \tag{2.4.5}$$

Man sieht, daß das Superfeld Φ von dem Parameter $\bar\theta'$ nicht explizit abhängen darf. Die Entwicklung von Φ nur in θ' ist damit die allgemeinste Lösung von (2.4.1). Sie lautet

$$\Phi(y^m,\theta') = A(y) + \sqrt{2}\theta'\psi(y) + \theta'\theta' F(y)\ , \tag{2.4.6}$$

wobei A, F komplexe skalare Felder sind und ψ ein Weylspinor ist. Setzt man die ursprünglichen Koordinaten $\{x,\theta,\bar\theta\}$ ein und entwickelt die Felder A, ψ, F um x, so erhält man die θ-Entwicklung des chiralen Superfeldes Φ in den Koordinaten $\{x,\theta,\bar\theta\}$:

$$\begin{aligned}\Phi(x^m,\theta,\bar\theta) =& A(x) + i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A(x)\\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar\theta + \theta\theta F\ .\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Analog läßt sich das antichirale Superfeld einführen. Es ist durch den folgenden Constraint definiert

$$\mathcal{D}_\alpha\bar\Phi = 0\ . \tag{2.4.8}$$

Um diesen Constraint (2.4.8) zu lösen geht man genauso vor wie im Falle des chiralen Superfeldes. Man geht in ein Koordinatensystem, in dem die explizite Abhängigkeit von einem der Grassmann-Parameter, in diesem Fall θ nicht vorhanden ist. Solche Koordinaten sind

$$\theta'_\alpha\ ,\quad \bar\theta'_{\dot\alpha}\ ,\quad \bar y^m = x^m - i\theta\sigma^m\bar\theta\ . \tag{2.4.9}$$

Die kovarianten Ableitungen lauten in diesen Koordinaten (2.4.9):

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\ ,\qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta'_{\dot\alpha}} - 2i\theta'^{\alpha}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar y^m}\ . \tag{2.4.10}$$

Die $\bar\theta'$-Entwicklung von $\bar\Phi$ ist

$$\begin{aligned}\bar\Phi =& A^*(\bar y) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(\bar y) + \bar\theta\bar\theta F^*(\bar y)\\ =& A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A^*(x)\\ &+ \sqrt{2}\bar\psi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar\psi(x) + \bar\theta\bar\theta F^*(x)\ .\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Als nächstes geben wir die allgemeinstmögliche renormierbare Lagrangedichte an, die sich aus chiralen Superfeldern zusammensetzt. Sie lautet

$$\mathcal{L} = \bar\Phi_i\Phi_i|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \left(\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \lambda_i\Phi_i\right)|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right)\ . \tag{2.4.12}$$

Mit $|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}$ und $|_\theta$ ist gemeint, daß die vor $\theta\theta$ bzw. $\theta\theta\bar\theta\bar\theta$ stehenden Vorfaktoren herausprojiziert werden. Es ist üblich die $\theta\theta$-Feldkomponente des Superfeldes als F-Term und die $\theta\theta\bar\theta\bar\theta$-Feldkomponente als D-Term zu bezeichnen. Im Folgenden halten wir uns an diese Konvention. Die θ-Projektionen lassen sich auch mit Hilfe der Superraumintegrale darstellen. Die Definition des Superraumintegrals ist in Anhang A.3 gegeben. In dieser Schreibweise lautet der Ausdruck (2.4.12)

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\bar{\Phi}_i\Phi_i + \left(\int d^2\theta\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \lambda_i\Phi_i\right) + \text{h.c.}\right) \ . \tag{2.4.13}$$

Wir wollen die Motivation für das Aufstellen von (2.4.12) kurz erläutern. Dafür betrachten wir zuerst den Teil von (2.4.12), der sich auschliesslich aus den Superfeldern Φ_i zusammensetzt und anschließend den Term $\bar{\Phi}_i\Phi_i$.

Das Produkt von chiralen Feldern Φ_i ist wieder chiral. Man weiß, daß die Komponente mit der höchsten Massendimension von den chiralen Feldern sich bei der SUSY-Transformation stets in eine totale Ableitung transformiert. Dies ist der Grund, warum man den F-Term herausprojiziert.

Das Produkt $\bar{\Phi}_i\Phi_i$ ist zwar nicht chiral, man stellt jedoch fest, daß der D-Term sich bei der SUSY-Transformation in die totale Ableitung transformiert. Außerdem ist sowohl Φ_i wie auch ihr Produkt invariant unter der Lorentztransformation.

Setzt man die θ-Entwicklung der Superfelder (2.4.1) und (2.4.8) in die Lagrangedichte (2.4.12) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i + A_i^*\Box A_i + F_i^*F_i + \Big(m_{ij}\big(A_iF_j - \tfrac{1}{2}\psi_i\psi_j\big) \\ &+ g_{ijk}(A_iA_jF_k - \psi_i\psi_jA_k) + \lambda_iF_i + \text{h.c.}\Big) \ .\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Alle Felder sind Funktionen nur von x^m. Die Hilfsfelder F_i können mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_k^*} =& F_k + \lambda_k^* + m_{ik}^* + g_{ikj}^*A_i^*A_j^* = 0 \ , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_k} =& F_k^* + \lambda_k + m_{ik} + g_{ikj}A_iA_j = 0 \ .\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Löst man sie nach F_k und F_k^* auf und setzt sie in (2.4.14) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i + A_i^*\Box A_i - \frac{1}{2}m_{ik}\psi_i\psi_k - \frac{1}{2}m_{ik}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_k \\ &- g_{ijk}\psi_i\psi_jA_k - g_{ijk}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_jA_k^* - V(A_i, A_j^*)\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

mit V gegeben durch

$$V = F_k^*F_k \ , \tag{2.4.17}$$

wobei F_k^* und F_k Lösungen der Bewegungsgleichungen (2.4.15) sind. An der Form der Ausdrucks (2.4.17) sieht man, daß das Potential stets nicht negativ ist.

2.5 Reelles Vektorfeld

Das reelle skalare Superfeld [17] genügt dem Constraint

$$V = V^* \ . \tag{2.5.1}$$

Seine Entwicklung nach den Potenzen von θ und $\bar\theta$ ist

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar\theta) =&C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar\theta\bar\chi(x) + \frac{i}{2}\theta\theta\Big(M(x)+iN(x)\Big)\\ &-\frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\Big(M(x)-iN(x)\Big) - \theta\sigma^m\bar\theta v_m(x) + i\theta\theta\bar\theta\Big(\bar\lambda(x)+\frac{i}{2}\bar\sigma^m\partial_m\chi(c)\Big)\\ &-i\bar\theta\bar\theta\theta\Big(\lambda(x)+\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar\chi(x)\Big) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Big(D(x)+\frac{1}{2}\Box C(x)\Big)\ ,\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

wobei C, D, M, N reelle skalare Felder, v_m ein reelles Vektorfeld und χ, λ Weyl-Spinoren sind. Seinen Namen verdankt das Multiplett dem darin enthaltenen Vektorfeld v_m.[6]

Die Feldstärken sind definiert als

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_\alpha V\ , \qquad \bar W_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}V\ . \tag{2.5.3}$$

W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$ sind chiral bzw. antichiral, d.h.

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}W_\alpha = 0\ , \qquad \mathcal{D}_\alpha\bar W_{\dot\alpha} = 0\ . \tag{2.5.4}$$

Wegen $\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}$ (siehe Anhang A) gilt

$$\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha V = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}V^*\ . \tag{2.5.5}$$

Hier haben wir (2.5.1) ausgenutzt. Multipliziert man (2.5.5) mit$(-\frac{1}{4})$ und setzt die Definitionen (2.5.3) ein, so erhält man

$$\mathcal{D}^\alpha W_\alpha = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha}\ . \tag{2.5.6}$$

Dies ist ein zusätzliches Constraint neben (2.5.4) an W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$, welches aus der Forderung (2.5.1) und (2.5.3) entsteht.

W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$ sind invariant unter der folgenden Transformation von V

$$V \to V + \Phi + \bar\Phi\ , \tag{2.5.7}$$

wobei Φ und $\bar\Phi$ ein chirales bzw. antichirales Feld ist. Um die Invarianz zu zeigen, setzen wir das transformierte Superfeld V in die Definition der Feldstärke (2.5.3) ein

$$W_\alpha \to -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha(V+\Phi+\bar\Phi) = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha V - \frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\Phi - \underbrace{\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\bar\Phi}_{=0} \tag{2.5.8}$$

Der letzte Term verschwindet wegen (2.4.8). Wir zeigen, daß der zweite Term auch verschwindet:

$$-\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\Phi = \frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\Phi = \underbrace{-\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Phi}_{=0} - \underbrace{\frac{i}{2}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\Phi}_{=0}\ . \tag{2.5.9}$$

Wir haben die Position der gepunkteten Indizes verschoben und anschließend (2.3.9) eingesetzt. Die beiden Terme verschwinden wegen der Chiralitätsbedingung (2.4.1).

Als nächstes zeigen wir, was die Transformation (2.5.7) für die Komponentenfelder bedeutet. Nehmen wir $\Phi + \bar\Phi$ aus (2.4.7) und (2.4.11)

$$\begin{aligned}\Phi + \Phi^+ =&A + A^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar\theta\bar\psi) + \theta\theta F + \bar\theta\bar\theta F^* + i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m(A - A^*)\\ &+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^m\partial_m\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar\psi + \frac{1}{4}\theta\theta\Box(A + A^*)\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

[6]In dieser Arbeit beschränken wir uns auf den abelschen Fall.

und addieren es zu (2.5.2), so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
V + \Phi + \bar{\Phi} = & C + A + A^* + i\theta(\chi - i\sqrt{2}\psi) - i\bar{\theta}(\bar{\chi} + i\sqrt{2}\bar{\psi}) + \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN - 2iF) \\
& - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M - iN + 2F^*) - \theta\sigma^m\bar{\theta}\big(v_m - i\partial_m(A - A^*)\big) \\
& + i\theta\theta\bar{\theta}(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}) \\
& + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\big(D + \frac{1}{2}\Box C + \frac{1}{2}\Box(A + A^*)\big) \ .
\end{aligned}
\tag{2.5.11}
$$

Die Transformationen der Komponentenfelder kann man aus (2.5.11) direkt ablesen. Sie lauten

$$
\begin{aligned}
C &\to C + 2\mathrm{Re}\, A \ , & \chi &\to \chi - i\sqrt{2}\psi \ , \\
M + iN &\to M + iN - 2iF \ , & v_m &\to v_m + 2\partial_m(\mathrm{Im}\, A) \ , \\
\lambda &\to \lambda \ , & D &\to D \ .
\end{aligned}
\tag{2.5.12}
$$

Wir haben in (2.5.8) und (2.5.9) gesehen, daß die Felder Φ und $\bar{\Phi}$ beliebig vorgegeben werden können, ohne dabei W_α und $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ zu verändern. Das heißt, wir können die Felder C, χ, M, N durch eine geeignete Eichtransformation zum Verschwinden bringen. Dies würde zwar die Gestalt von V ändern und die damit verbundenen SUSY-Transformationen zerstören, allerdings bliebe die Komponentengestalt von W_α und $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ unberührt. Eine solche Wahl von $\Phi + \bar{\Phi}$ wird als Wess-Zumino-Eichung bezeichnet. In ihr hat V folgende θ-Entwicklung

$$
V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \ . \tag{2.5.13}
$$

Man bemerke, daß die Transformation (2.5.12) von v_m der $U(1)$-Transformation für das Vektorfeld entspricht. Damit entspricht die Transformation (2.5.12) der supersymmetrischen Verallgemeinerung der Eichtransformation für das Vektorfeld v_m.

Wir zählen die Anzahl der Freiheitsgrade:

"off shell"[7] (masseloser Fall)

• ein reelles Skalarfeld D:	1 bosonischer FG (Hilfsfeld)
• ein komplexes Weyl-Spinorfeld λ:	4 fermionische FG
• ein reelles Vektorfeld v_m:	3 bosonische FG (ein FG entfällt durch die Eichtransformation (2.5.12))

Man hat damit im masselosen Fall "off shell" vier fermionische und vier bosonische Freiheitsgrade.

"on shell" (masseloser Fall)

• ein komplexes Weyl-Spinorfeld λ:	2 fermionische FG (zwei FG fallen durch die Bewegungsgleichung weg)
• ein reelles Vektorfeld v_m:	2 bosonische FG (ein FG entfällt durch die Eichtransformation (2.5.12) und ein FG fällt durch die Bewegungsgleichung weg)

[7] "off shell" bedeutet, daß es zusätzlich zu den physikalischen Feldern Hilfsfelder vorhanden sind. Die Hilfsfelder lassen sich mit Hilfe ihrer Bewegungsgleichungen eliminieren. Man bezeichnet diesen Fall als "on shell".

Da, wie man in (2.5.8), (2.5.9) bereits gesehen hat, die Feldstärke W_α von den Feldern C, M, N und χ nicht abhängt, kann man V in der Wess-Zumino-Eichung nehmen, um die θ-Entwicklung von W_α zu bestimmen. Man setzt (2.5.13) in (2.5.3) ein und erhält

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + \Big(\delta_\alpha{}^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\beta F_{mn}(y)\Big)\theta_\beta + \theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{\dot\alpha}(y)\ , \\ \bar W_{\dot\alpha} &= i\bar\lambda_{\dot\alpha}(\bar y) + \Big(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}D(\bar y) + \frac{i}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\bar\sigma^m\sigma^n)^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}F_{mn}(\bar y)\Big)\bar\theta^{\dot\beta} - \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta\sigma^{m\dot\beta\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(\bar y) \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

mit $y = x + i\theta\sigma\bar\theta$, $\bar y = x - i\theta\sigma\bar\theta$ und $F_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$. Die Superfelder W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$ enthalten nur eichinvariante Felder D, λ_α und F_{mn}.

Die Lagrangedichte für das freie masselose eichinvariante Vektorfeld [17] ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\Big(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar W_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}\Big) = \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}F^{mn}F_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar\lambda\ . \tag{2.5.15}$$

Die Motivation für das Aufstellen der Lagrangedichte (2.5.15) ist die gleiche wie im Falle des chiralen Multipletts. Als erstes fordert man die Lorentzinvarianz der Lagrangedichte. Um das zu gewährleisten, summiert man über die spinoriellen Indizes von W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$. Höhere als quadratische Terme in W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$ sind nicht zulässig, da dabei in Komponentenfeldern Terme auftreten, deren Massendimension größer vier haben und damit nicht renormierbar sind. Da es sich bei W_α und $\bar W_{\dot\alpha}$ um chirale Superfelder handelt, transformiert sich der F-Term bei den SUSY-Transformationen in eine totale Ableitung.

2.5.1 Kopplung an chirale Multipletts

Läßt man die Forderung nach der Renormierbarkeit fallen, beschränkt man sich nur auf die kleinsten Potenzen in W_α und koppelt die Vektormultipletts an Materiefelder, so läßt sich die Lagrangedichte (2.5.15) auf folgende Weise erweitern [17, 2, 7]

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB}(N)W^AW^B + \text{h.c.} \tag{2.5.16}$$

Die Lagrangedichte enthält jetzt n_V Vektormultipletts. Der Index A nimmt Werte von 1 bis n_V an. Wir haben hier eine Kopplungsmatrix f_{AB} eingeführt, die von n_c chiralen Feldern N^i abhängt. Der Index i nimmt Werte von 1 bis n_c.

Man kann zeigen, daß f_{AB} symmetrisch sein muß. Es gilt nämlich

$$f_{AB}W^{A\gamma}W^B_\gamma = -f_{AB}W^B_\gamma W^{A\gamma} = f_{AB}W^{B\gamma}W^A_\gamma = f_{BA}W^{A\gamma}W^B_\gamma\ . \tag{2.5.17}$$

Im ersten Schritt haben wir die Positionen von $W^{A\gamma}$ und W^B_γ vertauscht, anschließend haben wir die Indizes hoch- und hinuntergezogen und eine Umbenennung der Indizes $A \to B$, $B \to A$ vorgenommen.

Um den Komponenteninhalt von (2.5.16) zu bestimmen benötigen wir folgende θ-Entwicklungen [17]

$$\begin{aligned} N^i &= A^i + \sqrt{2}\theta\chi^i + \theta\theta F^i\ , \\ f_{AB}(N) &= f_{AB}(A) + \sqrt{2}\theta\chi^i\partial_i f_{AB} + \theta\theta\big(F^i\partial_i f_{AB} - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\big)\ , && (2.5.18) \\ W^A_\alpha &= -i\lambda^A_\alpha + \Big(\delta_\alpha{}^\beta D^A - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\beta F^A_{mn}\Big)\theta_\beta + \theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{A\dot\alpha}\ . && (2.5.19) \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen von (2.5.18) in (2.5.16) erhalten wir in Komponenten (für Details siehe Anhang C)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{kin}} =& -\frac{1}{4}\text{Re} f_{AB} F^A_{mn} F^{B\,mn} + \frac{1}{8}\text{Im} f_{AB} \epsilon^{mnpr} F^A_{mn} F^B_{pr} + \frac{1}{2}\text{Re} f_{AB} D^A D^B \\
& - \frac{i}{2}\, f_{AB} \lambda^A \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}^B - \frac{i}{2}\, f^*_{AB} \bar{\lambda}^A \bar{\sigma}^m \partial_m \lambda^B \\
& + \frac{i}{2\sqrt{2}}\, \partial_i f_{AB} D^A \chi^i \lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\, \partial_{i^*} f^*_{AB} D^A \bar{\chi}^i \bar{\lambda}^B \\
& - \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \partial_i f_{AB} F^A_{mn} \chi^i \sigma^{mn} \lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \partial_{i^*} f^*_{AB} F^A_{mn} \bar{\chi}^i \bar{\sigma}^{mn} \bar{\lambda}^B \\
& - \frac{1}{4} F^i \partial_i f_{AB} \lambda^A \lambda^B - \frac{1}{4} F^{*i} \partial_{i*} f^*_{AB} \bar{\lambda}^A \bar{\lambda}^B \\
& + \frac{1}{8} \chi^i \chi^j \partial_i \partial_j f_{AB} \lambda^A \lambda^B + \frac{1}{8} \bar{\chi}^i \bar{\chi}^j \partial_{i*} \partial_{j*} f_{AB} \bar{\lambda}^A \bar{\lambda}^B \ .
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Die Lagrangedichte enthält Hilfsfelder D^A und F^i. Die ersten lassen sich mit Hilfe ihrer Bewegungsgleichungen eliminieren,

$$D^B = -\text{Re}\, f^{-1\,AB} \left(\frac{i}{2\sqrt{2}}\, \partial_i f_{AC} \chi^i \lambda^C - \frac{i}{2\sqrt{2}}\, \partial_{i^*} f^*_{AC} \bar{\chi}^i \bar{\lambda}^C \right) \ . \tag{2.5.21}$$

Die Gesamtlagrangedichte für die chiralen Superfelder N^i und Vektormultipletts V^A enthält kinetische Terme für N^i, die wir hier nicht vorgestellt haben. Aus diesem Grund werden wir die Bewegungsgleichungen für die Hilfsfelder F^i nicht angeben.

