Dualität und Kopplungen von 3-Form-Multipletts in $N = 1$ Supersymmetrie

Diplomarbeit

vorgelegt von

Kai Groh

am

II. Institut für Theoretische Physik

Universität Hamburg

April 2009

deutschsprachiger Titel: Dualität und Kopplungen von 3-Form-Multipletts in $N = 1$ Supersymmetrie

englischsprachiger Titel: Duality and Couplings of 3-Form-Multiplets in $N = 1$ Supersymmetry

Gutachter: Prof. Dr. J. Louis

Zweitgutachter: Prof. Dr. W. Buchmüller

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **6**

2. Einführung in die Supersymmetrie **9**
2.1. Die Super-Poincaré Gruppe . . . 9
2.2. Der Superfeld Formalismus . . . 10
2.3. Der Lagrange-Formalismus für supersymmetrische Feldtheorien . . . 13
2.4. Das chirale Multiplett . . . 14
2.5. Das Vektormultiplett . . . 15
2.6. Das lineare Multiplett . . . 17
2.7. Das komplexe lineare Multiplett . . . 18

3. Das 3-Form-Multiplett **20**
3.1. Definition & Feldstärke . . . 20
3.2. Eichtransformation . . . 21
3.3. Kinetische Wirkung . . . 23
3.4. Dualisierung der Wirkung . . . 23

4. Das massive 3-Form-Multiplett **27**
4.1. Eichinvarianz & Wirkung . . . 27
4.2. Dualisierung im massiven Fall . . . 29
4.3. Mehrere 3-Form-Multipletts . . . 31

5. Nicht-renormierbare Wirkung **33**
5.1. Dualisierung im nicht-renormierbaren Fall . . . 34
5.2. Dualisierung mit mehreren 3-Form-Multipletts . . . 39
5.3. Dualisierung im Spezialfall reeller Felder . . . 42

6. Kopplung an chirale Felder **46**
6.1. Renormierbare Kopplung . . . 46
6.2. Nicht-renormierbare Kopplung . . . 48

7. Zusammenfassung **51**

A. Konventionen zur Notation **52**

B. Superraum-Integration von Funktionen von Superfeldern **55**

C. Die Legendre Transformation **57**

Literaturverzeichnis **59**

1. Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik [1] kann trotz seiner Erfolge durch hohe Übereinstimmung mit präzisen Messungen keine fundamentale Theorie sein, da darin auch noch einige Beobachtungen unerklährt, und überhaupt alle Phänomene der Gravitation unberücksichtigt bleiben. Man sucht daher nach Erweiterungen des Standardmodells, die es als niederenergetischen Grenzfall enthalten. Mögliche Kandidaten für eine solche erweiterte Theorie stellen beispielsweise die verschiedenen Varianten von Grand Unified Theories (GUTs), supersymmetrische Theorien und Stringtheorien dar [2, 3].

Supersymmetrische Theorien erweitern die Symmetrien des Standardmodells um die Invarianz unter einer Transformation, die den Spin der Teilchen verändert. Dabei transformieren fermionische Materieteilchen mit halbzahligem Spin, die dem Pauli-Prinzip gehorchen, und Bosonen mit ganzzahligem Spin ineinander [4]. Eine supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells würde das Teilchenspektrum mindestens verdoppeln, da keines der bekannten Teilchen als Partner für ein anderes in Frage kommt [5]. Dabei ergeben sich aber auch neue Möglichkeiten, einige der bisher ungelösten Probleme verstehen zu können. So könnte die dunkle Materie etwa durch das leichteste supersymmetrische Partnerteilchen erklärt werden. In einer lokalen Form kommt die Supersymmetrie auch als Eichtheorie der Quantengravitation in Frage. Da aber noch kein supersymmetrisches Teilchen beobachtet wurde, können die Partnerteilchen nicht die gleichen Massen haben, so dass Supersymmetrie nur in spontan gebrochener Form realisiert sein könnte [6].

In Stringtheorien wird die Punktförmigkeit der Teilchen aufgegeben und stattdessen ein eindimensional ausgedehntes Objekt (der String) beschrieben [7]. Die bekannten Stringtheorien benötigen selbst die Supersymmetrie für ihre Konsistenz. So kommt als ein mögliches Szenario für die Physik jenseits des Standardmodells eine supersymmetrische Erweiterung in Frage, die wiederum Grenzfall einer Stringtheorie sein kann, welche aber erst auf noch höherer Energieskala relevant wird [8]. Einige bekannte Methoden, Stringtheorien konsistent zu quantisieren, erfordern zusätzliche Raumzeit-Dimensionen. Diese über die vier beobachteten hinausgehenden Dimensionen müssten eine kompakte Mannigfaltigkeit bilden und können, wie in einer Kaluza-Klein Theorie, ausintegriert werden [9]. Dabei können je nach Typ der Stringtheorie neben einem Skalarfeld (dem Dilaton) verschiedene Tensorfelder auftreten.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, im Speziellen eine 3-Form im Rahmen einer supersymmetrischen

Quantenfeldtheorie zu beschreiben. Diese treten durch Kaluza-Klein Reduktion in Typ IIA Stringtheorien auf [10]. Der niederenergetische Grenzfall dieser Theorie stellt eine gewöhnliche supersymmetrische Quantenfeldtheorie dar, in deren Rahmen untersucht werden soll, wie sich die Existenz der 3-Form Felder effektiv auswirkt. Es ist bekannt, dass eine masselose 3-Form keine dynamischen Freiheitsgrade trägt, da sie einer trivialen Bewegungsgleichung genügt, und sich damit wie eine Konstante verhält [11]. Es ist deshalb möglich, dass sich die Gegenwart einer 3-Form in den Einstein'schen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie als eine so genannte kosmologische Konstante auswirkt. Eine positive kosmologische Konstante wird experimentell verlangt, um die beobachtete beschleunigte Expansion des Universums zu beschreiben [12], und müsste deshalb in der Theorie eingefügt werden. Da das Auftreten von 3-Form Feldern als effektive Konstanten erwartet wird, kommen sie als natürlicher Ursprung dieses Terms in Frage, so dass er nicht mehr a priori postuliert werden muss [13].

Unabhängig davon findet das verwendete 3-Form-Multiplett auch in der Formulierung einer effektiven supersymmetrischen Quantenchromodynamik Anwendung, um die verschiedenen farbneutralen Kondensate, die im Vakuum dieser Theorie erwartet werden, zu beschreiben. Die 3-Form wird dabei als pseudoskalarer Glueball interpretiert [14, 15].

Es gibt verschiedene Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra. Man unterscheidet die minimale ($N = 1$) von erweiterter Supersymmetrie ($N > 1$), die jeweils von N Generatoren der Supersymmetrie-Transformationen erzeugt werden. Diese Arbeit beschränkt sich darauf, ein effektives Modell mit 3-Form Feldern in globaler $N = 1$ Supersymmetrie zu beschreiben. In einer supersymmetrischen Theorie werden Felder als Komponenten eines Multipletts betrachtet, innerhalb von dem sie sich unter Supersymmetrie-Transformationen ineinander transformieren. Um ein Multiplett zu konstruieren, das eine 3-Form enthält, wird das bekannte Vektormultiplett modifiziert [16]. Man nutzt dabei aus, dass das dort enthaltene Vektorfeld als 1-Form in 4 Raumzeit-Dimensionen zur 3-Form dual ist. Mit einem geeigneten Feldstärke-Multiplett, das die 4-Form Feldstärke der 3-Form enthält, kann die kinetische Wirkung des Modells aufgestellt werden. Zu dieser Beschreibung soll eine duale Theorie aufgestellt werden, in dem Sinne, dass beide aus einer einzigen (first-order) Wirkung mit mehr Freiheitsgraden gebildet werden können [17]. Das geschieht analog zur bekannten Dualität zwischen chiralem und komplexen linearen Multiplett [18], durch eine Verallgemeinerung des Ansatzes aus [19]. Diese Dualität wird in dieser Arbeit genauer untersucht. Es wird gezeigt, dass in der dualen Theorie ein neues nicht-minimales Multiplett auftritt, das explizit eine Konstante enthält.

Gegenüber dem masselosen Fall erhält die massive 3-Form einen Freiheitsgrad und wird somit dynamisch. Es wird gezeigt, dass die duale Wirkung der massiven 3-Form stattdessen ein zusätzliches skalares Teilchen beschreibt.

Es wird außerdem eine nicht-renormierbar Theorie diskutiert, deren Wirkung durch beliebige

Funktionen des 3-Form-Multipletts ausgedrückt wird. Wie beim chiralen Multiplett kann diese Wirkung durch eine Kähler-Metrik ausgedrückt werden, wobei die Felder als Koordinaten einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden [20]. Auch für diesen allgemeinen Fall wird eine duale Theorie berechnet, wobei explizit gezeigt wird, wie sich diese Rechnung in Komponentenfeldern durchführen lässt. Es kommt dabei zu einem Wechsel zur Metrik einer anderen Geometrie, deren komplexe Struktur hier angegeben wird.

Zuletzt wird ein Modell mit Kopplungen von mehreren 3-Form-Multipletts an chirale Multipletts angegeben.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

- Im 2. Kapitel werden die Grundlagen der globalen Supersymmetrie erläutert. Es wird der Zusammenhang mit der Poincaré Gruppe hergestellt und der Superfeld Formalismus eingeführt, der für die Berechnungen in dieser Arbeit die Basis darstellt. Außerdem werden einige bekannte Supermultipletts vorgestellt, auf die später Bezug genommen wird.
- In Kapitel 3 wird zuerst das in dieser Arbeit zu untersuchende 3-Form-Multiplett, zusammen mit seinem zugehörigen Feldstärke-Multiplett definiert. Dazu wird die Eichtransformation der 3-Form auf eine analoge Relation für die Superfelder verallgemeinert, und schließlich eine kinetische Wirkung angegeben. Im letzten Teil wird eine dazu duale Wirkung konstruiert und gezeigt, dass hier explizit eine kosmologische Konstante auftritt.
- Die zuvor aufgestellte Wirkung wird in Kapitel 4 um einen Massenterm für das 3-Form-Multiplett erweitert. Dabei verwenden wir den Stückelberg-Mechanismus, um nicht die Eichinvarianz des Multipletts zu verletzen. Auch zu der so aufgestellten massiven Wirkung wird eine duale Wirkung bestimmt. Hierbei erhält die 3-Form einen Freiheitsgrad und beschreibt ein skalares Teilchen. Um auch eine Mischung von mehreren 3-Formen zu beschreiben, wird auf eine Massenmatrix verallgemeinert.
- Um die Beschränkung auf renormierbare Theorien fallen zu lassen wird in Kapitel 5 eine Wirkung mit frei wählbaren Funktionen diskutiert, und gezeigt, dass dabei ein von diesen Funktionen abhängiges Potential auftritt. Besonderes Interesse gilt hier der Dualisierung. Es wird im Einzelnen gezeigt, wie hier die kinetische Wirkung durch eine Legendre-Transformation ausgedrückt werden kann. Dass dabei eine neue Geometrie der Felder auftritt wird im Fall eines Multipletts, und im Allgemeinen mit mehreren gezeigt, sowie der Sonderfall reeller Felder betrachtet.
- Im 6. Kapitel wird die Kopplung des 3-Form-Multipletts an zusätzliche chirale Felder untersucht. Zuletzt sollen auch nicht-renormierbare Kopplungsterme erlaubt werden, so dass die in der Wirkung auftretenden Parameter auf Funktionen der chiralen Felder verallgemeinert werden können.

2. Einführung in die Supersymmetrie

2.1. Die Super-Poincaré Gruppe

Die Algebra der Supersymmetrie stellt die einzige gradierte Lie-Algebra dar, in der die Poincaré Gruppe der speziellen Relativitätstheorie enthalten ist, das heißt, dass die bekannten Symmetrien der Raumzeit nur durch die Supersymmetrie konsistent erweitert werden können. Coleman und Mandula haben gezeigt, dass nur das direkte Produkt zwischen Poincaré- und einer Eichgruppe gebildet werden kann, ohne fundamentale Axiome der Quantentheorie zu verletzen [21]. Verallgemeinert man aber zu einer gradierten Lie-Algebra und erlaubt auch Antikommutatoren, lässt sich diese Einschränkung umgehen und eine konsistente Erweiterung der Poincaré Gruppe formulieren [22]. Die Algebra der Poincaré Gruppe lautet:

$$
\begin{aligned}
&[P_m, P_n] = 0, \qquad\qquad (m,n,p,q = 0,..,3),\\
&[M_{mn}, P_p] = -i\eta_{mp}P_n + i\eta_{np}P_m,\\
&[M_{mn}, M_{pq}] = i\eta_{np}M_{mq} - i\eta_{mp}M_{nq} - i\eta_{nq}M_{mp} + i\eta_{mq}M_{np}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Die P_m sind die Generatoren der Translation, M_{mn} sind die Generatoren der Lorentzgruppe, also der Rotationen und Boosts. Dazu kommen nun die antikommutierenden Supersymmetriegeneratoren Q_α, so dass man die volle Algebra der Supersymmetrie erhält:

$$
\begin{aligned}
&\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}P_m, \qquad\qquad (\alpha,\beta = 1,2),\\
&\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0,\\
&[P_m, Q_\alpha] = 0,\\
&[P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0,\\
&[M_{mn}, Q_\alpha] = \frac{1}{8}(\sigma_{m,\alpha\dot{\beta}}\bar{\sigma}_n^{\dot{\beta}\beta} - \sigma_{n,\alpha\dot{\beta}}\bar{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta})Q_\beta,\\
&[M_{mn}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = -\frac{1}{8}\bar{Q}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta}\sigma_{n,\beta\dot{\alpha}} - \bar{\sigma}_n^{\dot{\beta}\beta}\sigma_{m,\beta\dot{\alpha}}).
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Die Algebra der Spinoren wird im Anhang A genauer beschrieben. In dieser Arbeit folgen wir hauptsächlich den Konventionen aus [20]. Die Referenzen [4, 23, 24, 25] sind eine Auswahl an Einführungen in die Supersymmetrie. Der Antikommutator der Supersymmetrie-Generatoren kann nur konsistent mit dem Impulsoperator, dem Generator der Translationen, identifiziert werden. Die Supersymmetrie kann also nicht losgelöst, sondern nur in Kombination mit den Symmetrien der Raumzeit realisiert sein.