2.5.2 Massives Vektormultiplett

Man kann immer einen Masseterm $m^2 V^2$ zu (2.5.15) dazuaddieren.[8] Dieser Term ist allerdings nicht eininvariant. Um ihn eichinvariant zu machen, verwenden wir den Stückelbergmechanismus [18, 19, 20].[9] Wir spalten von V die Freiheitsgrade ab, die es im massiven Fall bekommt

$$V = V' + \Phi + \bar{\Phi} \ , \tag{2.5.22}$$

wobei Φ chiral ist $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0$. V ist eichinvariant solange V' und Φ sich auf folgende Weise transformieren

$$V' \to V' + \Sigma + \bar{\Sigma} \ , \qquad \Phi \to \Phi - \Sigma \tag{2.5.23}$$

mit einem chiralen Superfeld Σ ($\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Sigma = 0$). Der massive Term der Lagrangedichte wird zu

$$\mathcal{L}_{\text{m}} = m^2 (V + \Phi + \bar{\Phi})^2 \ , \tag{2.5.24}$$

wobei wir ab sofort den Strich weglassen. Setzen wir die θ-Entwicklung (2.5.11) von $V + \Phi + \bar{\Phi}$ in (2.5.24) ein, so erhalten wir in Komponenten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{m}} =& m^2 \Big(-\frac{1}{2} \big(v_m + 2\partial_m (\text{Im}\, A)\big) \big(v^m + 2\partial^m (\text{Im}\, A)\big) + 2FF^* + 2D \text{Re}\, A \\
& + i\sqrt{2} (\chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda}) - i(\chi \sigma^m \partial_m \bar{\chi} + \bar{\chi} \bar{\sigma} \partial_m \chi) - \partial_m (\text{Re}\, A) \partial^m (\text{Re}\, A) \Big) \ .
\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

---

[8] Wir beschränken uns auf ein Vektorfeld, da nur dieser Fall für spätere Betrachtung relevant ist.

[9] Bei der Referenz [19] handelt es sich um einen Übersichtsartikel. Eine detailierte Erklärung des Mechanismus findet man in Anhang F.

Hier ist anzumerken, daß χ_α und λ_α Komponenten eines Diracspinors $\Psi = \binom{i\sqrt{2}m\chi}{\lambda}$ sind. Der Masseterm in (2.5.25) läßt sich damit schreiben als

$$i\sqrt{2}m^2(\chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda}) = m\bar{\Psi}\Psi \ . \tag{2.5.26}$$

Verallgemeinert man den Masseterm (2.5.24) zu

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = U(V + \Phi + \bar{\Phi}) \ , \tag{2.5.27}$$

wobei U eine allgemeine reelle Funktion von $(V + \Phi + \bar{\Phi})$ ist, so erhält man in Komponenten (für Details siehe Anhang E)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{m}} =& \frac{1}{2}U'D + \frac{1}{2}U''\Big(2FF^* - \frac{1}{2}\big(v_m + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,A)\big)\big(v^m + 2\partial^m(\mathrm{Im}\,A)\big) \\ &+ i\sqrt{2}(\chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda}) - i(\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + \bar{\chi}\bar{\sigma}\partial_m\chi) - \partial_m(\mathrm{Re}A)\partial^m(\mathrm{Re}A)\Big) \\ &+ \frac{1}{2}U'''\Big(- F^*\chi\chi - F\bar{\chi}\bar{\chi} + \bar{\chi}\bar{\sigma}^m\chi(v_m + 2\partial_m(\mathrm{Im}A)\Big) + \frac{1}{4}U''''\chi\chi\bar{\chi}\bar{\chi}\end{aligned} \tag{2.5.28}$$

mit $U' = \partial_{\mathrm{Re}\,A}U$, $U'' = \partial^2_{\mathrm{Re}\,A}U$ etc. Das skalare Feld $\mathrm{Im}\,A$ spielt die Rolle eines Goldstonebosons und kann durch eine geeignete Eichtransformation (2.5.23) (unitäre Eichung) in das v_m absorbiert werden.

Eliminiert man das Hilfsfeld F mit Hilfe seiner Bewegungsgleichung

$$F = \frac{1}{2}\frac{U'''}{U''}\bar{\chi}\bar{\chi} \ , \tag{2.5.29}$$

so erhält man in der unitären Eichung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{m}} =& -\frac{1}{2}U''\Big(\frac{1}{2}(v_m v^m - i\sqrt{2}(\chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda}) + i(\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + \bar{\chi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi) + \partial_m(\mathrm{Re}A)\partial^m(\mathrm{Re}A)\Big) \\ &+ \frac{1}{2}U'D + \frac{1}{2}U'''\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\chi v_m + \frac{1}{4}\left(U'''' - \frac{U'''}{U''}\right)\chi\chi\bar{\chi}\bar{\chi} \ .\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

2.5.3 Freiheitsgrade des massiven Vektormultipletts

Wir zählen jetzt die Freiheitsgrade im massiven Fall:

"off shell" (massiver Fall):

• ein reelles Skalarfeld $\mathrm{Re}\,A$:	1 bosonischer FG
• ein reelles Skalarfeld D:	1 bosonischer FG (Hilfsfeld)
• ein komplexes Skalarfeld F:	2 bosonische FG (Hilfsfeld)
• ein komplexes Weyl-Spinorfeld λ:	4 fermionische FG
• ein komplexes Weyl-Spinorfeld χ:	4 fermionische FG
• ein reelles Vektorfeld v_m:	4 bosonische FG (1 zusätzlicher FG gegenüber dem masselosen Fall stammt vom absorbierten reellen Skalarfeld $\mathrm{Im}\,A$)

Man hat damit im massiven Fall acht fermionische und acht bosonische Freiheitsgrade "off shell".

"on shell" (massiver Fall):

- ein komplexes Weyl-Spinorfeld λ: 2 fermionische FG
  (zwei FG fallen durch die Bewegungsgleichung weg)
- ein komplexes Weyl-Spinorfeld χ: 2 fermionische FG
  (zwei FG fallen durch die Bewegungsgleichung weg)
- ein reelles Vektorfeld v_m: 3 bosonische FG
  (ein FG entfällt durch die Bewegungsgleichung)
- ein reelles Skalarfeld $\mathrm{Re}\, A$: 1 bosonischer FG

"on shell" hat man damit im massiven Fall vier bosonische und vier fermionische Freiheitsgrade.

Kapitel 3

Das lineare Multiplett

3.1 Das lineare Multiplett

Das lineare Superfeld L [7, 8] ist definiert durch zwei folgende Constraints

$$\mathcal{D}^2 L = \bar{\mathcal{D}}^2 L = 0 \ , \tag{3.1.1}$$

wobei L ein reelles Superfeld und $\mathcal{D}_\alpha$ eine kovariante Ableitung (2.3.8) ist. Wendet man die beiden Constraints auf ein allgemeines reelles Superfeld der Form

$$\begin{aligned} L(x,\theta,\bar\theta) =& C(x) + \theta\eta(x) + \bar\theta\bar\eta(x) + \theta\theta M(x) + \bar\theta\bar\theta M^*(x) \\ &+ \theta\sigma^m\bar\theta v_m(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

an, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 L =& -4M + \bar\theta\left(-4\bar\lambda - 2i\bar\sigma^m\partial_m\eta\right) + \bar\theta\bar\theta\left(-4D - \Box C + 2i\partial^m v_m\right) \\ &+ \theta\sigma^m\bar\theta\, 4i\partial_m M + \bar\theta\bar\theta\theta\left(-2i\sigma^m\partial_m\bar\lambda - \Box\eta\right) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta(-\Box M) = 0 \ , \\ \bar{\mathcal{D}}^2 L =& -4M^* + \theta\left(-4\lambda - 2i\sigma^m\partial_m\bar\eta\right) + \theta\theta\left(-4D - \Box C - 2i\partial^m v_m\right) \\ &+ \theta\sigma^m\bar\theta\left(-4i\partial_m M^*\right) + \theta\theta\bar\theta\left(-2i\bar\sigma^m\partial_m\lambda - \Box\bar\eta\right) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta(-\Box M^*) = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Dies führt zu folgenden Constraints an die Komponentenfelder

$$\begin{aligned} M &= 0 \ , \qquad & D &= -\frac{1}{4}\Box C \ , \\ \partial^m v_m &= 0 \ , \qquad & \lambda &= -\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar\eta \ . \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Wir setzen die Constraints in (3.1.2) und erhalten folgende θ-Entwicklung

$$L = C + \theta\eta + \bar\theta\bar\eta + \theta\sigma^m\bar\theta v_m - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^m\partial_m\eta - \frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar\eta - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box C$$

mit einer zusätzlichen Bedingung $\partial^m v_m = 0$. Wegen dieser Bedingung läßt sich v_m schreiben als

$$v_m = \frac{1}{2}\epsilon_{mnpq}H^{npq} \tag{3.1.5}$$

mit

$$H^{npq} = \frac{1}{6}\left(\partial^n B^{pq} + \partial^p B^{qn} + \partial^q B^{np} - \partial^n B^{qp} - \partial^q B^{pn} - \partial^p B^{nq}\right) = \partial^{[n}B^{pq]} \ . \tag{3.1.6}$$

B^{pq} ist ein reeller antisymmetrische Tensor[1] und H^{npq} seine Feldstärke. Das lineare Superfeld hat somit die Form

$$L = C + \theta\eta + \bar{\theta}\bar{\eta} + \frac{1}{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}\epsilon_{mnpq}H^{npq} - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C \ . \tag{3.1.7}$$

Aus (3.1.6) kann man gleich die Transformationen von B_{pq} ablesen, die H_{npq} unverändert lassen. Solche Eichtransformationen sind gegeben durch

$$B_{pq} \to B_{pq} + \partial_p\Lambda_q - \partial_q\Lambda_p \ , \tag{3.1.8}$$

wobei Λ_p ein beliebiges reelles Vektorfeld ist. Bei (3.1.8) handelt es sich um eine reduzible Eichtransformation [21]. Das bedeutet, es gibt $\Lambda_n \neq 0$, für die

$$\delta B_{pq} = 0 \ . \tag{3.1.9}$$

Wählen wir nämlich $\Lambda_p = \partial_p g$ mit einem skalaren Feld g, so erhalten wir

$$\delta B_{pq} = \partial_p\partial_q g - \partial_q\partial_p g = 0 \ . \tag{3.1.10}$$

Für die Bestimmung der Freiheitsgrade des transformierenden Feldes, in unserem Fall B_{pq}, ist es entscheidend, ob eine Eichtransformation reduzibel oder irreduzibel ist. Der antisymmetrische Tensor B_{pq} hat sechs unabhängige Komponenten. Das Vektorfeld Λ_p hat vier, allerdings sind wegen der Reduzibilität nur drei unabhängig. Somit besitzt B_{pq} drei physikalische Freiheitsgrade "off shell".

Das lineare Multiplett hat damit folgende Freiheitsgrade:

- ein reelles Skalarfeld C 1 FG
- ein komplexes Weyl-Spinorfeld η 4 FG
- ein reeller antisymmetrischer Tensor B^{pq} 3 FG

Insgesamt also 8 Freiheitsgrade, davon sind vier bosonisch und vier fermionisch.

Der antisymmetrische Tensor B_{pq} ist im linearen Multiplett nicht direkt sondern über seine Feldstärke H^{npq} enthalten. Direkt ist er in dem chiralen Spinormultiplett [13, 6] enthalten, welches durch

$$L = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^\alpha\Phi_\alpha + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}}), \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\Phi_\alpha = 0 \tag{3.1.11}$$

definiert ist. Diese Beziehung ist der Definition (3.1.1) äquivalent [13]. Um dies zu zeigen, setzen wir (3.1.11) in (3.1.1) ein. Wir erhalten

$$\mathcal{D}^2\Big(\frac{1}{2}(\mathcal{D}^\alpha\Phi_\alpha + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}})\Big) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\mathcal{D}^2\mathcal{D}^\alpha\Phi_\alpha}_{=0} + \mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}}\Big) \ . \tag{3.1.12}$$

Der erste Term verschwindet wegen der Identität (A.3.6). Den zweiten schreiben wir mit Hilfe des Kommutators $\{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m$ um,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}_\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}} &= \mathcal{D}^\alpha(-2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m - \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\alpha)\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}} \\ &= -2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\underbrace{\mathcal{D}^\alpha\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}}}_{=0} - \mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\underbrace{\mathcal{D}_\alpha\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}}}_{=0} \ . \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Die Terme in der zweiten Zeile verschwinden wegen der Chiralitätsbedingung (3.1.11) von $\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}}$. Eine analoge Rechnung erhält man für den zweiten Constraint $\bar{\mathcal{D}}^2 L = 0$.

[1] $\frac{1}{2}B_{pq}dx^p \wedge dx^q$ ist eine 2-Form. Deshalb wird das lineare Multiplett häufig als 2-Form-Multiplett bezeichnet.

L ist invariant unter den Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &\to \Phi_\alpha + \frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda \ , \\ \bar{\Phi}_{\dot\alpha} &\to \bar{\Phi}_{\dot\alpha} - \frac{i}{8}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Lambda \ , \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

wobei Λ ein beliebiges reelles Superfeld ist. Um die Eichinvarianz von L zu demonstrieren, setzen wir (3.1.14) in (3.1.11) ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha\Phi_\alpha + \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{\dot\alpha} \to & \mathcal{D}^\alpha(\Phi_\alpha + \frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda) + \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}(\bar{\Phi}^{\dot\alpha} - \frac{i}{8}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\Lambda) \\ &= \mathcal{D}^\alpha\Phi_\alpha + \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{\dot\alpha} + \frac{i}{8}\underbrace{(\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha - \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha})}_{=0}\Lambda. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Beim letzten Schritt haben wir die Identität (A.3.8) ausgenutzt.

Als nächstes wollen wir die θ-Entwicklung von Φ_α angeben. Dabei geht man folgendermaßen vor. Man startet mit einer allgemeinen θ-Entwicklung eines chiralen Spinorsuperfeldes, setzt sie und die θ-Entwicklung von L (3.1.7) in (3.1.11) ein und vergleicht anschließend die Komponenten. Daraus ergeben sich Bedingungen an die einzelnen Komponenten von Φ_α. Eine detailierte Herleitung der θ-Entwicklung von Φ_α findet man in Anhang B. Die θ-Entwicklung von Φ_α lautet

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma(C+iE)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\right) + \theta\theta\left(\eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m\bar\chi^{\dot\alpha}\right) \ . \tag{3.1.16}$$

χ_α, η_α sind Weylspinoren, C, E sind reelle skalare Felder und B_{mn} ist der antisymmetrische Tensor.

Als nächstes berechnen wir die Eichtransformation (3.1.14) auf der Ebene der Komponentenfelder. Dabei können wir folgenden Umstand zu Nutze machen: $\delta\Phi_\alpha$ stimmt mit dem Ausdruck für die Feldstärke des Vektormultipletts (2.5.3) bis auf ein Vorfaktor überein. Insofern können wir den Ausdruck (2.5.3) übernehmen. Wir versehen dabei die einzelnen Felder mit einem Index e, um deutlich zu machen, daß es sich um die Komponenten der Eichtransformation handelt. Die θ-Entwicklung von $\delta\Phi_\alpha$ lautet damit

$$\delta\Phi_\alpha = \frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda = -\frac{1}{2}\lambda^e_\alpha - \left(\delta_\alpha{}^\gamma\frac{iD^e}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\sigma^n)_\alpha{}^\gamma\left(\partial_m\Lambda^e_n - \partial_n\Lambda^e_n\right)\right)\theta_\gamma - \frac{i}{2}\theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{e\,\dot\alpha} \ . \tag{3.1.17}$$

Addieren wir den Ausdruck (3.1.17) zu (3.1.16), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha + \delta\Phi_\alpha = & \chi_\alpha - \frac{1}{2}\lambda^e_\alpha - \theta_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma(C+iE+iD^e)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^m)_\alpha{}^\gamma\left(B_{mn} + \partial_m\Lambda^e_n - \partial_n\Lambda^e_m\right)\right) \\ & + \theta\theta\left(\eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m(\bar\chi^{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\bar\lambda^{e\,\dot\alpha})\right) \ . \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Aus dem Ausdruck (3.1.18) können wie die Eichtransformationen für die einzelnen Felder sofort ablesen. Sie lauten

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &\to \chi_\alpha - \frac{1}{2}\lambda_\alpha \ , \qquad & \eta_\alpha &\to \eta_\alpha \ , \\ E &\to E + D \ , & C &\to C \ , \\ B_{mn} &\to B_{mn} + \partial_m\Lambda_n - \partial_n\Lambda_m \ . \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Da wir über λ_α^e und D^e frei verfügen, können wir die Felder χ_α und E durch eine geeignete Eichtransformation zum Verschwinden bringen. Dies ist dieselbe Prozedur (Wess-Zumino-Eichung), die man macht, wenn man feststellt, daß bestimmte Felder des Vektormultipletts V beliebig abgeändert werden können, ohne dabei die Feldstärke des Vektormultipletts zu verändern. Die Transformation des antisymmetrischen Tensors B_{mn} in (3.1.19) stimmt mit der bereits diskutierten Eichtransformation (3.1.8) überein. Für weitere Betrachtungen benutzen wir Φ_α in dieser Wess-Zumino-Eichung

$$\Phi_\alpha = -\,\theta_\gamma \left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma C}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \right) + \theta\theta\eta_\alpha \ . \tag{3.1.20}$$

3.2 Masseloser Fall

Wir wollen eine eichinvariante Wirkung für die massiven linearen Multipletts konstruieren. Bevor wir das tun, betrachten wir den masselosen Fall. Er wurde mehrfach in der Literatur diskutiert [11, 7, 8, 12, 6, 13, 14].