Im Falle eines massiven Teilchens mit $P_m = (-m, 0, 0, 0)$ im Ruhesystem wird die erste der Gleichungen (2.2) zu

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2m\sigma^0_{\alpha\dot{\alpha}} = 2m\delta_{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{2.3}$$

die bis auf den konstanten Faktor $2m$ mit der Algebra der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren fermionischer Felder identisch ist. Damit kann hier analog eine Darstellung aus einem Zustand Ω mit

$$\begin{aligned} P^m P_m \Omega &= -m^2 \Omega, \\ Q_\alpha \Omega &= 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

konstruiert werden, indem Operatoren $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ wie Erzeugungsoperatoren angewendet werden. Da hier nur der $N = 1$ Fall untersucht wird, lassen sich genau 4 mögliche Zustände bilden. Eine solche Darstellung wird durch zwei Parameter charakterisiert, nämlich die Masse m und den Spin des Grundzustandes j. Im Vergleich zur Poincaré Gruppe, deren Darstellungen als Teilchen mit bestimmter Masse und Spin in den relativistischen Quantenfeldtheorien interpretiert werden, entsprechen die Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra bestimmten Zusammenschlüssen von Teilchen verschiedener Spins, den Supermultipletts. Die darin enthaltenen Zustände transformieren unter Supersymmetrie-Transformationen ineinander. Dabei muss die Anzahl der Freiheitsgrade für Bosonen und Fermionen innerhalb eines Multipletts gleich sein.[1]

Im masselosen Fall findet man stattdessen für $P_m = (-p, 0, 0, p)$dessen für $P_m = (-p, 0, 0, p)$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2p(-\sigma^0_{\alpha\dot{\alpha}} + \sigma^3_{\alpha\dot{\alpha}}) = 4p\delta_{\alpha 1}\delta_{\dot{\alpha}1}. \tag{2.5}$$

Hier antikommutieren also die Generatoren mit $\alpha = \dot{\alpha} = 2$, wohingegen die restlichen wieder eine Algebra aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bildet. Es können deshalb nur 2 masselose Zustände mit verschiedener Helizität gebildet werden.

2.2. Der Superfeld Formalismus

Man benötigt nun eine Darstellung der Supersymmetrie-Algebra auf Feldern, um supersymmetrische Quantenfeldtheorien formulieren zu können. In der Supersymmetrie-Algebra wird der vierkomponentige Impulsoperator P_m durch die zwei jeweils zweikomponentigen Operatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ ergänzt. Daraus motiviert sich der Ansatz, den zugrundeliegenden Parameterraum in analoger Weise zu erweitern. Man definiert deshalb den Superraum durch Hinzufügen

[1]Das gilt nur für die hier untersuchten linearen Darstellungen.

von 4 antikommutierenden, also Graßmann-wertigen Koordinaten zum Vierervektor x_m des Minkowski-Raumes. Die neuen Koordinaten werden zu zwei Spinoren θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ zusammengefasst, siehe Anhang A. Ein Element des Superraums z ist damit ein Tupel aus 4 bosonischen und 4 fermionischen Variablen

$$\begin{aligned} &z \in \mathbb{R}^{4|4}, \\ &z_M = (x_m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Mit den zusätzlichen spinorwertigen Variablen lässt sich die Algebra der Supersymmetrie komplett durch Kommutatoren ausdrücken, da ein Produkt zweier fermionische Größen $\theta^\alpha \epsilon_\alpha$ selbst bosonisch ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} &[\theta Q, \bar{\epsilon}\bar{Q}] = 2\theta\sigma^m\bar{\epsilon}P_m, \\ &[\theta Q, \epsilon Q] = [\bar{\theta}\bar{Q}, \bar{\epsilon}\bar{Q}] = 0, \\ &[\theta Q, P_m] = [\bar{\theta}\bar{Q}, P_m] = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Damit erhalten wir eine Lie-Algebra der Generatoren [20]. Aus dieser kann durch die Exponentialabbildung eine zugehörige Lie-Gruppe gebildet werden, deren Parameterraum gerade der Superraum ist:

$$G(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = e^{i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})} = e^{-ix^m P_m} e^{i\theta Q} e^{i\bar{\theta}\bar{Q}} e^{\theta\sigma^m\bar{\theta}P_m}. \tag{2.8}$$

Das Produkt in dieser Gruppe kann mithilfe der Baker-Campbell-Hausdorff Formel berechnet werden. Man findet

$$G(y^m, \epsilon_\alpha, \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}) \cdot G(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = G(y^m + x^m - i\epsilon\sigma^m\bar{\theta} + i\theta\sigma^m\bar{\epsilon}, \epsilon + \theta, \bar{\epsilon} + \bar{\theta}). \tag{2.9}$$

Eine allgemeine Supersymmetrie-Transformation erhält so die Form einer linearen Koordinatentransformation, also einer Translation im Superraum. Von Translationen ist aber bekannt, dass sie durch Differentialoperatoren generiert werden. Die genaue Form der Operatoren findet man durch Differenzieren der Definition (2.8) nach θ

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} G(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = \big(iQ_\alpha + \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}P_m\big) G(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}), \tag{2.10}$$

und $\bar{\theta}$ respektive. Die Generatoren der Supersymmetrie-Transformation erhalten damit in dieser Darstellung die Form

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m, \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - \theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m, \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit dem bekannten Ausdruck für den Impulsoperator $P_m = i\partial_m$.

Durch diese Operatoren können jetzt Darstellungen auf Felder im Superraum, sog. Superfelder, beschrieben werden. Da höhere Potenzen der Graßmann-Zahlen verschwinden sind Entwicklungen nach diesen Variablen immer endlich. Die allgemeine Form eines Superfeldes lautet

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar\theta) =& f(x) + \theta\phi(x) + \bar\theta\bar\chi(x) \\ &+ \theta\theta m(x) + \bar\theta\bar\theta n(x) + \theta\sigma^m\bar\theta v_m(x) \\ &+ \theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\psi(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta d(x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die dabei auftauchenden Funktionen von x heißen Komponentenfelder. ϕ, $\bar\chi$, $\bar\lambda$ und ψ sind Spinorfelder und antikommutieren miteinander und mit den spinorwertigen Variablen θ und $\bar\theta$, während f, m, n, v_m und d bosonisch sind.

Die Wirkung einer infinitesimalen Supersymmetrie-Transformation

$$\begin{aligned} G(0,\epsilon,\bar\epsilon)F(x,\theta,\bar\theta) =& \big(1 + i(\epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q) + \dots\big)F(x,\theta,\bar\theta) \\ =& F(x,\theta,\bar\theta) + \delta_\epsilon F(x,\theta,\bar\theta) + \dots \end{aligned} \tag{2.13}$$

ist durch die Differentialoperatoren (2.11) bestimmt. Die Transformationen für die Komponentenfelder folgen durch Anwenden des Operators $\delta_\epsilon = i\epsilon Q + i\bar\epsilon\bar Q$ auf das Superfeld und Vergleich der Koeffizienten von θ und $\bar\theta$. Dabei erhält man [24]

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon f &= \epsilon\phi + \bar\epsilon\bar\chi, \\ \delta_\epsilon\phi_\alpha &= 2\epsilon_\alpha m + \sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\epsilon^{\dot\alpha}(i\partial_m f + v_m), \\ \delta_\epsilon\bar\chi^{\dot\alpha} &= 2\bar\epsilon^{\dot\alpha} n + \epsilon^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}(i\partial_m f - v_m), \\ \delta_\epsilon m &= \bar\epsilon\bar\lambda - \frac{i}{2}\partial_m\phi\sigma^m\bar\epsilon, \\ \delta_\epsilon n &= \epsilon\psi + \frac{i}{2}\epsilon\sigma^m\partial_m\bar\chi, \\ \delta_\epsilon v_m &= \epsilon\sigma_m\bar\lambda + \psi\sigma_m\bar\epsilon + \frac{i}{2}\epsilon\partial_m\phi - \frac{i}{2}\partial_m\bar\chi\bar\epsilon, \\ \delta_\epsilon\bar\lambda^{\dot\alpha} &= 2\bar\epsilon^{\dot\alpha} d + \frac{i}{2}\bar\epsilon^{\dot\alpha}\partial^m v_m + i\epsilon^\beta\sigma^m_{\beta\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\partial_m m, \\ \delta_\epsilon\psi_\alpha &= 2\epsilon_\alpha d - \frac{i}{2}\epsilon_\alpha\partial^m v_m + i\sigma^m_{\alpha\dot\beta}\bar\epsilon^{\dot\beta}\partial_m n, \\ \delta_\epsilon d &= \frac{i}{2}\partial_m\big(\psi\sigma^m\bar\epsilon + \epsilon\sigma^m\bar\lambda\big). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Diese Darstellung der Supersymmetrie-Algebra durch ein unbeschränktes Superfeld (2.12) ist nicht irreduzibel, denn einige der Komponentenfelder können durcheinander ausgedrückt oder gleich null gesetzt werden, ohne die Transformationsgesetze (2.14) zu verletzen. Um einschränkende Randbedingungen an Superfelder formulieren zu können, die diese Transformationen berücksichtigen, benötigen wir einen Operator D_α, der mit ihr vertauscht,

$$[D_\alpha, \epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q] = 0, \qquad [\bar D_{\dot\alpha}, \epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q] = 0, \tag{2.15}$$

woraus folgt, wenn D_α spinorwertig ist

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, Q_\beta\} &= \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0, \\ \{\bar{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nimmt man stattdessen einen bosonischen Operator an, folgt der Kommutator, der vom Impulsoperator erfüllt wird. Ist F ein Superfeld, dann müssen somit auch $\partial_m F$, $D_\alpha F$ und $\bar{D}_{\dot\alpha} F$ wieder Superfelder sein. Man nennt D_α aufgrund dieser Eigenschaften die kovariante Superraum-Ableitung. Die Relationen (2.16) werden durch

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_m, \\ \bar{D}_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \end{aligned} \tag{2.17}$$

gelöst [20]. Daraus folgen die Antikommutatoren

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot\alpha}\} &= -2i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m, \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{D}_{\dot\beta}\} = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Es können nun Kombinationen dieser Operatoren benutzt werden, um beschränkende Bedingungen an ein Superfeld zu formulieren, wobei man im Allgemeinen dennoch keine irreduziblen Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra erhält.

2.3. Der Lagrange-Formalismus für supersymmetrische Feldtheorien

Die Beschreibung von Feldern durch ein Wirkungsfunktional

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L} \tag{2.19}$$

lässt sich einfach auf den Superraum verallgemeinern. Um eine supersymmetrische Wirkung zu konstruieren, muss aber ein Ausdruck gefunden werden, der unter diesen Supersymmetrie-Transformationen invariant bleibt. An den Transformationsgesetzen (2.14) erkennt man, dass sich die höchste Komponente (d) eines Superfeldes immer in eine totale Raumzeit-Ableitung transformiert. Solche Terme haben unter dem Raumzeit-Integral aber keine physikalische Bedeutung und können daher vernachlässigt werden. Die Projektion auf die höchste Komponente kann durch Integration über die Graßmann-Variablen θ und $\bar\theta$ ausgedrückt werden, weil für diese kein Unterschied zwischen Ableitung und Integration besteht. Das Integral über Graßmann-wertige Variablen ist im Anhang A in (A.7) und (A.8) definiert. Für ein beliebiges Superfeld $F(x, \theta, \bar\theta)$ ist damit

$$S = \int d^8z\, F(x, \theta, \bar\theta) = \int d^4x d^2\theta d^2\bar\theta\, F(x, \theta, \bar\theta) \tag{2.20}$$

invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Als Differenzialoperatoren sind Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ linear, so dass Summen und Produkte aus Superfeldern wieder Superfelder sind. Es lässt sich auf diese Weise also eine große Klasse von Modellen aufstellen. Damit die Wirkung zusätzlich lorentzinvariant ist, genügt es, dass keine freien Spinor- und Vektorindizes auftreten.