Die eichinvariante Lagrangedichte ist gegeben durch durch die $\theta^2\bar\theta^2$-Komponente des Quadrats des linearen Superfeldes L

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\int d^2\theta d^2\bar\theta L^2 \ . \tag{3.2.1}$$

Lassen wir die Forderung nach der Renormierbarkeit fallen, so läßt sich (3.2.1) verallgemeinern zu

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\int d^2\theta d^2\bar\theta K(L) \ , \tag{3.2.2}$$

wobei K eine reelle Funktion von L ist. Die Komponentenform von (3.2.2) ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm kin} \quad = \quad & -\frac{1}{4}K'' \left(\partial_m C\partial^m C + i(\eta\sigma^m\partial_m\bar\eta + \bar\eta\bar\sigma^m\partial_m\eta) + \frac{3}{2}H_{mnp}H^{mnp}\right) \\ & -\frac{1}{8}\,K'''\,\eta\sigma^m\bar\eta\epsilon_{mnpq}H^{npq} - \frac{1}{48}\,K''''\,\eta\eta\bar\eta\bar\eta \ ,\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

mit $K'' = \partial_C^2 K, K''' = \partial_C^3 K$ etc. Die Details findet man in Anhang C. Für $K(L) = L^2$ fallen die beiden letzten Terme von (3.2.3) weg und die Kopplungsfunktion wird zu $K'' = 2$. Außerdem ist hier anzumerken, daß keines der Felder ein Hilfsfeld ist und die Anzahl der physikalischen Freiheitsgrade mit der Anzahl im skalaren Multiplett übereinstimmt.

3.3 Massiver Fall

Die Lagrangedichte des massiven linearen Multipletts müßte Terme von der Form $m^2 B_{mn}B^{mn}$ enthalten. Solche Ausdrücke stammen vom Superraumintegral, welches quadratisch in Φ_α ist,

$$\mathcal{L}_{\rm m} \sim m^2 \int d^2\theta \Phi^\alpha\Phi_\alpha + \text{h.c.} \tag{3.3.1}$$

Solche Terme sind allerdings nicht eichinvariant unter der Eichtransformation (3.1.14). Variieren wir (3.3.1), so erhalten wir

$$\delta\Big(m^2 \int d^2\theta\Phi\Phi\Big) = 2m^2 \int d^2\theta\Phi\delta\Phi = -\frac{im^2}{4}\int d^2\theta\Phi\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}\Lambda = im^2\int d^2\theta d^2\bar\theta\Phi\mathcal{D}\Lambda \neq 0 \ . \tag{3.3.2}$$

Im ersten Schritt haben wir die Produktregel benutzt, anschließend haben wir (3.1.14) eingesetzt und mit Hilfe von (A.3.4) den Ausdruck zum Superraumintegral umgeformt.

Um die eichinvarianten Massenterme zu konstruieren, werden wir den Stückelbergmechanismus verwenden [18, 19]. Man geht dabei wie folgt vor. Man spaltet von B_{mn} die Freiheitsgrade, die nur im massiven Fall vorhanden sind, ab und erweitert die Gruppe der Eichtransformationen um solche, die B_{mn} unverändert lassen.

Die massiven Freiheitsgrade findet man durch folgende Überlegung. Der massive Term $m^2 B_{mn}B^{mn}$ ist nicht eichinvariant, insofern erhält B_{mn} zusätzliche Freiheitsgrade, die im masselosen Fall sich wegtransformieren ließen, und sie können wir einfach von δB_{mn} ablesen.

Wir definieren B_{mn} um,

$$B_{mn} = B'_{mn} + \frac{1}{m}(\partial_m v_n - \partial_n v_m) \tag{3.3.3}$$

und definieren die Eichtransformationen zu

$$B'_{mn} \to B'_{mn} + \partial_m \Lambda_n - \partial_n \Lambda_m \ , \qquad v_n \to v_n + m\Lambda_n \ . \tag{3.3.4}$$

Unter diesen Transformationen ist der Masseterm $m^2 B_{mn}B^{mn}$ invariant. Das Vektorfeld v_m stellt die notwendigen zusätzlichen Freiheitsgrade für B_{mn} im massiven Fall zur Verfügung und spielt die Rolle des Kompensatorfelders für die Transformationen von B'_{mn}.

Als nächstes wollen wir die Transformationen (3.3.4) auf die Ebene der Superfelder übertragen. Offensichtlich entspricht (3.3.3) der Kombination

$$(2i\Phi_\alpha + \frac{1}{m}W_\alpha) \ , \tag{3.3.5}$$

wobei W_α die Feldstärke des Vektormultipletts V ist. W_α und V sind in (2.5.13), (2.5.3) definiert. Der antisymmetrische Tensor B'_{mn} ist in dem chiralen Spinorsuperfeld Φ_α enthalten. Ab sofort lassen wir den Strich bei B'_{mn} weg. Die Transformationen (3.3.4) lassen sich mit Hilfe der Superfelder schreiben als

$$\begin{aligned} &\Phi_\alpha \to \Phi_\alpha + \frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2 \mathcal{D}_\alpha \Lambda \ , \\ &V \to V + m\Lambda \ , \qquad W_\alpha \to W_\alpha - \frac{1}{4} m \overline{\mathcal{D}}^2 \mathcal{D}_\alpha \Lambda \ . \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Λ ist ein reelles Superfeld. Seine θ-Entwicklung wurde in (3.1.17) angegeben.

Unser Ziel ist, eine möglichstallgemeine lorentz- und eichinvariante Wirkung zu konstruieren. Nach Konstruktion ist (3.3.5) eichinvariant. Um es lorentzinvariant zu machen, quadrieren wir den Ausdruck und summieren dabei über die Spinorindizes von W_α und Φ_α. Höhere Produkte von (3.3.5) wollen wir nicht zulassen, da sie nicht renormierbar sind. Um andere eichinvariante Terme zu finden, machen wir folgenden Ansatz

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = \int d^2\theta \, (f\Phi\Phi + a\Phi W + bWW) \ + \ \text{h.c.} \tag{3.3.7}$$

mit komplexen Konstanten f,a,b und fordern, daß $\mathcal{L}_m$ eichinvariant unter den Transformationen (3.3.6) ist. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten führen wir als Abkürzung

$$Y_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}^2 \mathcal{D}_\alpha \Lambda \tag{3.3.8}$$

ein. Die Transformationen (3.3.6) werden dann zu

$$\delta\Phi_\alpha = -\frac{i}{2}Y_\alpha \ , \qquad \delta W_\alpha = mY_\alpha \ . \tag{3.3.9}$$

Variieren wir jetzt den Ansatz (3.3.7), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_m =& 2f\Phi\delta\Phi + a\delta\Phi W + a\Phi\delta W + 2bW\delta W + \text{h.c.} \\ =& -if\Phi Y - \frac{i}{2}aYW + ma\Phi Y + 2bmWY + \text{h.c.} \ . \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Im zweiten Schritt haben wir (3.3.9) eingesetzt. Wir fassen nun Terme mit gleichen Superfeldern zusammen,

$$\delta\mathcal{L}_m = (-if + ma)\Phi Y + (-\frac{i}{2}a + 2bm)WY + (i\bar{f} + m\bar{a})\bar{\Phi}\bar{Y} + (\frac{i}{2}\bar{a} + 2\bar{b}m)\bar{W}\bar{Y} \ . \tag{3.3.11}$$

Wir suchen solche Lösungen von f, a, b, für die $\delta\mathcal{L}_m$ verschwindet oder gleich einer totalen Ableitung ist. Aus (3.3.11) sieht man, daß für

$$a = \frac{if}{m} \ , \quad \text{und} \quad b = -\frac{f}{4m^2} \tag{3.3.12}$$

$\delta\mathcal{L}_m$ stets verschwindet. f kann dabei eine beliebige komplexwertige Funktion sein.

Um eine Lösung zu finden, für die $\delta\mathcal{L}_m$ gleich einer totalen Ableitung ist, suchen wir nach einer Kombination von den Superfeldern, die dies erfüllt. Aus der Betrachtung der θ-Entwicklungen von Φ_α (3.1.16), W_α (2.5.14) und Y_α (3.1.17) stellen wir fest, daß die einzige Kombination, die gleich einer totalen Ableitung ist, ist

$$\left(WY - \bar{W}\bar{Y}\right)\Big|_{\theta^2} = -\frac{i}{2}\epsilon_{mnpq}F^{mn}F^{e\,pq} \ . \tag{3.3.13}$$

Um dies auszunutzen, schreiben wir den Ausdruck (3.3.11) um, indem wir die Koeffizienten f, a, b in Real- und Imaginärteil zerlegen und die Terme mit i und ohne i als Vorfaktor gruppieren.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} =& (-i\text{Re}\, f + \text{Im}\, f + m\text{Re}\, a + im\text{Im}\, a)\Phi Y + (i\text{Re}\, f + \text{Im}\, f + m\text{Re}\, a - im\text{Im}\, a)\bar{\Phi}\bar{Y}) \\ & + (-\frac{i}{2}\text{Re}\, a + \frac{1}{2}\text{Im}\, a + 2m\text{Re}\, b + 2im\text{Im}\, b)WY + (\frac{i}{2}\text{Re}\, a + \frac{1}{2}\text{Im}\, a + 2m\text{Re}\, b - 2im\text{Im}\, b)\bar{W}\bar{Y} \\ =& (-i\text{Re}\, f + im\text{Im}\, a)(\Phi Y - \bar{\Phi}\bar{Y}) + (\text{Im}\, f + m\text{Re}\, a)(\Phi Y + \bar{\Phi}\bar{Y}) \\ & + (-\frac{i}{2}\text{Re}\, a + 2i\text{Im}\, b)(WY - \bar{W}\bar{Y}) + (\frac{1}{2}\text{Im}\, a + 2m\text{Re}\, b)(WY + \bar{W}\bar{Y}) \ . \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}\text{Re}\, a + 2i\text{Im}\, b =& \text{const.} \ , \\ \frac{1}{2}\text{Im}\, a + 2m\text{Re}\, b =& 0 \ , \\ -\text{Re}\, f + m\text{Im}\, a =& 0 \ , \\ \text{Im}\, f + m\text{Re}\, a =& 0 \ . \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Eine Lösung dieses Gleichungssystems, die nicht mit (3.3.12) übereinstimmt, ist

$$\mathrm{Re}\,a = \frac{1}{2}e\ , \qquad \mathrm{Im}\,b = h\ , \qquad \mathrm{Im}\,f = -\frac{1}{2}me\ , \qquad \mathrm{Im}\,a = \mathrm{Re}\,b = 0\ , \tag{3.3.16}$$

wobei e, h reelle Konstanten sind.

Setzen wir die gewonnenen Lösungen (3.3.12), (3.3.16) ein, so erhalten wir

$$\mathcal{L} = f\Phi\Phi + \frac{if}{m}\Phi W - \frac{f}{4m^2}WW - \frac{i}{2}me\Phi\Phi + \frac{1}{2}e\Phi W + ihWW + \text{h.c.}\ . \tag{3.3.17}$$

Wir multiplizieren den Ausdruck mit m^2 und fassen Terme mit gleichen Vorfaktoren zusammen. Außerdem bemerken wir, daß $ihWW + \text{h.c.}$ gleich einer totalen Ableitung ist und deshalb aus der Wirkung ausintegriert werden kann. Die Lagrangedichte hat damit die Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\Big(f(W-2im\Phi)(W-2im\Phi) + 2e\Phi(W-im\Phi)\Big) + \text{h.c.}\ . \tag{3.3.18}$$

Es ist offensichtlich, daß wir den Ausdruck (3.3.18) wie in Abschnitt 2.5.1 auf den Fall von n_V-Vektormultipletts sofort erweitern können. Diese Erweiterung findet statt, indem die Vektormultiplett-Feldstärke W_α einen Index A erhält, wobei $A = 1,\ldots,n_V$ ist. Die θ-Entwicklungen (2.5.13), (2.5.14) von V und W_α erweitert um den Index A werden zu

$$\begin{aligned} V^A &= -\,\theta\sigma^m\bar\theta v_m^A + i\theta\theta\bar\theta\bar\lambda^A - i\bar\theta\bar\theta\theta\lambda^A + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta D^A\ , \\ W_\alpha^A &= -\,i\lambda_\alpha^A + \Big(\delta_\alpha{}^\beta D^A - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\beta F_{mn}^A\Big)\theta_\beta + \theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{A\,\dot\alpha}\ . \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Zu jedem Wert von A in (3.3.18) gehören dann bestimmte Parameter m und e. Sie werden damit zu reellen Vektoren m^A und e_A mit n_V konstanten Einträgen. Die Kopplungsfunktion f wird zu einer $n_V \times n_V$-Matrix f_{AB}.

Für den Fall der n_V Vektormultipletts schreiben wir die Eichtransformationen (3.3.6) um zu

$$V^A \to V^A + m^A\Lambda\ , \qquad W_\alpha^A \to W_\alpha^A - \frac{1}{4}m^A\bar D^2 D_\alpha\Lambda\ . \tag{3.3.20}$$

Bevor wir den verallgemeinerten Ausdruck für (3.3.18) angeben, wollen wir noch erklären, welche Funktionen bei f_{AB} zugelassen sind. Würden wir verlangen, daß $\mathcal{L}_M$ renormierbar sein muß, so muß $f_{AB} = \delta_{AB}$ gelten. Hier wollen wir diese Forderung fallenlassen und das lineare Multiplett an die Materiefelder koppeln. Wir lassen zu, daß f_{AB} eine allgemeine Funktion von n_c chiralen Superfeldern N^i ist. Der Index i nimmt Werte zwischen 1 und n_C an. Damit lautet der allgemeinstmögliche Ausdruck für $\mathcal{L}_m$

$$\mathcal{L}_\mathrm{m} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\Big(f_{AB}(N)(W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi) + 2e_A\Phi(W^A - im^A\Phi)\Big)\ +\ \text{h.c.} \tag{3.3.21}$$

In (3.3.1) haben wir den Parameter m als Masse definiert. Mit der Einführung der Kopplungsmatrix f_{AB} verliert er diese Rolle. Der Zusammenhang zwischen den m^A und den Massentermen wird an späterer Stelle diskutiert.

An dieser Stelle können wir die Freiheitsgrade zählen und sie mit dem masselosen Fall vergleichen. Wir erinnern, daß die Transformationen der Vektormultipletts (3.3.20) physikalisch bedeuten, daß ein Vektormultiplett den massiven Freiheitsgraden des Spinormultipletts Φ_α entspricht. Anders ausgedrückt wird ein Vektorfeld von dem chiralen Spinorsuperfeld Φ_α

"gegessen". Dadurch wird Φ_α massiv und es bleiben in der Wirkung (3.3.21) $n_V - 1$ physikalische masselose Vektormultipletts. Damit können wir folgende Auflistung für die bosonischen Freiheitsgrade "on shell" machen:

ein massives Spinorsuperfeld Φ_α	4 bosonische FG
$n_V - 1$ masselose Vektorsuperfelder V^A	$2(n_V - 1)$ bosonische FG
n_c chirale Superfelder N^i	$2n_c$ bosonische FG

Bevor wir (3.3.21) in Komponenten schreiben, diskutieren wir den Fall $m^A = 0$. In diesem Grenzfall reduziert sich die Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\Big(f_{AB}(N)WW + 2e_A\Phi W^A\Big) + \text{h.c.} \ . \tag{3.3.22}$$

Die Terme von der Form $e_A\Phi W^A$ sind als vierdimensionale Green-Schwarz-Terme bekannt [11, 22, 23]. Gewöhnlich werden sie mit Hilfe des vollständigen Superraumintegrals in der Form $2e_A \int d^2\theta d^2\bar\theta L V^A$ geschrieben. Daß die Schreibweisen äquivalent sind, sieht man in der folgenden Rechnung

$$\begin{aligned} e_A\int d^2\theta\,\Phi W^A + \text{h.c.} &= -\frac{1}{4}\,e_A\int d^2\theta\,\Phi\overline{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}V^A - \frac{1}{4}\,e_A\int d^2\bar\theta\,\bar\Phi\mathcal{D}^2\overline{\mathcal{D}}V^A \\ &= e_A\int d^2\theta d^2\bar\theta\,\left(\Phi\mathcal{D}V^A + \bar\Phi\overline{\mathcal{D}}V^A\right) \\ &= e_A\int d^2\theta d^2\bar\theta\,\left(\mathcal{D}\Phi + \overline{\mathcal{D}}\bar\Phi\right)V^A = 2e_A\int d^2\theta d^2\bar\theta\,LV^A \ . \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Hier haben wir zuerst die Definition von W_α (2.5.3) eingesetzt, danach haben wir (A.3.4) ausgenutzt. Anschließend haben wir einmal partiell integriert und (3.1.11) eingesetzt.