2.4. Das chirale Multiplett

Eines der am häufigsten verwendeten Superfelder in $N = 1$ Supersymmetrie ist das chirale oder skalare Feld Φ [20, 23]. Es entspricht der irreduziblen Darstellung der Supersymmetrie mit dem Spin $j = 0$ des Grundzustandes Ω, eingeführt in (2.4), und beschreibt in der Regel Materiefelder. Das chirale Superfeld genügt der Randbedingung

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \tag{2.21}$$

Wegen $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\gamma}} = 0$ kann man die Bedingung (2.21) lösen, indem man Φ durch ein unbeschränktes Superfeld F ausdrückt

$$\Phi = \bar{D}^2 F. \tag{2.22}$$

Es folgt die allgemeine Lösung (in der Konvention nach [20])

$$\begin{aligned}\Phi =& A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) \\ &+ \sqrt{2}\theta\Psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\Psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x),\end{aligned} \tag{2.23}$$

mit den Komponentenfeldern $A(x)$, $\Psi(x)$ und $F(x)$. Für das konjugierte, antichirale Feld gilt entsprechend

$$\begin{aligned}D_\alpha\Phi^* =& 0, \\ \Phi^* =& A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^*(x) \\ &+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\Psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\Psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ein chirales Multiplett enthält je 4 bosonische und fermionische Freiheitsgrade. Diese verteilen sich wie folgt auf die Komponentenfelder

Bosonen:	A	2 Freiheitsgrade
	F	2 Freiheitsgrade
Fermionen:	Ψ	4 Freiheitsgrade

Eine Wirkung mit kinetischen Termen der Komponentenfelder für das chirale Superfeld ist durch

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, \Phi\Phi^* \tag{2.25}$$

gegeben. Höhere Produkte würden die Renormierbarkeit der Theorie verletzen.[2] Ausgeschrieben findet man

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{4}A\Box A^* - \frac{1}{2}\partial^m A\partial_m A^* + \frac{1}{4}A^*\Box A - \frac{i}{2}\Psi\sigma^m\partial_m\bar{\Psi} + \frac{i}{2}\partial_m\Psi\sigma^m\bar{\Psi} + FF^* \\ =& -\partial^m A\partial_m A^* - i\Psi\sigma^m\partial_m\bar{\Psi} + FF^*.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt partiell integriert. Das ist immer möglich, da die Lagrange-Dichte gemäß (2.19) als Integrand einer Wirkung zu verstehen ist. Die Bewegungsgleichung zum Feld F lautet

$$\begin{aligned} F\colon \quad & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F} = F^* = 0, \\ \text{bzw. } F^*\colon \quad & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^*} = F = 0.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Diese Felder haben rein algebraische Bewegungsgleichungen, tragen deshalb keine dynamischen Freiheitsgrade, und können in der Wirkung (2.26) eliminiert werden. Solche Hilfsfelder sind typisch für supersymmetrische Modelle. Im Allgemeinen drücken sie sich allerdings durch die übrigen Felder aus und können so auch zu nicht-trivialen Beiträgen in der Wirkung führen. Berücksichtigt man außerdem die Bewegungsgleichungen der fermionischen Felder (Ψ und $\bar{\Psi}$), enthält die Wirkung dann nur noch je 2 bosonische und fermionische (on-shell) Freiheitsgrade.

Die höchste Komponente des chiralen Superfeldes, die nicht selbst schon gleich einer totalen Ableitung ist, ist das Feld F. Deshalb sind auch Terme der Form

$$\int d^2\theta\, W(\Phi_i) + h.c. \tag{2.28}$$

mit einer holomorphen Funktion W invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. So können Massen- und Kopplungsterme für chirale Multipletts hinzugefügt werden. Dazu beachte man, dass wegen der Linearität von $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ Produkte aus chiralen Superfeldern wieder chirale Superfelder sind.

2.5. Das Vektormultiplett

Das Vektormultiplett V wird durch ein reelles Superfeld ohne weitere Beschränkung dargestellt

$$V = V^*, \tag{2.29}$$

[2] Es dürfen Terme nur so kombiniert werden, dass eine Kopplungskonstante keine inverse Energie-Einheit hätte.

woraus sich die Entwicklung

$$
\begin{aligned}
V = & B + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{1}{16}\theta\theta M + \frac{1}{16}\bar{\theta}\bar{\theta}M^* + \frac{1}{8}\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m \\
& + \theta\theta(\frac{\sqrt{2}}{16}\bar{\theta}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi) + \bar{\theta}\bar{\theta}(\frac{\sqrt{2}}{16}\theta\lambda - \frac{1}{2}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\chi}) \\
& + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

nach Komponenten ergibt.[3] Dabei sind B, D und v_m reell. Die Komponentenfelder tragen die Freiheitsgrade

Bosonen:	B	1 Freiheitsgrad
	M	2 Freiheitsgrade
	v_m	4 Freiheitsgrade
	D	1 Freiheitsgrad
Fermionen:	χ	4 Freiheitsgrade
	λ	4 Freiheitsgrade

Damit sind 8 bosonische und 8 fermionische Freiheitsgrade in V enthalten. Das Vektormultiplett kann zur Beschreibung von supersymmetrischen Eichtheorien verwendet werden, wobei das Vektorfeld v_m die Bedeutung eines Eichbosons erhält. Die Feldstärke des Vektors

$$v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m \tag{2.31}$$

ist invariant unter der Transformation

$$v_m \to v_m + \partial_m \Lambda. \tag{2.32}$$

Für das Superfelder V entspricht das der Transformation mit einem chiralen Feld Φ

$$
\begin{aligned}
V \to & V + \Phi + \Phi^*, \\
v_m \to & v_m - i\partial_m(A - A^*),
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

die das enthaltene Vektorfeld um den Gradienten eines Skalarfeldes verschiebt. Die Feldstärke (2.31) taucht im Superfeld W_α auf, das aus V durch

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V, \\
\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} V,
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

gebildet wird. Es ist unter der Transformation (2.33) invariant. Es ist so möglich, die Komponentenfelder B, χ und M in (2.30), durch eine spezielle Wahl der Eichfreiheit (2.33), der Wess-Zumino Eichung, gleich null zu setzen.

[3] Die Komponenten wurden hier analog zu dem später zu untersuchenden 3-Form-Multiplett definiert.

Statt einem Vektorfeld als 1-Form, kann man diese Relationen auf p-Formen verallgemeinern. Eine p-Form ω hat eine $(p+1)$-Form Feldstärke $d\omega$,

$$d\omega_{m_1..m_{p+1}} = \partial_{[m_{p+1}}\omega_{m_1..m_p]}. \tag{2.35}$$

Diese ist invariant unter der verallgemeinerten Eichtransformation

$$\begin{aligned}\omega_{m_1..m_p} &\rightarrow \omega_{m_1..m_p} + \partial_{[m_p}\Lambda_{m_1..m_{p-1}]},\\ d\omega_{m_1..m_{p+1}} &\rightarrow d\omega_{m_1..m_{p+1}},\end{aligned} \tag{2.36}$$

mit der Feldstärke einer $(p-1)$-Form Λ, da $d^2 = 0$. Man kann aus einer p-Form durch Kontraktion mit dem vollständig schiefsymmetrischen Tensor die Hodge-duale $(d-p)$-Form $\tilde{\omega}$ bilden,

$$\tilde{\omega}_{m_{p+1}..m_d} = \varepsilon^{m_1..m_d}\omega_{m_1..m_p}, \tag{2.37}$$

wobei d die Zahl der Raumzeit-Dimensionen ist. Diese Dualität kann man ausnutzen, um aus einem Vektor eine 3-Form, und damit aus einem Vektormultiplett ein 3-Form-Multiplett zu konstruieren. Eine p-Form hat wie ihre duale Form $\binom{d}{p}$ unabhängige Komponenten. Die Anzahl der physikalischen Freiheitsgrade hängt noch von der Anwesenheit eines Massenterms ab.