Als nächstes geben wir die Lagrangedichte (3.3.21) in Komponenten an. Außer (3.1.7), (3.1.20) und (2.5.14) benötigen wir noch

$$\begin{aligned} N^i &= A^i + \sqrt{2}\theta\chi^i + \theta\theta F^i \ , \\ f_{AB}(N) &= f_{AB}(A) + \sqrt{2}\theta\chi^i\partial_i f_{AB} + \theta\theta\big(F^i\partial_i f_{AB} - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\big) \ . \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Eingesetzt in die Lagrangedichte (3.3.21) erhalten wir vor der Eliminierung der Hilfsfelder D^A (Details siehe in Anhang C):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{m}} = &-\frac{1}{4}\mathrm{Re}f_{AB}\check{F}^A_{mn}\check{F}^{B\,mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}f_{AB}\epsilon^{mnpr}\check{F}^A_{mn}\check{F}^B_{pr} - \frac{1}{16}\epsilon^{mnpr}B_{mn}e_A(\check{F}^A_{pr} + F^A_{pr}) \\ &+\frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}D^AD^B - \frac{1}{2}CD^A(e_A + 2\mathrm{Im}f_{AB}m^B) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}m^Am^BC^2 \\ &-\frac{i}{2}\,f_{AB}\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar\lambda^B - \frac{i}{2}\,f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\sigma^m\partial_m\lambda^B \\ &-\frac{1}{2}(ie_A + 2f_{AB}m^B)\eta\lambda^A - \frac{1}{2}(-ie_A + 2f^*_{AB}m^B)\bar\eta\bar\lambda^A \\ &-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}(m^AC - iD^A)\chi^i\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*}f^*_{AB}(m^AC + iD^A)\bar\chi^i\bar\lambda^B \\ &-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}\check{F}^A_{mn}\chi^i\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*}f^*_{AB}\check{F}^A_{mn}\bar\chi^i\bar\sigma^{mn}\bar\lambda^B \\ &-\frac{1}{4}F^i\partial_i f_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*i}\partial_{i*}f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B \\ &+\frac{1}{8}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar\chi^i\bar\chi^j\partial_{i*}\partial_{j*}f_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

mit

$$\check{F}^A_{mn} = F^A_{mn} - m^A B_{mn}\ . \tag{3.3.26}$$

Als nächstes eliminieren wir die Hilfsfelder D^A mit Hilfe ihrer Bewegungsgleichungen. Wir fassen alle Terme mit D^A nochmal zusammen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^D_m =& \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f_{AB} D^A D^B - \frac{1}{2} C D^A (e_A + 2\mathrm{Im}\, f_{AB} m^B) \\ &+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\partial_i f_{AB} D^A \chi^i \lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\partial_{i^*} f^*_{AB} D^A \bar\chi^i \bar\lambda^B\ .\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich sofort als Ableitungen von $\mathcal{L}_m$ nach D^A

$$\mathrm{Re}\, f_{AB} D^B - \frac{1}{2} C(e_A + 2\mathrm{Im}\, f_{AB} m^B) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\partial_i f_{AB}\chi^i\lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\partial_{i^*} f^*_{AB}\bar\chi^i\bar\lambda^B = 0\ . \tag{3.3.28}$$

Auflösen nach D^A ergibt

$$D^A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\, f\right)^{-1AB}\left((e_B + 2\mathrm{Im}\, f_{BC} m^C) C - \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i f_{BC}\chi^i\lambda^C + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_{i^*} f^*_{BC}\bar\chi^i\bar\lambda^C\right)\ . \tag{3.3.29}$$

Wir setzen (3.3.29) in (3.3.25) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{m} =& -\frac{1}{4}\mathrm{Re} f_{AB}\check{F}^A_{mn}\check{F}^{B\,mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im} f_{AB}\epsilon^{mnpq}\check{F}^A_{mn}\check{F}^B_{pq} - \frac{1}{16}\epsilon^{mnpq}B_{mn}e_A(\check{F}^A_{pq} + F^A_{pq}) - V \\ &- \frac{i}{2}\, f_{AB}\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar\lambda^B - \frac{i}{2}\, f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\sigma^m\partial_m\lambda^B \\ &- \frac{1}{2}(ie_A + 2 f_{AB} m^B)\eta\lambda^A - \frac{1}{2}(-ie_A + 2 f^*_{AB} m^B)\bar\eta\bar\lambda^A \\ &- \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_i f_{AB} m^A C\chi^i\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_{i^*} f^*_{AB} m^A C\bar\chi^i\bar\lambda^B \\ &+ \frac{1}{8}\left(\mathrm{Re}\, f\right)^{-1AD}\partial_i f_{AB}(\partial_j f_{DC}\chi^j\lambda^C - \partial_{j^*} f^*_{DC}\bar\chi^j\bar\lambda^C)\chi^i\lambda^B \\ &+ \frac{1}{8}\left(\mathrm{Re}\, f\right)^{-1AD}\partial_{i^*} f^*_{AB}(\partial_{j^*} f^*_{DC}\bar\chi^j\bar\lambda^C - \partial_j f_{DC}\chi^j\lambda^C)\bar\chi^i\bar\lambda^B \\ &- \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}\check{F}^A_{mn}\chi^i\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*} f^*_{AB}\check{F}^A_{mn}\bar\chi^i\bar\sigma^{mn}\bar\lambda^B \\ &- \frac{1}{4}F^i\partial_i f_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*i}\,\partial_{i^*} f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B \\ &+ \frac{1}{8}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar\chi^i\bar\chi^j\partial_{i^*}\partial_{j^*} f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B\ .\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

V enthält alle Terme, die dem skalaren Potential beitragen. Vor der Eliminierung der Hilfsfelder erhält man

$$V = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f_{AB} D^A D^B + \frac{1}{2} C D^A (e_A + 2\mathrm{Im}\, f_{AB} m^B) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A m^B C^2\ . \tag{3.3.31}$$

Berücksichtigt man nur bosonische Terme,[2] so lautet die Bewegungsgleichung für D^A (3.3.29):

$$D^A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\, f\right)^{-1AB}(e_B + 2\mathrm{Im}\, f_{BC} m^C) C\ . \tag{3.3.32}$$

[2]Die fermionischen Beiträge, die durch Eliminierung von D^A zustande kommen, haben wir bereits in (3.3.30) eingesetzt.

V läßt sich dann schreiben

$$V = \frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}D^A D^B + \frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}m^A m^B C^2 \ , \tag{3.3.33}$$

wobei D^A durch die Bewegungsgleichung (3.3.32) gegeben ist. Man sieht, daß im Falle des linearen Multipletts ein Term vorhanden ist, der nicht vom D-Term der Vektormultipletts stammt. Es handelt sich dabei um einen direkten Massenterm des reellen Skalars C. Mit direkt meinen wir, daß sein Beitrag allein durch die Präsenz des linearen Multipletts zustande kommt. Nach dem Einsetzen der Bewegungsgleichung (3.3.32) in (3.3.33) wird das skalare Potential zu

$$\begin{aligned} V =& \frac{1}{8}\ \left(\left(e_A + 2\mathrm{Im}f_{AC}m^C\right)\mathrm{Re}f^{-1AB}\left(e_B + 2\mathrm{Im}f_{BD}m^D\right) + 4\mathrm{Re}f_{AB}m^A m^B\right)C^2 \\ =& \frac{1}{8}\left(e_A - 2if_{AC}m^C\right)\mathrm{Re}\,f^{-1AB}\left(e_B + 2if^*_{BD}m^D\right)C^2 \ . \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß dieses Potential als $N = 1$ Version des $N = 2$ Taylor-Vafa-Potentials [24, 10] angesehen werden kann.

Jetzt sind wir imstande, die Verbindung zwischen den Parametern m_A, e^A und der Masse anzugeben. Als Masse wird gewöhnlich die Kopplungsfunktion vor dem quadratischen Term definiert. Setzt man (3.3.26) in (3.3.30) ein, so kann man die quadratischen Terme in B_{mn} sofort ablesen. Terme, die B_{mn} enthalten, sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B =& -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^A m^B B_{mn}B^{mn} + \frac{1}{8}\Big(\mathrm{Im}\,f_{AB}m^A m^B + \frac{1}{2}e_A m^A\Big)\epsilon^{mnpq}B_{mn}B_{pq} \\ & + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^A F^B_{mn}B^{mn} - \frac{1}{4}\Big(\mathrm{Im}\,f_{AB}m^A + \frac{1}{2}e_B\Big)\epsilon^{mnpq}F^B_{mn}B_{pq} \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Wie man sieht, haben wir zwei quadratische Terme von B_{mn}, einer davon ist topologisch.[3] So definieren wir zwei Kopplungsfunktionen, die man als "Massen" bezeichnen kann.

$$\begin{aligned} M^2 &= \mathrm{Re}f_{AB}m^A m^B \ , \\ M_T^2 &= \mathrm{Im}f_{AB}m^A m^B + \frac{1}{2}e_A m^A \ . \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Die Massenterme werden damit zu

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mB}} = -\frac{1}{4}M^2\,B_{mn}B^{mn} + \frac{1}{8}M_T^2\,\epsilon^{mnpq}B_{mn}B_{pq} \ . \tag{3.3.37}$$

Für $m = 0$ sind M^2 und M_T^2 Null und es bleibt in der Lagrangedichte ein masseloser antisymmetrischer Tensor mit der Green-Schwarz-Kopplung [11]

$$\mathcal{L}_{m=0} = -\frac{1}{8}e_B\epsilon^{mnpq}F^B_{mn}B_{pq} \ . \tag{3.3.38}$$

[3] Der Term heißt topologisch, wenn er nicht explizit von der Metrik abhängt.

Kapitel 4

Dualitäten des antisymmetrischen Tensors

In diesem Kapitel diskutieren wir die dualen Formulierungen des antisymmetrischen Tensors. Dabei muß man zwischen dem masselosen $m^A = 0$ und massiven Fall $m^A \neq 0$ unterscheiden. Ein masseloses antisymmetrisches Tensorfeld ist dual zum skalaren Feld. Auf der Ebene der Superfelder entspricht dies der Dualität zwischen dem linearen und chiralen Multiplett. Im massiven Fall ist das antisymmetrische Tensorfeld dual zum massiven Vektorfeld. Und wiederherum auf der Ebene der Superfelder entspricht dies der Dualität zwischen dem chiralen Spinorfeld und massiven Vektormultiplett. In Anhang D werden die notwendigen technischen Details zur Dualitätstransformation erklärt.

4.1 Masseloser Fall

Als erstes diskutieren wir den masselosen Fall. Setzen wir alle Parameter $m^A = 0$, so erhalten wir aus (3.2.2) und (3.3.21)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(L) + \left(\frac{1}{4}\int d^2\theta \left(f_{AB}W^AW^B + 2e_A\Phi W^A\right) \;+\; \text{h.c.}\right) \ , \\ &= -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\left(K(L) - e_A L V^A\right) + \left(\frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B \;+\; \text{h.c.}\right) \ ,\end{aligned}$$

wobei wir (3.3.23) bei der Umformung ausgenutzt haben.

Um die Dualitätstransformation durchzuführen, müssen wir eine sogenannte "first order form" konstruieren. Sie ist eine allgemeine Funktion der beiden Superfelder, die zueinander dual sind. Durch Eliminieren eines der Superfelder mit Hilfe seiner Bewegungsgleichungen erhält man die richtige Lagrangedichte für das andere.

Eine solche "first oder form" erhalten wir hier [11, 14], indem wir L in (4.1.1) durch ein reelles (aber nicht lineares) Superfeld V^0 ersetzen und einen zusätzlichen Term

$$\delta\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, V^0(S+\bar{S}) \ , \qquad (4.1.1)$$

dazuaddieren, wobei S ein chirales Superfeld ist ($\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}S = 0$). Wir haben das reelle Superfeld V^0 mit dem Index 0 versehen, um es von den n_V Vektormultipletts V^A zu unterscheiden, die in der Lagrangedichte (4.1.1) auch vorhanden sind. Wir erhalten damit als "first order form"

$$\mathcal{L}_{\text{first}} = -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\left(K(V^0) - e_A V^0 V^A - V^0(S+\bar{S})\right) + \left(\frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB} W^A W^B \;+\; \text{h.c.}\right) . \tag{4.1.2}$$

Als erstes bestimmen wir die Bewegungsgleichungen für S und $\bar{S}$. Um nach den Superfeldern S und $\bar{S}$ zu variieren, schreibt man sie mit Hilfe der allgemeinen Superfelderfelder Σ und $\bar{\Sigma}$ um

$$S = \bar{\mathcal{D}}^2\Sigma \ , \qquad \bar{S} = \mathcal{D}^2\bar{\Sigma} \ . \tag{4.1.3}$$

Wir variieren nach Σ und $\bar{\Sigma}$ und erhalten[1]

$$\bar{\mathcal{D}}^2 V^0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{D}^2 V^0 = 0 \ . \tag{4.1.4}$$

Dies sind genau die bestimmenden Constraints (3.1.1) für das lineare Multiplett. Das heißt, das lineare Multiplett ist die Lösung der Bewegungsgleichungen (4.1.4). Setzen wir die Lösung, also L, zurück in die "first order form" (4.1.2), so erhalten wir die Lagrangedichte für das masselose lineare Multiplett (4.1.1). Der Term (4.1.1) verschwindet, da man nach der zweifachen partiellen Integration erhält

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} L(S+\bar{S}) = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}(\underbrace{\bar{\mathcal{D}}^2 L}_{=0}\Sigma + \underbrace{\mathcal{D}^2 L}_{=0}\bar{\Sigma}) \ . \tag{4.1.5}$$

Auf der anderen Seite ist die Bewegungsgleichung für V^0

$$-\partial_{V^0} K + e_A V^A + S + \bar{S} = 0 \ . \tag{4.1.6}$$

Wir lösen sie nach V^0 auf

$$V^0 = h(e_A V^A + S + \bar{S}) \ , \tag{4.1.7}$$

wobei h eine invertierbare Funktion von $e_A V^A + S + \bar{S}$ ist. Die genaue Form der Gleichung (4.1.7) hängt von der Gestalt von $K(V^0)$ in (4.1.2) ab. Setzen wir (4.1.7) in die "first order form" (4.1.2) zurück, so erhalten wir

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\hat{K}\left(e_A V^A + S + \bar{S}\right) + \frac{1}{4}\left(\int d^2\theta f_{AB} W^A W^B \;+\; \text{h.c.}\right) \tag{4.1.8}$$

mit $\hat{K} = -K(h) + (e_A V^A + S + \bar{S})h$. $\hat{K}$ ist die Legendre-Transformierte von K. Dies ist die Lagrangedichte für n_V Vektormultipletts und ein chirales und ein antichirales Superfeld.

Als nächstes erklären wir, wie die Felder V^A, S und $\bar{S}$ sich transformieren sollen. In (2.5.8) und (2.5.9) wurde gezeigt, daß W^A unter den Transformationen

$$V^A \to V^A + \Sigma^A + \bar{\Sigma}^A \ , \tag{4.1.9}$$

wobei Σ^A n_V chirale Superfelder sind $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Sigma^A = 0$, invariant sind. Somit ist der zweite Term von (4.1.8) eichinvariant unter (4.1.9). Um den ersten eichinvariant zu machen, verwenden wir wie bei der Konstruktion der Wirkung für das massive lineare Multiplett den Stückelbergmechanismus, indem wir die Gruppe der Eichtransformationen um solche erweitern, die die Lagrangedichte (4.1.8) invariant lassen. Wir definieren die Eichtransformation für S zu

$$S \to S - e_A\Sigma^A \ . \tag{4.1.10}$$

Man sieht, daß S und $\bar{S}$ von den V^A's absorbiert werden können. Dies würde dann eine lineare Kombination von den Vektormultipletts massiv machen. Um den Komponenteninhalt der

[1]Die Variationsregeln für die Superfelder sind in Anhang D angegeben.

Lagrangedichte (4.1.8) anzugeben, gehen wir wie im Falle des linearen Multipletts vor (siehe Anhänge C und E). Wir setzen die θ-Entwicklung von V^A in der Wess-Zumino-Eichung

$$V^A = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \tag{4.1.11}$$

und die θ-Entwicklung von S

$$S = E + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F \tag{4.1.12}$$

in die Lagrangedichte (4.1.8) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& \frac{1}{2}\hat{K}'e_A D^A \;+\; \frac{1}{2}\hat{K}''\Big(2FF^* - \partial_m(\mathrm{Re}\,E)\partial^m(\mathrm{Re}\,E) \\
-\;& \frac{1}{2}\left(e_A v_m^A \;+\; 2\partial_m(\mathrm{Im}\,E)\right)\left(e_B v^{B\,m} \;+\; 2\partial^m(\mathrm{Im}\,E)\right) \\
+\;& i\sqrt{2}e_A(\psi\lambda^A - \bar{\psi}\bar{\lambda}^A) - i(\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + \bar{\psi}\bar{\sigma}\partial_m\psi)\Big) \;+\; \frac{1}{4}\hat{K}''''\psi\psi\bar{\psi}\bar{\psi} \\
+\;& \frac{1}{2}\hat{K}'''\Big(- F^*\psi\psi - F\bar{\psi}\bar{\psi} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^m\psi(e_A v_m^A + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,E)\Big) \\
-\;& \frac{1}{4}\mathrm{Re}f_{AB}F^{A\,mn}F^B_{mn} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}D^A D^B + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\,f_{AB}\epsilon^{mnpr}F^A_{mn}F^B_{pr} \\
-\;& \frac{i}{2}\left(f_{AB}\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}^B - \bar{f}_{AB}\partial_m\lambda^A\sigma^m\bar{\lambda}^B\right) \\
+\;& \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}D^A\chi^i\lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*}f^*_{AB}D^A\bar{\chi}^i\bar{\lambda}^B \\
-\;& \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}F^A_{mn}\chi^i\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*}f^*_{AB}F^A_{mn}\bar{\chi}^i\bar{\sigma}^{mn}\bar{\lambda}^B \\
-\;& \frac{1}{4}F^i\partial_i f_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*i}\partial_{i*}f^*_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\lambda}^B \\
+\;& \frac{1}{8}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar{\chi}^i\bar{\chi}^j\partial_{i*}\partial_{j*}f_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\lambda}^B \;.
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

wobei wir folgende Abkürzung eingeführt haben: $\hat{K}' = \partial_{\mathrm{Re}\,E}\hat{K}$. Man sieht, daß das reelle Skalarfeld $\mathrm{Im}\,E$ die Rolle des Goldstone-Bosons spielt. Es entspricht dem massiven Freiheitsgrad der Linearkombination der Vektorfelder v^A und kann durch eine geeignete Eichtransformation (unitäre Eichung) in die Linearkombination der Vektorfelder $e_A v^A$ hineingezogen werden.

Um die physikalische Wirkung zu erhalten, müssen wir die Hilfsfelder F^i, D^A und F eliminieren. Die Hilfsfelder F^i belassen wir in der Wirkung, da wir den kinetischen Term für die chiralen Superfelder N^i nicht vorgestellt haben. Wenn man sich nur auf die bosonischen Terme beschränkt, sind die Bewegungsgleichungen von F und D^A

$$F = 0, \qquad D^A = -\frac{1}{2}\hat{K}'e_B(\mathrm{Re}\,f)^{-1\,AB} \;. \tag{4.1.14}$$

Setzen wir sie zurück in (4.1.13) und berücksichtigen nur die bosonischen Terme, so erhalten wir in der unitären Eichung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_b = &-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,f_{AB}F^{A\,mn}F^B_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\,f_{AB}\epsilon^{mnpr}F^A_{mn}F^B_{pr} - \frac{1}{4}\hat{K}''e_A e_B v^A v^B \\
&-\frac{1}{2}\hat{K}''\partial_m(\mathrm{Re}\,E)\partial^m(\mathrm{Re}\,E) - V \;,
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

wobei das Potential ist

$$V = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f_{AB} D^A D^B = \frac{1}{8}(\hat{K}')^2 e_A (\mathrm{Re}\, f)^{-1\,AB} e_B \ . \tag{4.1.16}$$

Das Potential soll mit dem vor der Dualisierung (3.3.34) übereinstimmen. Dies ist tatsächlich der Fall für

$$m = 0 \ , \qquad \hat{K}' = C \tag{4.1.17}$$

Wir überprüfen, ob die kinetischen Terme auch übereinstimmen. Wir schreiben sie noch mal hin. Aus (3.2.3) und (4.1.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= -\frac{1}{4} K''(C) \partial_m C \partial^m C \ , \\ \mathcal{L}_{\mathrm{Re}\, E} &= -\frac{1}{2} \hat{K}''(\mathrm{Re}\, E) \partial_m (\mathrm{Re}\, E) \partial^m (\mathrm{Re}\, E) \ . \end{aligned}$$

Wir setzen $\hat{K}' = C$ in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= -\frac{1}{4} K''(\hat{K}') \partial_m \left(\hat{K}'(\mathrm{Re}\, E)\right) \partial^m \left(\hat{K}'(\mathrm{Re}\, E)\right) \\ &= -\frac{1}{4} K''(\hat{K}') K''(\mathrm{Re}\, E) K''(\mathrm{Re}\, E) \partial_m (\mathrm{Re}\, E) \partial^m (\mathrm{Re}\, E) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial E} K'(\hat{K}) K''(\mathrm{Re}\, E) \partial_m (\mathrm{Re}\, E) \partial^m (\mathrm{Re}\, E) \ . \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Bei den Umformungen haben wir die Kettenregel ausgenutzt. Aus der Legendre-Transformation

$$K = -\hat{K} + (e_A V^A + S + \bar{S}) \ , \tag{4.1.19}$$

die wir nach der Formel (4.1.8) diskutiert haben, folgt für die Komponentenfelder

$$K'(C) = K'(\hat{K}') = 2E \ . \tag{4.1.20}$$

Wir setzen nun (4.1.20) in (4.1.18) ein und erhalten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \hat{K}''(\mathrm{Re}\, E) \partial_m (\mathrm{Re}\, E) \partial^m (\mathrm{Re}\, E) \ . \tag{4.1.21}$$

Damit haben wir gezeigt, daß die kinetischen Terme auch übereinstimmen.

4.2 Massiver Fall

4.2.1 Dualitätstransformation

Im massiven Fall ($m^A \neq 0$) ist die Lagrangedichte gegeben durch (3.3.21). Um die Dualitätstransformation durchzuführen, starten wir mit einer allgemeinen Lagrangedichte, die wir erhalten, indem wir den Term $-(V^0 + \Phi + \bar{\Phi})(\mathcal{D}^\alpha \Phi_\alpha + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \bar{\Phi}^{\dot{\alpha}})$ dazuaddieren und $K(L)$ durch in Abschnitt 2.5.2 eingeführten Massenterm $U(V^0 + \Phi + \bar{\Phi})$ ersetzen [12]. Wir haben V^0 mit dem Index 0 versehen, um es von den n_V Vektormultipletts V^A mit $A = 1, \ldots, n_V$ zu unterscheiden. Im Folgenden werden wir $V^0 + \Phi + \bar{\Phi}$ durch V'^0 abkürzen. Die "first order form" ist damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ = \ & \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(U(V'^0) \ - \ V'^0 (\mathcal{D}\Phi + \bar{\mathcal{D}}\bar{\Phi}) \right) \\ & + \ \frac{1}{4} \left\{ \int d^2\theta \Big(f_{AB}(N)(W^A \ - \ 2im^A\Phi)(W^B \ - \ 2im^B\Phi) \right. \\ & \left. + \ 2e_A \Phi (W^A \ - \ im^A \Phi) \Big) \ + \ \mathrm{h.c.} \right\} \ . \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Wir variieren (4.2.1) nach V^0 und erhalten als Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial U(V'^0)}{\partial V^0} = \mathcal{D}\Phi + \bar{\mathcal{D}}\bar{\Phi} = 2L \ . \tag{4.2.2}$$

Im zweiten Schritt haben wir hier (3.1.11) eingesetzt. Da (4.2.2) eine Gleichung für V'^0 ist, können wir sie nach V'^0 auflösen, wobei die genaue Form vom expliziten Ausdruck für $U(V'^0)$ abhängt. Wir erhalten

$$V'^0 = h(L) \tag{4.2.3}$$

mit einer invertierbaren Funktion h. Setzten wir (4.2.3) zurück in (4.2.1) ein, so erhalten wir die ursprüngliche Wirkung für das massive lineare Multiplett

$$\begin{aligned} S = -\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} K(L) + \Bigg(\frac{1}{4}\int d^2\theta\Big(f_{AB}(N)(W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi) \\ + 2e_A\Phi(W^A - im^A\Phi)\Big) \ + \ \text{h.c.}\Bigg) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

mit

$$K(L) = 2h(L)L - U\left(h(L)\right) \ . \tag{4.2.5}$$

K und U hängen miteinander über die Legendre-Transformation zusammen .

Als nächstes wollen wir die Bewegungsgleichung für Φ_α bestimmen. Dafür formen wir zuerst die Wirkung etwas um. Wir betrachten nur die relevanten Terme, also nur Terme, die Φ_α enthalten. Wir können Φ_α stets schreiben als $\Phi_\alpha = \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Sigma$, wobei Σ ein allgemeines Superfeld ist. Das Ziel, ist die relevanten Terme so zu schreiben, daß sie nur von Σ explizit abhängen, so daß wir die Variation ausführen können.Variationsregeln für die Superfelder sind im Anhang D angegeben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \cdots + \int d^2\theta\Big(- \Phi W^0 - f_{AB}m^A m^B\Phi\Phi - if_{AB}m^A\Phi W^B - \frac{1}{2}ie_A m^A\Phi\Phi + \frac{1}{2}e_A\Phi W^A\Big) \\ &= \cdots + \int d^2\theta\Big(\Phi\big(- if_{AB}m^A W^B + \frac{1}{2}e_A W^A - W^0\big) - \big(f_{AB}m^A m^B + \frac{1}{2}ie_A m^A\big)\Phi\Phi\Big) \\ &= \cdots + \int d^2\theta\Big(\Phi\big(- if_{AB}m^A W^B + \frac{1}{2}e_A W^A - W^0\big) - (M^2 + iM_T^2)\Phi\Phi\Big) \ . \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

In der ersten Zeile haben wir (3.3.23) benutzt, um $-2V'^0L$ mit Hilfe von Φ_α auszuschreiben. Anschließend haben wir die Terme nach den Potenzen von Φ_α zusammengefaßt und, um die folgenden Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, die in (3.3.36) definierten Kopplungsfunktionen M^2 und M_T^2 eingesetzt. Wegen $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}f_{AB} = 0$ und $\Phi_\alpha = \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Sigma$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \cdots - 4\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\Big(\mathcal{D}\Sigma\Big(- if_{AB}m^A W^B + \frac{1}{2}e_A W^A - W^0\Big) - (M^2 + iM_T^2)\mathcal{D}\Sigma\Phi\Big) \\ &= \cdots + 4\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\Big(\Sigma\mathcal{D}\Big(- if_{AB}m^A W^B + \frac{1}{2}e_A W^A - W^0\Big) - \Sigma\mathcal{D}\big((M^2 + iM_T^2)\Phi\big)\Big) \ . \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Hier haben wir mit Hilfe von (A.3.4) den Übergang zum Integral über den vollständigen θ-$\bar{\theta}$-Raum gemacht und anschließend partiell integriert. Die Terme, die gleich einer totalen Ableitung sind, haben wir weggelassen.

Wie variieren nach Σ und erhalten

$$\mathcal{D}\Big((M^2 + iM_T^2)\Phi\Big) = -\frac{1}{2}\mathcal{D}\Big(i(m^A f_{AB} + \frac{i}{2}e_B)W^B + W^0\Big) \tag{4.2.8}$$

und erhalten als Bewegungsgleichung

$$\Phi_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{(im^A f_{AB} - \frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B + W_\alpha^0}{M^2 + M_T^2} \ . \tag{4.2.9}$$

Die Lösung von (4.2.8) läßt noch einen konstanten Spinor zu, der allerdings die Lorentzinvarianz von Φ_α zerstören würde.

Setzen wir (4.2.9) in die "first order form" (4.2.1) zurück ein, so erhalten wir folgende Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{4}\Big(\int d^2\theta \frac{1}{M^2 \ + \ iM_T^2}\Big((im^A f_{AB} - \ \frac{1}{2}e_B)W^B \ + \ W^0\Big)\Big((im^C f_{CD} \ - \ \frac{1}{2}e_D)W^D + W^0\Big) \\ + \ f_{AB}W^A W^B \ + \ \text{h.c.}\Big) \ + \ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} U(V'^0) \ .\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Um die Lagrangedichte übersichtlicher zu gestalten, führen wir eine $(n_V + 1) \times (n_V + 1)$-dimensionale Eichkopplungsmatrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ ein

$$\begin{aligned}\hat{f}_{AB} = f_{AB} + \frac{1}{\hat{f}_{00}}\hat{f}_{0A}\hat{f}_{0B} \ , \qquad \hat{f}_{00} = \frac{M^2 - iM_T^2}{M^4 + M_T^4} \ , \\ \hat{f}_{0A} = \hat{f}_{00}(im^B f_{AB} - \frac{1}{2}e_A) \ ,\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

wobei $\hat{A} = 0, A$ mit $A = 1, \ldots, n_V$ ist. Damit läßt sich die Lagrangedichte schreiben als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\int d^2\theta \hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} W^{\hat{A}} W^{\hat{B}} + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} U(V'^0) \tag{4.2.12}$$

mit $W^{\hat{A}} = (W^0, W^A)$. Der zweite Term weist darauf hin, daß es sich um die Lagrangedichte eines massiven Vektormultipletts handelt.

4.2.2 Anzahl der Freiheitsgrade und die Kopplungsmatrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$

Die Langrangedichte (4.2.12) enthält ein massives V'^0 und n_V masselose Vektormultipletts V^A. Wieviele Vektorfelder tatsächlich physikalisch sind, hängt von $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ ab (genauer vom Rang). Bevor wir die Matrix genauer unter die Lupe nehmen, zählen wir die Freiheitsgrade vor der Dualisierung. Ihre Anzahl soll unverändert bleiben. Dies würde uns auch einen Hinweis auf die notwendigen Eigenschaften von $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ geben, welche wir anschließend überprüfen können. Es genügt die bosonischen Freiheitsgrade zu zählen.[2] Außerdem soll die Übereinstimmung der Freiheitsgrade für die bosonischen und fermionischen Felder jeweils getrennt vorhanden sein. Wir zählen "on-shell":

[2]Die fermionischen Terme lassen sich aus den bosonischen mit Hilfe der SUSY-Transformationen stets bestimmen.

Vor der Dualisierung

Lineares Multiplett
- ein 1 reelles Skalarfeld C 1 FG
- ein massives antisymmetrisches Tensorfeld B_{mn} 3 FG

Vektormultipletts
- $2(n_V-1)$ reelle masselose Vektorfelder v^A $2(n_V-1)$ FG

Wie bereits in Abschnitt 2.5.2 erklärt wurde, spielt ein Vektorfeld die Rolle des Goldstoneteilchens. Es liefert dem antisymmetrischen Tensor im massiven Fall die notwendigen Freiheitsgrade.

Nach der Dualisierung haben wir eine Lagrangedichte für n_V+1 Vektorfelder, wobei eines davon massiv ist. In Abschnitt 2.5 haben wir gezeigt, daß n_V masselose und ein massives Vektormultiplett den $2(n_V)+4$ Freiheitsgraden entsprechen. Demnach haben wir zwei Freiheitsgrade nach der Dualisierung zuviel.

Das bedeutet, daß ein Vektorfeld unphysikalisch ist. Man muß dies auch an der Lagrangedichte sehen können. Die Information darüber steckt in der Kopplungsmatrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$.

Wir betrachten den bosonischen Teil von (4.2.12)[3]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\, f_{\hat{A}\hat{B}}F^{\hat{A}\,mn}F^{\hat{B}}_{mn}+\frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{\hat{A}\hat{B}}\epsilon^{mnpq}F^{\hat{A}}_{mn}F^{\hat{B}}_{pq}\\&-\frac{1}{4}\partial^2_{\mathrm{Re}\,A}U\Big(v^0_m+\partial_m(\mathrm{Im}\,A^0)\Big)\Big(v^{0\,m}+\partial^m(\mathrm{Im}\,A^0)\Big)-V\ .\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

Die Komponentenfelder von V^0 haben wir mit dem Index 0 versehen.

Wir sehen, daß vor dem kinetischen Term nur der Realteil der Kopplungsmatrix steht. Wegfall von den Freiheitsgraden bedeutet, daß ein $F^{\hat{A}}_{mn}$ oder eine lineare Kombination von $F^{\hat{A}}$'s verschwindet. Um das zu gewährleisten, muß Re $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ vom Rang n_V sein, also einen Eigenvektor zum Eigenwert Null haben. Und tatsächlich: Multipliziert man die Matrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ mit $m^{\hat{A}}=\binom{0}{m^A}$, so erhält man

$$\begin{pmatrix}\hat{f}_{00} & \hat{f}_{0A}\\ \hat{f}_{0B} & \hat{f}_{AB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ m^A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{f}_{0A}m^A\\ \hat{f}_{AB}m^A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\ -\frac{i}{2}e_B\end{pmatrix}\ .\tag{4.2.14}$$

Dabei hat man folgende Rechnungen ausgeführt:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{0A}m^A=&\hat{f}_{00}(im^Bf_{AB}-\frac{1}{2}e_A)m^A=i\hat{f}_{00}\Big(m^B\mathrm{Re}\,f_{AB}+i(m^B\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_A)\Big)m^A\\=&i\hat{f}_{00}(M^2+iM_T^2)=i\frac{M^2-iM_T^2}{M^4+M_t^4}(M^2+iM_T^2)=i\ ,\\[1em]\hat{f}_{AB}m^A=&\Big(f_{AB}-\frac{M^2-iM_T^2}{M^4+M_T^4}\Big(m^Cf_{AC}+\frac{i}{2}e_A\Big)\Big(m^Df_{BD}+\frac{i}{2}e_B\Big)\Big)m^A\\=&f_{AB}m^A-\frac{(M^2-iM_T^2)(M^2+iM_T^2)}{M^4+M_T^4}\Big(m^Df_{BD}+\frac{i}{2}e_B\Big)=-\frac{i}{2}e_B\ .\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

In beiden Fällen wurden zuerst die Definitionen der "gehuteten" Matrizen $\hat{f}_{0A}$ und $\hat{f}_{AB}$ (4.2.11) eingesetzt. Anschließend haben wir die Matrizen in den Real- und Imaginärteil zerlegt und die Definitionen für die Kopplungsfunktionen M^2 und M^2 (3.3.36) eingesetzt.

[3]Den Komponenteninhalt der einzelnen Termen der Lagrangedichte (4.2.12) haben wir bereits in (2.5.20) und (2.5.28) angegeben.

Wie man sieht, ist $m^{\hat{A}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert Null von Re $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ und Eigenvektor zu einem konstanten Eigenwert von Im $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$.[4] Es gibt damit ein Kombination von $F^{\hat{A}}$'s, für die der kinetische Term verschwindet und der topologische gleich einer totalen Ableitung ist. Damit ist gezeigt, daß die Anzahl physikalischer Freiheitsgrade nach der Dualisierung unverändert geblieben und daß die Information darüber in der Kopplungsmatrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ enthalten ist.

4.2.3 Lagrangedichte in Komponenten

Als nächstes geben wir den Inhalt der Lagrangedichte in Komponenten. Man bestimmt ihn analog zu dem Fall vor der Dualisierung. Aus dem Ausdruck (4.2.12) folgt in Komponenten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\, f_{\hat{A}\hat{B}} F^{\hat{A}\,mn} F^{\hat{B}}_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{\hat{A}\hat{B}} \epsilon^{mnpq} F^{\hat{A}}_{mn} F^{\hat{B}}_{pq} - \frac{1}{4} U'' v^0_m v^{0m} \\
&+ U''\big(F^0 F^{0*} - \frac{1}{2}\partial_m A^0 \partial^m A^0\big) - \frac{1}{2}U' D^0 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, \hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} D^{\hat{A}} D^{\hat{B}} \\
&- \frac{i}{2}\Big(\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} \lambda^{\hat{A}} \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}^{\hat{B}} + \hat{f}^*_{\hat{A}\hat{B}} \bar{\lambda}^{\hat{A}} \bar{\sigma}^m \partial_m \lambda^{\hat{B}}\Big) \qquad (4.2.16)\\
&+ \frac{1}{2}U''\big(i\sqrt{2}(\psi^0\lambda^0 - \bar{\psi}^0\bar{\lambda}^0) - i(\psi^0\sigma^m\partial_m\bar{\psi}^0 + \bar{\psi}^0\bar{\sigma}\partial_m\psi^0)\big) + \frac{1}{4}U''''\psi^0\psi^0\bar{\psi}^0\bar{\psi}^0 \\
&+ \frac{1}{2}U'''\big(-F^{0*}\psi^0\psi^0 - F^0\bar{\psi}^0\bar{\psi}^0 + \bar{\psi}^0\bar{\sigma}^m\psi^0 v^0_m\big) + \dots\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir alle Terme, die proportional zu den Ableitungen von $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ sind, ausgelassen haben. U' steht für $\partial_{\mathrm{Re}\,A^0} U$, wobei damit immer die unterste Komponente in der θ-Entwicklung gemeint ist, also $\partial_{\mathrm{Re}\,A^0} U|$. Für Details siehe Anhang E. Hier ist zu bemerken, daß wir hier die entartete Matrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ als Kopplungsfunktion verwendet haben. Den Feldinhalt nach der Eliminierung von (4.2.16) diskutieren wir am Ende dieses Kapitels.