2.6. Das lineare Multiplett

Ein reelles Multiplett L mit der zusätzlichen Randbedingung

$$D^2L = 0, \qquad \bar{D}^2L = 0, \tag{2.38}$$

heißt lineares Multiplett. Es hat die allgemeine Form [26, 27]

$$L = E + i\theta\eta - i\bar{\theta}\bar{\eta} + \frac{1}{48}\theta\sigma^m\bar{\theta}\varepsilon_{mnpq}\partial^{[n}B^{pq]} + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta - \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box E. \tag{2.39}$$

In der Vektorkomponente steht hier die Feldstärke einer 2-Form B^{pq}, wodurch explizit berücksichtigt ist, dass sie hier divergenzfrei sein muss. Für die Wirkung erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, L^2\\ &= -\frac{1}{2}\partial_m E\partial^m E - i\eta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{768}\partial_{[n}B_{pq]}\partial^{[n}B^{pq]}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Das lineare Multiplett trägt wie das chirale Multiplett 4 bosonische und fermionische Freiheitsgrade off-shell,

Bosonen:	E	1 Freiheitsgrad
	B_{pq}	3 Freiheitsgrade
Fermionen:	η	4 Freiheitsgrade

und 2 on-shell. Es enthält allerdings keine Hilfsfelder. Zwischen dem chiralen und linearen Multiplett besteht eine Dualität, die der physikalischen Äquivalenz eines skalaren Feldes mit einer 2-Form korrespondiert [28].

2.7. Das komplexe lineare Multiplett

Die Randbedingung des linearen Multipletts kann auch von einem komplexen Multiplett erfüllt werden. Dieses komplexe lineare Multiplett Σ genügt also den Gleichungen [18, 29]

$$D^2\Sigma^* = 0, \qquad \bar{D}^2\Sigma = 0. \tag{2.41}$$

Sie werden durch die Superfelder mit den Komponenten

$$\begin{aligned}
\Sigma =& f + \theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\varphi} + \theta\theta m + \theta\sigma^m\bar{\theta}w_m + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\vartheta} - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} \\
&+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Big(- \frac{i}{2}\partial_m w^m - \frac{1}{4}\Box f\Big), \\
\Sigma^* =& f^* + \sqrt{2}\theta\varphi + \bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}m^* + \theta\sigma^m\bar{\theta}w_m^* - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\varphi + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\vartheta \\
&+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Big(\frac{i}{2}\partial_m w^{m*} - \frac{1}{4}\Box f^*\Big),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

gelöst. Hier sind je 12 Freiheitsgrade für die bosonischen und fermionischen Komponenten enthalten. Im Einzelnen sind das

Bosonen:	f	2 Freiheitsgrade
	m	2 Freiheitsgrade
	w_m	8 Freiheitsgrade
Fermionen:	ψ	4 Freiheitsgrade
	φ	4 Freiheitsgrade
	ϑ	4 Freiheitsgrade

Die Wirkung des komplexen linearen Multipletts ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, \Sigma\Sigma^* \\
=& \frac{i}{2}f^*\partial_m w^m - \frac{i}{2}f\partial_m w^{m*} + \frac{1}{2}f\Box f^* + \frac{1}{2}\psi\vartheta + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\vartheta} - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - mm^* + \frac{1}{2}w_m^* w^m.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Die Felder w_m, m, ψ und ϑ sind hier Hilfsfelder und lassen sich durch ihre Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} w_m: &\quad -\frac{i}{2}\partial_m f^* + \frac{1}{2}w_m^* = 0, \\ m: &\quad m^* = 0, \\ \psi: &\quad \vartheta = 0, \\ \vartheta: &\quad \psi = 0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

eliminieren. Setzt man diese Gleichungen in der Wirkung (2.43) ein, findet man nach Zusammenfassen der Terme

$$\mathcal{L} = -\partial_m f \partial^m f^* - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi}. \tag{2.45}$$

Diese Wirkung ist identisch mit der für das chirale Feld (2.26). Alternativ zum (reellen) linearen Multiplett kann ein chirales Multiplett auch zum komplexen linearen Multiplett dualisiert werden [18]. Das komplexe lineare Multiplett ist in dem Sinne nicht-minimal, da es mehr off-shell Freiheitsgrade in Form von Hilfsfeldern besitzt. Diese können in nicht-renormierbaren Theorien aber weitere Beiträge der dynamischen Felder liefern, so dass das Multiplett im Allgemeinen nicht mit dem chiralen äquivalent ist [30].

3. Das 3-Form-Multiplett

3.1. Definition & Feldstärke

Um ein 3-Form Feld C^{npq} in einer supersymmetrischen Theorie zu beschreiben, muss zuerst ein Multiplett gefunden werden, das dieses Feld enthält. Dazu definiert man das Hodge-duale Vektorfeld

$$v_m = \frac{1}{6}\varepsilon_{mnpq}C^{npq}, \tag{3.1}$$

das als Teil eines Vektormultipletts (2.30) angesehen werden kann. Damit lässt sich das 3-Form-Multiplett U analog durch [16, 15]

$$\begin{aligned} U = U^* =& B + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{1}{16}\theta\theta M + \frac{1}{16}\bar{\theta}\bar{\theta}M^* + \frac{1}{48}\theta\sigma^m\bar{\theta}\varepsilon_{mnpq}C^{npq} \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\left(\frac{\sqrt{2}}{16}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{16}\lambda - \frac{1}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right) \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

definieren. Die Felder B, C^{npq} und D sind hier reell. U enthält wie das Vektormultiplett 8 fermionische und 8 bosonische off-shell Freiheitsgrade, die sich wie folgt auf die Komponentenfelder verteilen:

Bosonen:	B	1 Freiheitsgrad
	M	2 Freiheitsgrade
	C^{npq}	4 Freiheitsgrade
	D	1 Freiheitsgrad
Fermionen:	χ	4 Freiheitsgrade
	λ	4 Freiheitsgrade

Da sie unter Vertauschung in allen Indizes antisymmetrisch ist, hat die 3-Form C^{npq} 4 unabhängige Komponenten, wie ihr duales Vektorfeld.

Der Unterschied des 3-Form-Multipletts zum Vektormultiplett liegt erst in der Definition der Feldstärke. Ein Vektorfeld hat als 1-Form eine 2-Form Feldstärke, deren duale Form wieder eine 2-Form ist. Die Feldstärke einer 3-Form ist aber eine 4-Form, die selbst zu einer 0-Form, einem

Skalar, dual ist. Aus diesem Grund kann die zugehörige Feldstärke nicht wie beim Vektormultiplett (2.34) definiert werden. Stattdessen wird das Feldstärke-Multiplett S durch [19, 16]

$$S = -4\bar{D}^2 U, \qquad S^* = -4D^2 U, \tag{3.3}$$

definiert. Aus dieser Konstruktion folgt

$$\bar{D}^{\dot\alpha} S = 0, \qquad D_\alpha S^* = 0, \tag{3.4}$$

durch Vergleich mit (2.22), so dass S also ein chirales Superfeld ist. Da es hier aber aus einem reellen Superfeld gebildet wird, erfüllt es eine zusätzliche Randbedingung [19]

$$D^2 S - \bar{D}^2 S^* \Big|_{\theta=\bar\theta=0} = -4[D^2, \bar{D}^2] U \Big|_{\theta=\bar\theta=0} = -\frac{4}{3} i \varepsilon_{mnpq} \partial^m C^{npq}. \tag{3.5}$$

Der Imaginärteil der $\theta\theta$-Komponente von S ist damit der Feldstärke von C^{npq} proportional und damit kein freies Feld. Diese Feldstärke ist definiert als [31, 15]

$$H^{mnpq} = \partial^{[m} C^{npq]} = \frac{1}{4}\big(\partial^m C^{npq} - \partial^n C^{pqm} + \partial^p C^{qmn} - \partial^q C^{mnp}\big), \tag{3.6}$$

mit dem dualen skalaren Feld

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{6}\varepsilon_{mnpq} H^{mnpq} = \frac{1}{6}\varepsilon_{mnpq}\partial^{[m} C^{npq]} = \frac{1}{6}\varepsilon_{mnpq}\partial^m C^{npq} \\ H^{mnpq} &= -\frac{1}{4}\varepsilon^{mnpq} H. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Für das Feldstärke-Multiplett S erhält man in Komponenten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} S =& M^* + i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m M^* + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box M^* \\ &+ \sqrt{2}\theta\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^m\partial_m\lambda + \theta\theta(-D - iH), \\ S^* =& M - i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m M + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box M \\ &+ \sqrt{2}\bar\theta\bar\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar\lambda + \bar\theta\bar\theta(-D + iH). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Es enthält nur noch je 4 bosonische und fermionische off-shell Freiheitsgrade, weil die Felder B und χ hier nicht mehr auftauchen, und die Feldstärke H als skalares Feld nur über einen Freiheitsgrad verfügt.

3.2. Eichtransformation

Aus seiner Definition (3.3) ist erkennbar, dass S unter einer Eichtransformation [16]

$$\begin{aligned} &U \to U - L, \\ &D^2 L = \bar{D}^2 L = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

mit einem linearen Multiplett L invariant bleibt, da $D_\alpha D_\beta D_\gamma = \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\beta}\bar{D}_{\dot\gamma} = 0$.

Das lineare Multiplett (2.39) enthält in seiner Vektorkomponente die Feldstärke einer 2-Form, mit der das gesuchte Transformationsverhalten der 3-Form beschrieben werden kann. Die Eichtransformation (3.9) schreibt sich in Komponentenfeldern als

$$\begin{aligned} U - L =&(B-E) + i\theta(\chi-\eta) - i\bar\theta(\bar\chi-\bar\eta) + \frac{1}{16}\theta\theta M + \frac{1}{16}\bar\theta\bar\theta M^* \\ &+ \frac{1}{48}\theta\sigma^m\bar\theta\varepsilon_{mnpq}(C^{npq} - \partial^{[n}B^{pq]}) \\ &+ \theta\theta(\frac{\sqrt{2}}{16}\bar\theta\bar\lambda + \frac{1}{2}\bar\theta\bar\sigma^m\partial_m(\chi-\eta)) + \bar\theta\bar\theta(\frac{\sqrt{2}}{16}\theta\lambda - \frac{1}{2}\theta\sigma^m\partial_m(\bar\chi-\bar\eta)) \\ &+ \theta\theta\bar\theta\bar\theta(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box(B-E)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Hier können die Transformationsgesetze der Komponenten abgelesen werden. Sie lauten im Einzelnen:

$$\begin{aligned} B &\to B - E, \\ \chi &\to \chi - \eta, \\ M &\to M, \\ C^{npq} &\to C^{npq} - \partial^{[n}B^{pq]}, \\ \lambda &\to \lambda, \\ D &\to D. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Durch die spezielle Eichung

$$\begin{aligned} E &= B, \\ \eta &= \chi, \end{aligned} \tag{3.12}$$

lassen sich die unphysikalischen Felder B und χ aus U eliminieren. Diese Wahl entspricht der Wess-Zumino Eichung beim Vektormultiplett. In dieser Eichung wird das 3-Form-Multiplett zu

$$U' = \frac{1}{16}\theta\theta M + \frac{1}{16}\bar\theta\bar\theta M^* + \frac{1}{48}\theta\sigma^m\bar\theta\varepsilon_{mnpq}C'^{npq} + \frac{\sqrt{2}}{16}\theta\theta\bar\theta\bar\lambda + \frac{\sqrt{2}}{16}\bar\theta\bar\theta\theta\lambda + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\frac{1}{16}D, \tag{3.13}$$

mit

$$C'^{npq} = C^{npq} - \partial^{[n}B^{pq]}. \tag{3.14}$$

Die Feldstärke H bleibt unter dieser Umdefinition invariant. Da das Eichfeld B^{pq} 3 physikalische Freiheitsgrade besitzt, bleibt von den 4 Komponenten von C^{npq} nur eine frei wählbar. So trägt die 3-Form, wie ihre Feldstärke H einen eichinvarianten off-shell Freiheitsgrad. Das geeichte Multiplett U' hat jetzt die selben Freiheitsgrade wie das Feldstärke-Multiplett S.

3.3. Kinetische Wirkung

Eine Wirkung, in die nur das Feldstärke-Multiplett S eingeht ist offensichtlich immer unter der Eichtransformation (3.9) invariant. Da S ein chirales Superfeld ist, verwenden wir dessen Ausdruck (2.26) für den kinetischen Teil der Wirkung: [19]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, SS^* \\ &= -\partial_m M\, \partial^m M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + D^2 + H^2 \\ &= -\partial_m M\, \partial^m M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + H^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Das Hilfsfeld D verschwindet durch seine Bewegungsgleichung ($D = 0$). Als Feldstärke ist H kein freies Feld. Stattdessen erhält man mit (3.7) für den kinetischen Term

$$H^2 = \frac{1}{36}(\varepsilon_{mnpq}\partial^m C^{npq})^2 = -\frac{2}{3}H_{mnpq}H^{mnpq} = -\frac{2}{3}\partial_m C_{npq}\partial^{[m}C^{npq]}. \tag{3.16}$$

Die Variation nach C^{npq} liefert nun

$$\frac{4}{3}\partial_m\partial^{[m}C^{npq]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_m H = 0. \tag{3.17}$$

Damit ist H also eine Konstante und trägt hier keine Freiheitsgrade bei. Die Wirkung besitzt 2 bosonische (M, M^*) und 2 fermionische (λ) on-shell Freiheitsgrade.