Da wir später die Hilfsfelder $D^{\hat{A}}$ eliminieren wollen, geben wir an dieser Stelle den Ausdruck für die Lagrangedichte (4.2.16) mit den Kopplungsfunktionen f_{AB} an. Dafür setzen wir (4.2.11) in (4.2.16) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\frac{1}{2}U'\, D^0 + \frac{1}{2}U''\Bigg(2F^0F^{0*} - \partial_m(\mathrm{Re}A^0)\partial^m(\mathrm{Re}A^0) \\
&- \frac{1}{2}\Big(v^0_m + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,A^0)\Big)\Big(v^{0\,m} + 2\partial^m(\mathrm{Im}\,A^0)\Big) \\
&+ i\sqrt{2}(\chi^0\lambda^0 - \bar{\chi}^0\bar{\lambda}^0) - i(\chi^0\sigma^m\partial_m\bar{\chi}^0 + \bar{\chi}^0\bar{\sigma}\partial_m\chi^0)\Bigg) + \frac{1}{4}U''''\chi^0\chi^0\bar{\chi}^0\bar{\chi}^0 \\
&+ \frac{1}{2}U'''\Bigg(-F^{0*}\chi^0\chi^0 - F^0\bar{\chi}^0\bar{\chi}^0 + \bar{\chi}^0\bar{\sigma}^m\chi^0(v^0_m + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,A^0))\Bigg) \qquad (4.2.17)\\
&- \frac{i}{2}\Bigg(\frac{1}{M^2 + iM_T^2}\left(\lambda^0 + (im^A f_{AB} - \frac{1}{2}e_B)\lambda^B\right)\sigma^m\partial_m\left(\bar{\lambda}^0 - (im^E\bar{f}_{EF} + \frac{1}{2}e_F)\bar{\lambda}^F\right) \\
&- \frac{1}{M^2 - iM_T^2}\partial_m\left(\lambda^0 + (im^A f_{AB} - \frac{1}{2}e_B)\lambda^B\right)\sigma^m\left(\bar{\lambda}^0 - (im^E\bar{f}_{EF} + \frac{1}{2}e_F)\bar{\lambda}^F\right)\Bigg) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4 + M_T^4}\left(\left(D^0 - D^B(m^A\mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B)\right)^2 - D^A D^B m^E m^F \mathrm{Re} f_{EA} \mathrm{Re} f_{FB}\right)
\end{aligned}$$

[4] Im $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ hat keinen 0-Eigenwert, da sie invertierbar ist.

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{M_T^2}{M^4+M_T^4}\left(D^0 - D^B(m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B)\right) D^C m^E \mathrm{Re} f_{EC} \\
&- \frac{1}{4}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}(F^0_{mn} - J_{mn})(F^{0\,mn} - J^{mn}) \\
&- \frac{1}{8}\frac{M_T^2}{M^4+M_T^4}\epsilon^{mnpr}(F^0_{mn} - J_{mn})(F^0_{pr} - J_{pr}) \\
&- \frac{1}{4}\mathrm{Re} f_{AB} F^{A\,mn} F^B_{mn} + \frac{1}{2}\mathrm{Re} f_{AB} D^A D^B + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{AB}\epsilon^{mnpr} F^A_{mn} F^B_{pr} \\
&- \frac{i}{2}\left(f_{AB}\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar\lambda^B - \bar f_{AB}\partial_m\lambda^A\sigma^m\bar\lambda^B\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

Hier haben wir eine Kopplungsfunktion J_{mn} eingeführt.

$$
J^{mn} = -F^{B\,mn}(m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B) - \frac{1}{2}\epsilon^{mnpr} F^B_{pr} m^A \mathrm{Re} f_{AB}\ . \tag{4.2.18}
$$

4.2.4 Potential

Ein weiteres (außer der Anzahl der Freiheitsgrade) wichtiges Merkmal der dualen Theorie ist das gleiche Potential zur ursprünglichen Theorie. Das Potential ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
V =& - \frac{1}{2}U' D^0 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, \hat f_{\hat A\hat B} D^{\hat A} D^{\hat B} \\
=& - \frac{1}{2}U' D^0 - \frac{1}{2}\mathrm{Re} f_{AB} D^A D^B \\
&- \frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\left(\left(D^0 - D^B(m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B)\right)^2 - D^A D^B m^E m^F \mathrm{Re} f_{EA} \mathrm{Re} f_{FB}\right) \\
&- \frac{M_T^2}{M^4+M_T^4}\left(D^0 - D^B(m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B)\right) D^C m^E \mathrm{Re} f_{EC}\ .
\end{aligned} \tag{4.2.19}
$$

Hier haben wir die Definition von $\hat f_{\hat A\hat B}$ eingesetzt. Die Hilfsfelder D^0 und D^A lassen sich aus dem Potential in dieser Form nicht eliminieren. Der Grund, wie wir bereits gesehen haben, ist, daß $\mathrm{Re}\, \hat f_{\hat A\hat B}$ entartet ist und demnach einer der Hilfsfelder nicht linear unabhängig von den anderen ist. Das heißt, wir benötigen eine Nebenbedingung, um die lineare Abhängigkeit zu eliminieren.

Dafür schauen wir uns nochmal die Gleichung (4.2.9) an. Es ist die Bewegungsgleichung, die wir bei der Dualisierung aus der First-Order-Form erhalten haben:

$$
\begin{aligned}
\Phi_\alpha =& - \frac{1}{2}\frac{(im^A f_{AB} - \frac{1}{2}e_B)W^B_\alpha + W^0_\alpha}{M^2 + iM_T^2} \\
=& - \frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\left(- (m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B)W^B_\alpha + W^0_\alpha + \frac{M_T^2}{M^2} m^A \mathrm{Re}\, f_{AB} W^B_\alpha\right) \\
&- \frac{1}{2}\frac{iM_T^2}{M^4+M_T^4}\left((m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} + \frac{1}{2}e_B)W^B_\alpha - W^0_\alpha + \frac{M^2}{M_T^2} m^A \mathrm{Re}\, f_{AB} W^B_\alpha\right)\ .
\end{aligned} \tag{4.2.20}
$$

Hier haben wir den Nenner reell gemacht und die Kopplungsmatrix in den Real- und Imaginärteil zerlegt. An der Dualitätstransformation hat das ungeeichte chirale Spinorsuperfeld Φ_α

teilgenommen. Die unphysikalischen Freiheitsgrade wurden auch mittransformiert. Um sie zu eliminieren, schauen wir, welche Auswirkungen die Eichtransformationen (3.3.20) und (3.1.14) für diese Bewegungsgleichung haben. Wir setzen die Eichtransformationen ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha+\frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda = &-\frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\Big(-(m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B+W_\alpha^0+\frac{M_T^2}{M^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}W_\alpha^B\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\Big(-(m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)(-\frac{1}{4}m^B\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda)+\frac{M_T^2}{M^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}(-\frac{1}{4}m^B\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda)\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{iM_T^2}{M^4+M_T^4}\Big((m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B-W_\alpha^0+\frac{M^2}{M_T^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}W_\alpha^B\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{iM_T^2}{M^4+M_T^4}\Big((m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)(-\frac{1}{4}m^B\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda)+\frac{M^2}{M_T^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}(-\frac{1}{4}m^B\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda)\Big)\ .\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Weiter setzen wir die Definitionen der Kopplungsfunktionen M^2 und M_T^2 (3.3.36) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha+\frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda = &-\frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\Big(-(m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B+W_\alpha^0+\frac{M_T^2}{M^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}W_\alpha^B\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\Big(\frac{1}{4}M_T^2\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda-\frac{1}{4}M_T^2\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{iM_T^2}{M^4+M_T^4}\Big((m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B-W_\alpha^0+\frac{M^2}{M_T^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}W_\alpha^B\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{iM_T^2}{M^4+M_T^4}\Big(-\frac{1}{4}M_T^2\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda-\frac{1}{4}\frac{M^4}{M_T^2}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda\Big)\ .\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Weiteres Zusammenfassen der Terme ergibt

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha+\frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda = &-\frac{1}{2}\frac{M^2}{M^4+M_T^4}\Big(-(m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B+W_\alpha^0+\frac{M_T^2}{M^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}W_\alpha^B\Big)\\ &-\frac{1}{2}\frac{iM_T^2}{M^4+M_T^4}\Big((m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B)W_\alpha^B-W_\alpha^0+\frac{M^2}{M_T^2}m^A\mathrm{Re}\,f_{AB}W_\alpha^B-\frac{1}{4}\frac{M^4+M_T^4}{M_T^2}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda\Big)\ .\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Da wir über Λ frei verfügen, können wir Λ so wählen, daß die zweite Klammer komplett verschwindet. In den Komponentenfeldern entspricht sie

$$\Big(m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B\Big)D^B-D^0+\frac{M^2}{M_T^2}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^AD^B=0 \tag{4.2.24}$$

für die Hilfsfelder D^0 und D^A. Diese Nebenbedingung ist äquivalent zur Wess-Zumino-Eichung, die wir für Φ_α gewählt haben. Das chirale Spinorsuperfeld Φ_α hat zwei reelle Skalarfelder, eins von den beiden, nämlich E, war unphysikalisch und konnte in der Wess-Zumino-Eichung zu Null gesetzt werden. Dieses Feld entspricht in der dualen Theorie dem Ausdruck mit dem Faktor i.

Mit Hilfe der gewonnenen Nebenbedingung eliminieren wir D^0 und erhalten

$$\begin{aligned}V=&-U'\Big(\frac{M^2}{M_T^2}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^A+m^A\mathrm{Im}\,f_{AB}+\frac{1}{2}e_B\Big)D^B\\ &-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{Re}\,f_{AB}+\frac{M^2}{M_T^4}m^Cm^D\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}\Big)D^AD^B\ .\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

Jetzt ist es möglich, die Hilfsfelder zu eliminieren. Die Bewegungsgleichungen sind

$$D^A = -\frac{1}{4}U' \ \mathrm{Re}\, f^{-1\,AC}\left(e_C + 2\mathrm{Im}\, f_{BC} m^B\right) \ . \tag{4.2.26}$$

Einsetzen in (4.2.25) ergibt

$$V = \frac{1}{32}\left(U'\right)^2 \left(\left(e_A + 2\mathrm{Im}\, f_{AC} m^C\right) \mathrm{Re}\, f^{-1\,AB}\left(e_B + 2\mathrm{Im}\, f_{BD} m^D\right) + 4\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A m^B \right) \ . \tag{4.2.27}$$

Wir sehen, daß das Potential die gleiche Gestalt hat wie vor der Dualisierung (3.3.34). Das skalare Feld C des linearen Multipletts entspricht in der dualen Formulierung dem Term $\frac{1}{2}U'$.

Wir zeigen, daß die kinetischen Terme auch übereinstimmen. Wir schrieben sie aus (3.2.3) und (4.2.16) noch mal hin

$$\mathcal{L}_C = -\frac{1}{4}K''(C)\partial_m C \partial^m C \ ,$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Re}\, A} = -\frac{1}{2}U''(\mathrm{Re}\, A)\partial_m A^0 \partial^m A^0 \ .$$

Wir setzen $C = \frac{1}{2}U'$ in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= -\frac{1}{16}K''\left(\tfrac{1}{2}U'\right) U''(\mathrm{Re}\, A) U''(\mathrm{Re}\, A)\partial_m(\mathrm{Re}\, A)\partial^m(\mathrm{Re}\, A) \\ &= -\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}\, A}K'\left(\tfrac{1}{2}U''\right)(\mathrm{Re}\, A)\partial_m(\mathrm{Re}\, A)\partial^m(\mathrm{Re}\, A) \ . \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

wobei wir, wie im masselosen Fall (4.1.18) die Kettenregel ausgenutzt haben. $K(C)$ und $U(\mathrm{Re}\, A)$ hängen miteinander über die Legendre-Transformation zusammen:

$$K(L) = -U(V'^{0}) + 2V^0 L \ . \tag{4.2.29}$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung für die Komponentenfelder C und $\mathrm{Re}\, A$:

$$K'(C) = K'\left(\tfrac{1}{2}U'\right) = 4\mathrm{Re}\, A \ . \tag{4.2.30}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (4.2.28) ein, so erhält man genau den kinetischen Term für $\mathrm{Re}\, A$.

Zuletzt geben wir den Ausdruck für die Lagrangedichte nach der Eliminierung der Hilfsfelder[5] in der unitären Eichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\, f_{\hat{A}\hat{B}} F^{\hat{A}\,mn} F^{\hat{B}}_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{\hat{A}\hat{B}} \epsilon^{mnpq} F^{\hat{A}}_{mn} F^{\hat{B}}_{pq} - \frac{1}{4}U'' v^0_m v^{0m} \\ &- \frac{1}{2}U''\partial_m(\mathrm{Re}\, A^0)\partial^m(\mathrm{Re}\, A^0) - \frac{i}{2}\left(\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}\lambda^{\hat{A}}\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}^{\hat{B}} + \hat{f}^*_{\hat{A}\hat{B}}\bar{\lambda}^{\hat{A}}\bar{\sigma}^m\partial_m\lambda^{\hat{B}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}U''\left(i\sqrt{2}(\psi^0\lambda^0 - \bar{\psi}^0\bar{\lambda}^0) - i(\psi^0\sigma^m\partial_m\bar{\psi}^0 + \bar{\psi}^0\bar{\sigma}\partial_m\psi^0)\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(U'''' - \frac{U'''}{U''}\right)\psi^0\psi^0\bar{\psi}^0\bar{\psi}^0 + \frac{1}{2}U'''\bar{\psi}^0\bar{\sigma}^m\psi^0 v^0_m - V \ + \ \ldots \ , \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

wobei wir wieder die Terme, die proportional zu den Ableitungen von $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ sind, ausgelassen haben haben. Dies schließt unsere Disskusion der dualen Wirkung ab.

[5] Die Eliminierung des Hilfsfeldes F^0 haben wir bereits in (2.5.29) diskutiert.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die Wirkung für ein massives lineares Multiplett, welche man durch Kaluza-Klein-Reduktion auf IIB Orientifolds erhält [4], mit Hilfe des Superfeldformalismus der $N = 1$ Supersymmetrie reproduziert und anschließend ihre Dualitätstransformationen diskutiert.

Wir haben die Komponentenform für das chirale Spinor- und das lineare Superfeld bestimmt. Wir haben die Superfeldwirkung für das masselose Multiplett angegeben und ihre Komponentenform bestimmt. Ferner, motiviert durch die Ergebnisse der Arbeit [4], haben wir eine $N = 1$ Wirkung für ein massives lineares Multiplett, welches an n_V Vektor- und n_c chirale Multipletts gekoppelt ist, aufgestellt. Wir haben die Komponentenform dieser Wirkung bestimmt und gezeigt, daß das sich daraus ergebende skalare Potential mit dem Potential, der man bei der Kaluza-Klein-Reduktion von IIB Orientifolds erhält, übereinstimmt. Das Potential hat insofern eine "ungewöhnliche" Form, als daß es einen zusätzlichen Term enthält, welcher nicht durch das Eliminieren von Hilfsfeldern zustande kommt. Bei dem zusätzlichen Term handelt es sich um den Massenterm für das Skalarfeld aus dem linearen Multiplett.

Wir haben die Dualität zwischen dem linearen Multiplett im masselosen Fall und dem chiralen Multiplett auf der Ebene der Superfelder gezeigt. Ferner haben wir gezeigt, daß das an n_V Vektor- und n_c chirale Superfelder gekoppelte lineare Multiplett im massiven Fall zu einem massiven Vektormultiplett, welches an $n_V - 1$ Vektor- und n_c chirale Superfelder gekoppelt ist, dual ist.

Anhang A

Identitäten

A.1 Konventionen und Spinoralgebra

Wir verwenden in dieser Arbeit die Notation von [17]. Eine umfangreiche Liste mit Identitäten ist in [11] und [25] zu finden.

Die Spinoren sind zweikomponentige Weyl-Spinoren, die zu einem Diracspinor zusammengefaßt werden können:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{A.1.1}$$

Die Spinoren tragen gepunktete und ungepunktete Indizes vom Anfang des griechischen Alphabets.

- ε-Symbole, Minkowskimetrik:

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = \varepsilon_{\dot{2}\dot{1}} = 1 \tag{A.1.2}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha} = \delta^\beta_\gamma, \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \tag{A.1.3}$$

$$\varepsilon_{0123} = -1 \tag{A.1.4}$$

$$\text{Minkowskimetrik: } \eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{A.1.5}$$

- σ-Matrizen:

$$\sigma^m = (-\mathbb{1}, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^m = (-\mathbb{1}, -\sigma^i) \tag{A.1.6}$$

- Hoch- und Hinunterschieben der Indizes:

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \Rightarrow \psi^1 = \psi_2,\ \psi^2 = -\psi_1 \tag{A.1.7}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}}, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}} \Rightarrow \bar{\psi}^{\dot{1}} = \bar{\psi}_{\dot{2}},\ \bar{\psi}^{\dot{2}} = -\bar{\psi}_{\dot{1}} \tag{A.1.8}$$

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^m_{\beta\dot{\beta}} \tag{A.1.9}$$

$$\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta} \tag{A.1.10}$$

- γ-Matrizen:

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{A.1.11}$$

- Spinorprodukte:

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi \tag{A.1.12}$$
$$\bar\psi\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = -\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha} = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\psi \tag{A.1.13}$$

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = \bar\psi\bar\chi = \bar\chi\bar\psi \tag{A.1.14}$$

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, \qquad \theta_\alpha\theta_\beta = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \tag{A.1.15}$$
$$\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta, \qquad \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta \tag{A.1.16}$$

$$\theta_\alpha\theta^\beta = -\tfrac{1}{2}\theta\theta\delta_\alpha^\beta, \qquad \theta^\alpha\theta_\beta = \tfrac{1}{2}\theta\theta\delta_\beta^\alpha \tag{A.1.17}$$
$$\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}, \qquad \bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = -\tfrac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\delta_{\dot\beta}^{\dot\alpha} \tag{A.1.18}$$
$$\tag{A.1.19}$$

- Rechenregeln für σ-Matrizen:

$$\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{n\dot\alpha\beta} = -\eta^{mn}\delta_\alpha^\beta + 2(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta \tag{A.1.20}$$

$$(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta = \tfrac{1}{4}(\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{n\dot\alpha\beta} - \sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\beta}) \tag{A.1.21}$$
$$(\sigma^{0i})_\alpha{}^\beta = \tfrac{1}{2}(\sigma^i)_\alpha{}^\beta, \quad (\sigma^{ij})_\alpha{}^\beta = -\tfrac{1}{2}i\varepsilon^{ijk}(\sigma^k)_\alpha{}^\beta \tag{A.1.22}$$

$$\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\sigma^n_{\alpha\dot\beta} = -\eta^{mn}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} + 2(\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{A.1.23}$$

$$(\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{4}(\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\sigma^n_{\alpha\dot\beta} - \bar\sigma^{n\dot\alpha\alpha}\sigma^m_{\alpha\dot\beta}) \tag{A.1.24}$$
$$(\bar\sigma^{0i})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}(\bar\sigma^i)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}, \quad (\bar\sigma^{ij})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}i\varepsilon^{ijk}(\bar\sigma^k)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{A.1.25}$$

$$(\sigma^{mn})_\alpha{}^\alpha = (\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\alpha} = 0 \tag{A.1.26}$$

$$\mathrm{tr}(\sigma^m\bar\sigma^n) = -2\eta^{mn} \tag{A.1.27}$$

$$\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{\dot\beta\beta}_m = -2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta} \tag{A.1.28}$$

$$(\sigma^m)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma_m)_{\beta\dot\beta} = -2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \tag{A.1.29}$$

$$\sigma^a\bar\sigma^b\sigma^c = \eta^{ac}\sigma^b - \eta^{bc}\sigma^a - \eta^{ab}\sigma^c + i\varepsilon^{abcd}\sigma_d \tag{A.1.30}$$
$$\bar\sigma^a\sigma^b\bar\sigma^c = \eta^{ac}\bar\sigma^b - \eta^{bc}\bar\sigma^a - \eta^{ab}\bar\sigma^c - i\varepsilon^{abcd}\bar\sigma_d \tag{A.1.31}$$

$$(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta\varepsilon_{\beta\gamma} = (\sigma^{mn})_\gamma{}^\beta\varepsilon_{\beta\alpha} \tag{A.1.32}$$

$$\varepsilon^{mnkl}\sigma_{kl} = -2i\sigma^{mn}, \quad \varepsilon^{mnkl}\bar\sigma_{kl} = 2i\bar\sigma^{mn} \tag{A.1.33}$$

A.2 Bispinoren

$$F_{(\beta\alpha)} = +\frac{1}{2}(\sigma^{ba}\epsilon)_{\beta\alpha}F_{ba}\ y\ , \qquad F_{(\dot\beta\dot\alpha)} = -\frac{1}{2}(\epsilon\bar\sigma^{ba})_{\dot\beta\dot\alpha}F_{ba}\ , \tag{A.2.1}$$

$$F_{ba} = (\bar\sigma_{ba}\epsilon)^{\dot\beta\dot\alpha}F_{(\dot\alpha\dot\beta)} - (\epsilon\sigma_{ba})^{\beta\alpha}F_{(\alpha\beta)}\ , \tag{A.2.2}$$

$$F^{ba}F_{ba} = 2F_{(\beta\alpha)}F^{(\beta\alpha)} + 2F_{(\dot\beta\dot\alpha)}F^{(\dot\beta\dot\alpha)}\ , \tag{A.2.3}$$

$$*F^{dc} = \frac{1}{2}\epsilon^{dcba}F_{ba} \tag{A.2.4}$$

$$*F^{ba}F_{ba} = 2iF_{(\dot\beta\dot\alpha)}F^{(\dot\beta\dot\alpha)} - 2iF_{(\beta\alpha)}F^{(\beta\alpha)} \tag{A.2.5}$$

A.3 Integration über die Grassmannkoordinaten

Da jedes Superfeld sich in eine Reihe mit Grassmannparametern schreiben läßt [17, 8], reicht es folgende Integrale zu erklären:

$$\int d\theta_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha{}^\beta\ , \qquad \int d\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}. \tag{A.3.1}$$

Die Produktmaße sind definiert als

$$d^2\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}d\theta_\alpha d\theta_\beta\ , \qquad \int d^2\bar\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}d\bar\theta_{\dot\alpha}d\bar\theta_{\dot\beta}\ . \tag{A.3.2}$$

Die Integrale über die Produktmaße sind

$$\int d^2\theta\ \theta^2 = 1\ , \qquad \int d^2\bar\theta\ \bar\theta^2 = 1\ . \tag{A.3.3}$$

Die Integration über die θ-Parameter des Superraumes läßt sich auch stets mit Hilfe der kovarianten Ableitungen schreiben:

$$\begin{aligned}\int d^2\theta d^2\bar\theta\, v(x,\theta,\bar\theta) &= \left(-\frac{1}{4}\int d^2\theta\bar{\mathcal{D}}^2 v(x,\theta,\bar\theta)\right)\bigg|_{\bar\theta=0} = \left(\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2 v(x,\theta,\bar\theta)\right)\bigg|_{\theta=\bar\theta=0}\ ,\\ \int d^2\theta d^2\bar\theta\, v(x,\theta,\bar\theta) &= \left(-\frac{1}{4}\int d^2\bar\theta\mathcal{D}^2 v(x,\theta,\bar\theta)\right)\bigg|_{\theta=0} = \left(\frac{1}{16}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}^2 v(x,\theta,\bar\theta)\right)\bigg|_{\theta=\bar\theta=0}\ ,\end{aligned} \tag{A.3.4}$$

wobei wir Terme, die gleich der totalen Ableitung vernachlässigt haben.

A.3.1 Identitäten mit kovarianten Ableitungen

Die Kovarinaten Ableitung sind in (2.3.8) definiert. Hier sind einige der Identitäten, die bei den Rechnungen mit den Superfeldern häufig auftreten.

$$\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{D}^2 \ , \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}^2 \ , \tag{A.3.5}$$

$$\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\gamma = 0 \ , \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma} = 0 \ , \tag{A.3.6}$$

$$[\mathcal{D}^2, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}] = -4i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \mathcal{D}^\alpha \ , \qquad [\bar{\mathcal{D}}^2, \mathcal{D}_\alpha] = 4i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \ , \tag{A.3.7}$$

$$\mathcal{D}^\alpha \bar{\mathcal{D}}^2 \mathcal{D}_\alpha = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \ , \tag{A.3.8}$$

$$\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2 + \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha = 16\Box \ , \tag{A.3.9}$$

$$\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}^2 = 0 \ , \qquad \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\bar{\mathcal{D}}^2 = 0 \ , \tag{A.3.10}$$

$$\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}^2 = 16\mathcal{D}^2\Box \ , \qquad \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2 = 16\bar{\mathcal{D}}^2\Box \ . \tag{A.3.11}$$

Anhang B

Chirales Spinorsuperfeld

Das chirale Spinorsuperfeld Φ_α ist definiert durch den Constraint $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\Phi_\alpha = 0$. Um es zu lösen, geht man wie im Falle des chiralen Skalarfeldes vor. Wir definieren neue Variablen $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar\theta$ und $\bar\theta$, für die gilt

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}(x^m + i\theta\sigma^m\bar\theta) = 0, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\theta = 0. \tag{B.1}$$

Φ_α läßt sich also schreiben als

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha(y) + \theta^\beta T_{\beta\alpha}(y) + \theta\theta\lambda_\alpha(y) \ . \tag{B.2}$$

Da Φ_α einen Spinorindex trägt, kann es sich bei der $(\theta T)_\alpha$-Komponente höchstens um einen Tensor zweiter Stufe handeln. Für weitere Betrachtungen zerlegen wir T in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil.

$$\begin{aligned}\theta^\beta T_{\beta\alpha} =& \theta^\beta\big(T_{(\alpha\beta)} + T_{[\beta\alpha]}\big) = \theta^\beta\big(T_{(\alpha\beta)} + \epsilon_{\beta\alpha}T\big) = \theta_\gamma\big(\epsilon^{\beta\gamma}T_{(\alpha\beta)} + \epsilon^{\beta\gamma}\epsilon_{\beta\alpha}T\big)\\ =& \theta_\gamma\big(\epsilon^{\beta\gamma}T_{(\alpha\beta)} - \delta_\alpha{}^\gamma T\big) = \theta_\gamma\big(\epsilon^{\beta\gamma}\big[\frac{1}{2}(\sigma^{mn}\epsilon)_{\alpha\beta}T_{mn}\big] - \delta_\alpha{}^\gamma T\big)\\ =& \theta_\gamma\big(\frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma T_{mn} - \delta_\alpha{}^\gamma T\big) \ .\end{aligned} \tag{B.3}$$

Beim letzten Schritt wurde die Identität (A.2.1) ausgenutzt. Mit $B_{mn} = -T_{mn}$ und $C+iE = 2T$ erhalten wir

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma(C+iE)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^a\bar\sigma^b)_\alpha{}^\gamma B_{ab}\right) + \theta\theta\lambda_\alpha \ . \tag{B.4}$$

Um Φ_α nur mit Hilfe der Felder aus dem linearen Multiplett zu schreiben, setzen wir

$$\lambda_\alpha = \eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m\bar\chi^{\dot\alpha}$$

und erhalten damit

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma(C+iE)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^a\bar\sigma^b)_\alpha{}^\gamma B_{ab}\right) + \theta\theta\left(\eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m\bar\chi^{\dot\alpha}\right) \ . \tag{B.5}$$

Analog erhält man das komplex konjugierte Multiplett

$$\bar\Phi_{\dot\alpha} = \bar\chi_{\dot\alpha} - \bar\theta^{\dot\gamma}\left(\frac{\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(C-iE)}{2} - \frac{1}{4}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\bar\sigma^a\sigma^b)^{\dot\beta}{}_{\dot\gamma}B_{ab}\right) + \bar\theta\bar\theta\left(\bar\eta_{\dot\alpha} + i\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\sigma^{\dot\beta\beta}\partial_m\chi_\beta\right) \ . \tag{B.6}$$

Geht man zu den urspünglichen Variablen $x,\ \theta,\ \bar\theta$ zurück und setzt Φ_α und $\bar\Phi_{\bar\theta}$ in $L = \frac{1}{2}(\mathcal{D}\Phi + \bar{\mathcal{D}}\bar\Phi)$ ein, so erhält man die θ-Entwicklung des linearen Multipletts. Wir demonstrieren das, indem wir die θ-Entwicklung von Φ_α einsetzen. In Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, daß wir dabei Φ_α in der Wess-Zumino-Eichung nehmen dürfen

$$\Phi_\alpha = -\,\theta_\gamma \left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma C}{2} + \frac{1}{4} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \right) + \theta\theta\eta_\alpha \ . \tag{B.7}$$

Wir berechnen den Teil $\frac{1}{2}\mathcal{D}^\alpha \Phi_\alpha$. Der hermitesch konjugierte Teil läßt sich dann daraus ablesen. Wir machen die Rechnung in der chiralen Darstellung (siehe den Abschnitt 2.4), das heißt alle Felder sind Funktionen von $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{D}^\alpha \Phi_\alpha =& \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\mathcal{D}_\beta \Phi_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta} \left(\partial_\beta + 2i\sigma^m_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) \Phi_\alpha \\
=& \frac{1}{2} C(y) + \frac{1}{8} \underbrace{(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\alpha B_{mn}(y)}_{=0 \ \text{,wegen(A.1.26)}} + \theta\eta(y) - \frac{i}{2}\eta\sigma^p\bar{\eta}\partial_p C(y) + \frac{i}{4}\theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} (\sigma^m \bar{\sigma}^n \sigma^p)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_p B_{mn}(y) \\
=& \frac{1}{2} C(y) + \theta\eta(y) - \frac{i}{2}\theta\sigma^p\bar{\theta}\partial_p C(y) - \frac{1}{4}\theta\sigma_q\bar{\theta}\epsilon^{mnpq}\partial_p B_{mn}(y) + \frac{i}{2}\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial^m B_{mn}(y) \ .
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Wir haben die Definition der kovarinaten Ableitung (2.4.4) und die θ-Entwicklung von Φ_α (B.7) eingesetzt. Für die Umformung des Termen mit drei σ haben wir (A.1.30) verwendet.

Wir setzen jetzt $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ ein und entwickeln die Komponentenfelder um x^m

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{D}^\alpha \Phi_\alpha =& \frac{1}{2} C(x) + \frac{i}{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m C(x) - \frac{1}{8}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C(x) + \theta\eta(x) - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta(x) \\
&+ \frac{i}{2}\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial^m B_{mn}(x) + \frac{1}{4}\theta\sigma^m\bar{\theta}\epsilon_{mnpq}\partial^n B^{pq}(x) \ ,
\end{aligned} \tag{B.9}$$

wobei wir hier einige Terme bereits zusammengefaßt haben. Beim letzten Term haben wir die Indizes umgestellt, was ein Vorzeichenwechsel bewirkt hat. Den letzten Term schreiben wir jetzt um

$$\begin{aligned}
\epsilon_{mnpq}\partial^n B^{pq} =& \frac{1}{6}\epsilon_{mnpq} \left(\partial^n B^{pq} + \partial^p B^{qn} + \partial^q B^{np} - \partial^n B^{qp} - \partial^q B^{pn} - \partial^p B^{nq} \right) \\
=& \epsilon_{mnpq}\partial^{[n} B^{pq]} = \epsilon_{mnpq} H^{npq} \ ,
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Wobei wir $H^{npq} = \partial^{[n} B^{pq]}$ definiert haben. Addieren wir zu B.9 den hermitesch konjugierten Teil, so erhalten wir die θ-Entwicklung des linearen Superfeldes (3.1.7)

$$L = C + \theta\eta + \bar{\theta}\bar{\eta} + \frac{1}{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}\epsilon_{mnpq}H^{npq} - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C \ . \tag{B.11}$$

Anhang C

Lagrangedichte in Komponenten

Das Ziel ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{kin}} + \mathcal{L}_{\mathrm{m}} \tag{C.1}$$

in Komponenten zu bestimmen, wobei

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = \int d^4\theta K(L) \ , \tag{C.2}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^2\theta \left(f_{AB}(N)(W^\alpha - 2im\Phi^\alpha)(W_\alpha - 2im\Phi_\alpha) + 2e_A\Phi^\alpha(W_\alpha^A - im^A\Phi_\alpha) \right) + \text{h.c.} \tag{C.3}$$

C.1 $K(L)$

Um $K(L)$ mit Hilfe der Komponentenfelder schreiben zu können, bestimmen wir seine Taylorentwicklung nach Potenzen von X

$$K(L) = K(L| + X)$$

mit $X = L - L| = \theta\eta + \bar{\theta}\bar{\eta} + \frac{1}{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}\epsilon_{mnpq}H^{npq} - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C$ und $L| = C$.

$$K(L| + X) = K(L)| + \left.\frac{\partial K(L)}{\partial C}\right| X + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 K(L)}{\partial C^2}\right| X^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 K(L)}{\partial C^3}\right| X^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{\partial^4 K(L)}{\partial C^4}\right| X^4 \ . \tag{C.1}$$

Die Reihe ist endlich, da $X^5 = 0$. Die $\theta^2\bar{\theta}^2$-Komponente von den Potenzen von X ist

$$\begin{aligned} X^2|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \frac{i}{2}(\eta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} + \bar{\eta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta) + \frac{3}{4}H_{mnp}H^{mnp} \ , \\ X^3|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \frac{3}{4}\eta\sigma^m\bar{\eta}\epsilon_{mnpq}H^{npq} \ , \\ X^4|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= \frac{1}{2}\eta\eta\bar{\eta}\bar{\eta} \ . \end{aligned} \tag{C.2}$$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck für $K(L)|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$:

$$\begin{aligned} K(L)|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = -\frac{1}{4}\left.\frac{\partial K(L)}{\partial C}\right|\Box C + \frac{1}{4}\left.\frac{\partial^2 K(L)}{\partial C^2}\right| \left(i(\eta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} + \bar{\eta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta) + \frac{3}{2}H_{mnp}H^{mnp} \right) \\ \frac{1}{8}\left.\frac{\partial^3 K(L)}{\partial C^3}\right| \eta\sigma^m\bar{\eta}\epsilon_{mnpq}H^{npq} + \frac{1}{48}\left.\frac{\partial^4 K(L)}{\partial C^4}\right| \eta\eta\bar{\eta}\bar{\eta} \ . \end{aligned} \tag{C.3}$$

C.2 $\left(f_{AB}(N)(W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big|_{\theta^2}$

Wir multiplizieren die θ-Entwicklungen von $f_{AB}(N)$ (2.5.18) und $(W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)$ miteinander und projizieren die θ^2-Komponente heraus.

$$\begin{aligned}\left(f_{AB}(N)(W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big|_{\theta^2} &= f_{AB}(A)\left((W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big|_{\theta^2}\\ &-\frac{1}{\sqrt{2}}\chi\frac{\partial f_{AB}(A)}{\partial A}\left((W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big|_{\theta}\\ &+\left(F\frac{\partial f_{AB}(A)}{\partial A} - \frac{1}{2}\chi\chi\frac{\partial^2 f_{AB}(A)}{\partial A\partial A}\right)\left((W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big| \;.\end{aligned} \tag{C.1}$$

Die einzelnen Summanden ergeben sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}f_{AB}\left((W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big|_{\theta^2} &= f_{AB}\Bigg(- 4m^A m^B\left(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{8}B^{mn}B_{mn} + \frac{i}{16}\epsilon^{mnpq}B_{mn}B_{pq}\right)\\ &- 4im^A\left(-i\eta\lambda^B - \frac{1}{2}CD^B + \frac{i}{4}B^{mn}F^B_{mn} - \frac{1}{8}\epsilon^{mnpq}B_{mn}F^B_{pq}\right)\\ &- 2i\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}^B - \frac{1}{2}F^{A\ mn}F^B_{mn} + D^AD^B - \frac{i}{4}\epsilon^{mnpq}F^A_{mn}F^B_{pq}\Bigg) \;,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sqrt{2}}\chi\frac{\partial f_{AB}(A)}{\partial A}\left((W - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi)\right)\Big|_{\theta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\chi\frac{\partial f_{AB}(A)}{\partial A}\Big(- 2im^A(i\lambda^BC - i(\sigma^{mn}\epsilon)\lambda^BB_{mn})\\ &- 2i\lambda^AD^B + 2(\sigma^{mn}\epsilon)\lambda^AF^B_{mn} \;,\end{aligned}$$

$$\left((W^A - 2im^A\Phi)(W^B - im^B\Phi)\right)\Big| = -\lambda^A\lambda^B \;. \tag{C.2}$$

C.3 $\left(e_A\Phi(W^A - im^A\Phi)\right)\Big|_{\theta^2}$

$$\begin{aligned}\left(e_A\Phi(W^A - im^A\Phi)\right)\Big|_{\theta^2} =& e_A\left(-i\eta\lambda^A - \frac{1}{2}CD^A + \frac{i}{4}B^{mn}F^A_{mn} - \frac{1}{8}\epsilon^{mnpq}B_{mn}F^A_{pq}\right)\\ &- ie_Am^A\left(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{8}B^{mn}B_{mn} + \frac{i}{16}\epsilon^{mnpq}B_{mn}B_{pq}\right) \;.\end{aligned} \tag{C.1}$$

Anhang D

Dualitätstransformationen

D.1 Dualisierung in Superfeldern

Wenn wir in dieser Arbeit davon sprechen, daß zwei Multipletts zueinander dual sind (z.B. das chirale und das masselose lineare Multiplett), dann meinen wir das im folgenden Sinne: Startet man mit einer allgemeinen Funktion, die beide Multipletts enthält, und eliminiert man eins der beiden durch seine Bewegungsgleichung, so erhält man die Lagrangedichte für das übrige Multiplett.

Diese Prozedur kann sowohl auf der Ebene der Superfelder wie auch auf der Ebene der Komponentenfelder ausgeführt werden. Als technisches Hilfsmittel benötigt man Variationsregeln für die Superfelder.

Sei Φ ein chirales Feld. Es läßt sich immer in der Form $\Phi = \bar{\mathcal{D}}^2\Sigma$ darstellen, wobei Σ ein allgemeines Superfeld ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi(x,\theta,\bar{\theta})}{\delta\Phi(x',\theta',\bar{\theta}')} &= \frac{\delta\Phi(x,\theta,\bar{\theta})}{\delta\Sigma(x',\theta',\bar{\theta}')} = \bar{\mathcal{D}}^2\delta^4(x-x')\delta^2(\theta-\theta')\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')\ , \\ \frac{\delta\Sigma(x,\theta,\bar{\theta})}{\delta\Sigma(x',\theta',\bar{\theta}')} &= \delta^4(x-x')\delta^2(\theta-\theta')\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')\ . \end{aligned} \tag{D.1}$$

Für ein Vektormultiplett $V(x,\theta,\bar{\theta})$ gilt

$$\frac{\delta V(x,\theta,\bar{\theta})}{\delta V(x',\theta',\bar{\theta}')} = \delta^4(x-x')\delta^2(\theta-\theta')\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')\ . \tag{D.2}$$

In diesem Anhang zeigen wir die Dualität zwischen dem chiralen und dem masselosen linearen Multiplett im einfachsten Fall, wenn die Kopplungsfunktionen alle gleich eins gesetzt sind.

Die Lagrangedichte für ein masselose lineare Multiplett L ist

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} L^2 \tag{D.3}$$

und für ein chirales Multiplett χ

$$S = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}\chi\bar{\chi}\ . \tag{D.4}$$

Die Behauptung ist, daß man beide Wirkungen aus einer allgemeinen (sogenannten "first order") Wirkung herleiten kann.

Wir starten mit der Wirkung

$$S = \int d^4 d^2\theta d^2\bar{\theta}\Big(-\frac{1}{2}X^2 + (\chi + \bar{\chi})X)\Big) \tag{D.5}$$

mit einem allgemeinen reellen (gleich dem reellen Vektormultiplett) Multiplett. Als erstes variieren wir nach X und erhalten als Bewegungsgleichung

$$X = \chi + \bar{\chi}\ . \tag{D.6}$$

Zurückeinsetzen in (D.5) liefert die Wirkung für das chirale Multiplett. Um nach χ zu variieren, schreiben wir es als $\chi = \bar{\mathcal{D}}^2\Sigma$ und verwenden die Formel (D.1).

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 d^2\theta d^2\bar{\theta}\Big(-\frac{1}{2}X^2 + (\bar{\mathcal{D}}^2\Sigma + \mathcal{D}^2\bar{\Sigma})X\Big) \\ &= \int d^4 d^2\theta d^2\bar{\theta}\Big(-\frac{1}{2}X^2 + \Sigma\mathcal{D}^2 X + \bar{\Sigma}^2 X\Big) \end{aligned} \tag{D.7}$$

In der zweiten Zeile haben wir zweimal partiell integriert. Als Bewegungsgleichungen für Σ und $\bar{\Sigma}$ erhalten wir

$$\bar{\mathcal{D}}^2 X = \mathcal{D}^2 X = 0 \tag{D.8}$$

Dies ist gerade die Definition (3.1.1) des linearen Multipletts. Zurückeinsetzen in (D.5) liefert die Wirkung für das masselose lineare Multiplett.

D.2 Dualisierung in Komponenten

Analog zu Dualisierung auf der Ebene der Superfelder können wir die Dualisierung auch in den Komponentenfeldern ausführen. Da dies keine neuen Erkenntnisse liefert, soll das die Rolle des Gegenchecks (neben den übereinstimmenden Potentialen und der richtigen Anzahl von Freiheitsgraden) für die Richtigkeit der Dualisierung spielen. Der Nachteil dieser Art der Dualitätstransformation ist, daß man sie nur auf die bosonischen Felder anwendet. Zu welchem Multiplett das duale Feld gehört und welche fermionischen Partner es hat ist nicht sofort ersichtlich. Um die übrigen Felder (Fermionen und Hilfsfelder) des Multipletts zu gewinnen, ist man auf die Supersymmetrietransformationen angewiesen. In diesem Abschnitte zeigen wir die Dualitätstransformation auf der Komponentenebene für den massiven Fall. Der masselose Fall läßt sich analog behandeln.

In [10] wurde gezeigt, daß eine allgemeine Lagrangedichte für einen antisymmetrischen Tensor B_{mn} mit der Feldstärke $H_{mnp} = \partial_{[m}B_{nm]}$ von der Form

$$\mathcal{L}_B = -\frac{3}{4}gH_{mnp}H^{mnp} - \frac{1}{4}M^2 B_{mn}B^{mn} + \frac{1}{8}M_T^2\epsilon_{mnpq}B^{mn}B^{pq} + \frac{1}{4}\epsilon^{mnpq}B_{mn}J_{pq} \tag{D.1}$$

mit Kopplungsfunktionen M^2, M_T^2, g und J_{pq} zu der Lagrangedichte des massiven Vektorfeldes v_m mit der Feldstärke $F_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\frac{1}{g}v_m v^m - \frac{1}{4}\frac{M^2}{M^4 + M_T^4}(F_{mn} - J_{mn})(F^{mn} - J^{mn}) \\ &-\frac{1}{8}\frac{M_T^2}{M^4 + M_T^4}\epsilon^{mnpq}(F_{mn} - J_{mn})(F_{mn} - J_{mn}) \end{aligned} \tag{D.2}$$

dual ist. Die von uns in (3.2.3) und (3.3.25) aufgestellte Lagrangefunktion entspricht (D.1) mit

$$g = \frac{1}{2}K'' , \qquad J_{mn} = -F^B_{mn}(m^A \mathrm{Im}\, f_{AB} - \frac{1}{2}e_B) - \frac{1}{2}\epsilon_{mnpr}F^{B\,pr}m^A \mathrm{Re} f_{AB} . \tag{D.3}$$

Die Kopplungsfunktion J_{mn}, sowie die Massenkopplungen M^2 und M_T^2 stimmen mit den in (4.2.18) und (3.3.36) definierten überein.

Wir setzen die Kopplungsfunktion g in die duale Lagrangedichte (D.2) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &- (K'')^{-1} v_m v^m - \frac{1}{4}\frac{M^2}{M^4 + M_T^4}(F_{mn} - J_{mn})(F^{mn} - J^{mn}) \\ &- \frac{1}{8}\frac{M_T^2}{M^4 + M_T^4}\epsilon^{mnpq}(F_{mn} - J_{mn})(F_{mn} - J_{mn}) . \end{aligned} \tag{D.4}$$

Die Funktionen $K(L)$ und $U(V'^0)$ hängen miteinander über die Legendre-Transformation zusammen,

$$K(L) = 2LV'^0 - U\left(V'^0\right) , \qquad L = \frac{1}{2}\frac{\partial U(V'^0)}{\partial V^0} . \tag{D.5}$$

Für die untersten Komponenten in der θ-Entwicklung von L und $V'0$ entspricht dies

$$K = 4C \mathrm{Re}\, A^0 - U . \tag{D.6}$$

Wir nutzen folgende Eigenschaft der Legendre-Transformierten Funktionen [26]

$$g(y) = yx - f(x) , \quad x = (f')^{-1} \Longleftrightarrow g''\left(f''\right) = 1 \tag{D.7}$$

und erhalten

$$K''(U'') = 4 . \tag{D.8}$$

oder anders ausgedrückt

$$U'' = \frac{1}{4}(K'')^{-1} , \tag{D.9}$$

wobei $^{-1}$ die Umkehrfunktion bedeutet. Setzen wir (D.9) in (D.4) ein, so erhalten wir genau die Terme, die wir nach der Dualisierung in Superfeldern auf der Komponentenebene erhalten haben (vergleiche (4.2.17)).

Gibt es hier ein analoges Problem mit den zusätzlichen unphysikalischen Freiheitsgraden wie im Falle der Superfelder? Nein, der Grund dafür liegt daran, daß auf der Ebene der Superfelder das lineare Superfeld mit Hilfe der chiralen und antichiralen Superfelder $\Phi_\alpha, \bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}$ dargestellt wurde. Wir haben gezeigt, daß einige Komponentenfelder von Φ_α und $\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}$ unphysikalisch waren, so daß wir sie durch eine geeignete Eichtransformation zum Verschwinden bringen konnten. An der Dualisierung hat allerdings das ungeeichte Superfeld teilgenommen, so daß die unphysikalischen Komponenten von Φ_α und $\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}$ zusätzliche auch dann unphysikalische Freiheitsgrade in der dualen Theorie produziert haben. Die Nebenbedingung, die wir gefunden haben, entsprach der Wess-Zumino-Eichung vor der Dualisierung. Insofern war das Problem nur auf der Ebene der Superfelder vorhanden.

Anhang E

Entwicklung von $U(V + \Phi + \bar{\Phi})$

Die θ-Entwicklung der einzelnen Superfelder ist

$$
\begin{aligned}
V &= -\theta\sigma\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \ , \\
\Phi &= A + i\theta\sigma\bar{\theta}\partial_m A + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A + \sqrt{2}\theta\chi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\chi\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F \ , \\
\bar{\Phi} &= \bar{A}^* - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^* + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F \ .
\end{aligned}
\tag{E.1}
$$

Wir fassen $V + \Phi + \Phi^+$ zu einer Variablen zusammen und geben die Taylorentwicklung nach Potenzen von X an,

$$
U(V + \Phi + \Phi^+) = U\left(\underbrace{(V + \Phi + \Phi^+)| + X}_{\text{als Argument zu verstehen}}\right)
\tag{E.2}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
X = &- \theta\sigma\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \\
&+ i\theta\sigma\bar{\theta}\partial_m A + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A + \sqrt{2}\theta\chi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\chi\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F \\
&- i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^* + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F \ .
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

$$
U\big((V + \Phi + \Phi^+)| + X\big) = U(V + \Phi + \Phi^+)| + \left.\frac{\partial U(V + \Phi + \Phi^+)}{\partial(\mathrm{Re}A)}\right| X + \dots
\tag{E.4}
$$

Wir rechnen den D-Term der θ-Entwicklung aus und erhalten

$$
\begin{aligned}
U|_{\theta^2\bar{\theta}^2} =& \frac{1}{2}\frac{\partial U|}{\partial(\mathrm{Re}A)}D + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U|}{\partial(\mathrm{Re}A)^2}\Big(2FF^* - \partial_m(\mathrm{Re}A)\partial^m(\mathrm{Re}A) \\
& - \frac{1}{2}v_m v^m - 2v_m\partial^m(\mathrm{Im}A) - 2\partial_m(\mathrm{Im}A)\partial^m(\mathrm{Im}A) \\
& + i\sqrt{2}(\chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda}) - i(\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + \bar{\chi}\bar{\sigma}\partial_m\chi\Big) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U|}{\partial(\mathrm{Re})^2}\Big(- F^*\chi\chi - F\bar{\chi}\bar{\chi} + \bar{\chi}\bar{\sigma}^m\chi(v_m + 2\partial_m(\mathrm{Im}A)\Big) \\
& + \frac{1}{4}\frac{\partial^4 U|}{\partial(\mathrm{Re}A)^4}\chi\chi\bar{\chi}\bar{\chi}\ .
\end{aligned}
\tag{E.5}
$$

Anhang F

Stückelbergmechanismus

Hier soll am Beispiel des massiven Vektorfeldes der Stückelbergmechanismus [18, 19] erklärt werden. Bei der Quelle [19] handelt es sich um eine Übersichtsartikel und der folgende Text ist ihr teilweise entliehen.

Beim Stückelbergmechanismus [18, 19] wird das $U(1)$-Vektorfeld massiv, ohne dabei die Eichinvarianz der Lagrangedichte zu zerstören. Wir geben hier das einfachste Beispiel dafür.

Die Lagrangedichte für ein massives $U(1)$-Vektorfeld ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} F_{mn} F^{mn} - m^2 A_m A^m \ . \tag{F.1}$$

Der kinetische Term ist invariant unter der Transformation

$$\delta A_m = \partial_m g \ , \tag{F.2}$$

wobei g ein skalares Feld ist. Um den Massenterm eichinvariant zu machen, spalten wir den longitudinalen Freiheitsgrad von A_m ab, indem wir A_m schreiben als

$$A_m = A_m^{'} + \frac{1}{m} \partial_m \phi \tag{F.3}$$

und definieren die Eichtransformationen von $A_m^{'}$ und ϕ zu

$$\delta A_m^{'} = \partial_m g \ , \qquad \delta\phi = -mg \ . \tag{F.4}$$

ϕ übernimmt die Rolle der longitudinalen Komponente des massiven Vektorfeldes. Setzen wir (F.3) in (F.1) und lassen dabei die Striche weg, so erhalten wir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} F_{mn} F^{mn} - m^2 A_m A^m - 2m\phi \partial_m A^m - \partial_m \phi \partial^m \phi \tag{F.5}$$

Führt man eine kovariante Ableitung für das Feld ϕ ein

$$\mathcal{D}\phi = \partial_m \phi + m A_m \ , \tag{F.6}$$

so läßt sich der Ausdruck (F.5) schreiben als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} F_{mn} F^{mn} - \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi \ . \tag{F.7}$$

Literaturverzeichnis

[1] M. F. Sohnius, "Introducing Supersymmetry," Phys. Rept. 128 (1985) 39

[2] D. Bailin, A. Love, "Supersymmetric gauge field theory and string theory," Bristol, UK: IOP (1994)

[3] J. Polchinski, "String theory," Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p.

[4] T. Grimm, J. Louis, "The effective action of $N = 1$ Calabi–Yau orientifolds, `hep-th/0403067`

[5] A. Dabholkar, "Lectures on orientifolds and duality," hep-th/9804208

[6] W. Siegel, "Gauge Spinor Superfield as Scalar Multiplet", Phys. Lett. 85B (1979) 333

[7] S. Gates, M. Grisaru, M. Roček, W. Siegel, "Superspace: one thousand and one lessons in supersymmetry", Front.Phys. 58 (1983) 1 `hep-th/0108200`

[8] I. Buchbinder, S. Kuzenko, "Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity", Institute of Physics Publishing, London, 1995

[9] R. D'Auria, S. Ferrara, "Dyonic masses from conformal field strengths in D even Dimensions," hep-th/0410051

[10] J. Louis, A. Micu, "Type II theories compactified on Calabi–Yau threefolds in the presence of background fluxes", Nucl. Phys. B635 (2002) 395

[11] P. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm, "Linear supermultiplets and nonholomorphic gauge coupling functions," Phys. Lett. B265 (1991) 111;

P. Adamietz, P. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm, "Supergravity and matter: linear multiplet couplings and Kaehler anomally cancellation," Nucl. Phys. B401 (1993) 257;

B. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm, "Supergravity couplings: a geometric formulation," Phys. Rept. 343 (2001) 255, `hep-th/0005225`

[12] U. Lindström, M. Roček, "Scalar Tensor Duality and $N = 1, 2$ Non-Linear σ-Models", Nucl. Phys. B222 (1983) 285

[13] S.J. Gates, "Super p-Form Gauge Superfields", Nucl. Phys. B184 (1981) 381

[14] J.-P. Derendinger, "The Linear Multiplet and Quantum String Effective Actions", `hep-th/9412086`

[15] S. Coleman, J. Mandula, "All Possible Symmetries Of The S Matrix," Phys. Rev. 159 (1967) 1251

[16] R. Haag, J. Lopuszanski, M. Sohnius, "All possible generators of supersymmetries of the S-matrix," Nucl. Phys. B88 (1975) 257

[17] J. Wess, J. Bagger, "Supersymmetry and supergravity", Princeton University Press, Princeton, New Jersy, 1992

[18] E.C.G. Stückelberg, "Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte," Helv. Phys. Acta 11 (1938) 225

[19] H. Ruegg, M. Ruiz-Altaba, "The Stueckelberg Field", `hep-th/0304245`‘

[20] B. Körs, P. Nath, "A Stueckelberg Extension of the Standard Model", `hep-ph/0402047`

[21] M. Henneaux, C. Teitelboim, "Quantization of Gauge Systems", Princeton University Press, Princeton, New Jersy, 1992

[22] J.-P. Derendinger, F. Quevedo, M. Quiros, "The linear multiplet and quantum four-dimensional string effective actions", Nucl. Phys. B428 (1994) 282 `hep-th/9402007`

[23] G.L. Cardoso, B.A. Ovrut, "A Green-Schwarz mechanism for $D = 4$, $N = 1$ supergravity anomalies", Nucl. Phys. B369 (1992) 351

[24] T. R. Taylor, C. Vafa, "RR flux on Calabi-Yau and partial supersymmetry breaking," Phys. Lett. B474 (2000) 130 `th/9912152`

[25] V.I. Borodulin, R.N. Rogalyov, S.R. Slabospitsky, " CORE 2.1 (COmpendium of RElations, Version 2.1)", `hep-ph/9507456`

[26] V. Arnold, " Mathematical Methods of Classical Mechanics," second edition, Springer (1989).

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn Prof. Jan Louis für die interessante Aufgabenstellung und sehr engagierte Betreuung bedanken. Ausserdem bedanke ich mich bei Florian Schwennsen, Ronny Ziegler, Olaf Hohm und Thomas Grimm für die zahlreichen Tipps und Erklärungen.

Mein Dank gilt auch Jacek Swiebodzinski und Christoph Lüdeling für ihre konstruktive Kritik und Vorschläge zur besseren Lesbarkeit dieser Arbeit.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig angefertigt und nur die aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 21.10.2004