3.4. Dualisierung der Wirkung

Eine on-shell Wirkung kann auch aus einer so genannten first-order Wirkung reproduziert werden, indem zusätzliche Felder hinzugefügt werden, die wie Hilfsfelder wieder durch ihre Bewegungsgleichungen eliminiert werden können [17, 28]. Hier ergibt sich jetzt aber auch die Möglichkeit, alternativ die ursprünglichen Felder zu eliminieren. Auf diesem Weg findet man dann eine andere on-shell Wirkung, die zur ursprünglichen dual ist. Diese bleibt physikalisch äquivalent, da sie ohne zusätzliche Annahmen aus der gleichen first-order Wirkung hervorgeht. Die Wirkung (3.15) kann so aus

$$\mathcal{L}_{\text{first}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, (-FF^* + FS + F^*S^*) \tag{3.18}$$

reproduziert werden [19]. Dabei ist F ein zunächst unbeschränktes Superfeld. In Komponentenfeldern drücken wir es durch

$$\begin{aligned}F =& f + \theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\varphi} + \theta\theta m + \bar{\theta}\bar{\theta}n + \theta\sigma^m\bar{\theta}w_m \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\vartheta} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\zeta - \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\varphi}) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(d - \frac{1}{4}\Box f - \frac{i}{2}\partial_m w^m) \\ F^* =& f^* + \bar{\theta}\bar{\psi} + \sqrt{2}\theta\varphi + \bar{\theta}\bar{\theta}m^* + \theta\theta n^* + \theta\sigma^m\bar{\theta}w_m^* \\ &+ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\vartheta + \theta\theta\bar{\theta}(\bar{\zeta} - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^m\partial_m\varphi) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(d^* - \frac{1}{4}\Box f^* + \frac{i}{2}\partial_m w^{m*})\end{aligned} \tag{3.19}$$

aus. Durch diese zum komplexen linearen Multiplett (2.42) analoge Definition vereinfacht sich die Form der Randbedingung, die F später lösen muss. Eliminiert man nun das Feld F durch Einsetzen seiner Bewegungsgleichungen,

$$F = S^*, \qquad F^* = S, \tag{3.20}$$

in die Wirkung (3.18), erhält man die Wirkung (3.15) zurück. Um dies im Detail zu untersuchen, schreiben wir die first-order Wirkung in Komponenten aus:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{first}} =& \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\,(-FF^* + FS + F^*S^*)\\ =&-f^*(d - \frac{1}{4}\Box f - \frac{i}{2}\partial_m w^m) + \frac{1}{2}\psi\vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(\zeta - \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\varphi})\\ &-\frac{1}{2}mm^* - \frac{1}{2}nn^* + \frac{1}{4}w_m^*w^m + M^*d - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\zeta - n(D+iH) + h.c..\end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Bewegungsgleichungen zu den Komponentenfeldern von F lauten

$$\begin{aligned} f: \quad d^* - \frac{1}{2}\Box f^* + \frac{i}{2}\partial_m w^{m*} &= 0, & \psi: \quad & \vartheta = 0,\\ m: \quad m^* &= 0, & \varphi: \quad & \zeta_\alpha - \sqrt{2}i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} = 0,\\ n: \quad -n^* - D - iH &= 0, & \vartheta: \quad & \psi = 0,\\ w_m: \quad -i\partial_m f^* + w_m^* &= 0, & \zeta: \quad & \sqrt{2}\varphi - \sqrt{2}\lambda = 0,\\ d: \quad -f^* + M^* &= 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

mit den Lösungen:

$$\begin{aligned} & f = M, \qquad w_m = -i\partial_m M, \qquad d = \Box M,\\ & m = 0, \qquad n = -D + iH,\\ & \psi = 0, \qquad \varphi = \lambda, \qquad \vartheta = 0, \qquad \zeta_\alpha = \sqrt{2}i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\\ \Rightarrow \qquad & F = M + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}(-D+iH) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m M + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box M. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichungen (3.22) stimmt also mit den Bewegungsgleichungen der Superfelder (3.20) überein und man findet natürlich nach Einsetzen und Zusammenfassen auch auf diesem Weg wieder die Wirkung (3.15).

Um nun die duale Wirkung zu finden, variieren wir jetzt (3.18) nach den Feldern in U und eliminieren diese. Durch die Definition von S in (3.3) kann die first-order Wirkung durch das Superfeld U ausgedrückt werden. Das ist nötig, da S der chiralen Randbedingung (3.4) unterliegt, also kein unabhängiges Feld ist.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{first}} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\,(-FF^* - 4F\bar{D}^2U - 4F^*D^2U)\\ &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\,(-FF^* - 4U(\bar{D}^2F + D^2F^*)).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Im letzten Schritt wurde die kovariante Superraum-Ableitung durch zweimalige partielle Integration verschoben. In diesem Ausdruck taucht U nur als Lagrange-Multiplikator auf. Die Variation führt somit zu einer Randbedingung an das Feld F:

$$\bar{D}^2F + D^2F^* = 0, \tag{3.25}$$

die mit der Definitionen von F (3.19) und der kovarianten Superraum-Ableitung (A.9) ausgeschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\bar{D}^2F + D^2F^* = & -4(n+n^*) - 4\theta\zeta - 4\bar{\theta}\bar{\zeta} - 4\theta\theta d - 4\bar{\theta}\bar{\theta}d^* - 4i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(n-n^*) \\ & - 2i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\zeta - 2i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\zeta} - \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box(n+n^*) = 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Äquivalent zur Lösung dieser Gleichung können aus (3.21) die Bewegungsgleichungen zu den Komponentenfeldern in U gebildet werden:

$$\begin{aligned} M: &\quad d^* = 0, \\ \lambda: &\quad \zeta = 0, \\ D: &\quad n + n^* = 0, \\ C_{npq}: &\quad -\frac{1}{6}i\varepsilon_{mnpq}\partial^m(n-n^*) = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen für n nur eine beliebige imaginäre Konstante zu ($n = ic$). Das Superfeld F schreibt sich unter Berücksichtigung dieser Gleichungen als:

$$\begin{aligned} F =& f + \theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\varphi} + \theta\theta m + i\bar{\theta}\bar{\theta}c + \theta\sigma^m\bar{\theta}w_m + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\vartheta} - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} \\ & + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-\frac{i}{2}\partial_m w^m - \frac{1}{4}\Box f) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dieser Ausdruck ist die allgemeine Lösung zur Randbedingung (3.25). Sie enthält 12 bosonische und 12 fermionische off-shell Freiheitsgrade. Das durch dieses Superfeld repräsentierte Multiplett unterscheidet sich vom komplexen linearen Multiplett (2.42) nur durch die frei wählbare Konstante c [18, 30]. Es handelt sich also um ein nicht-minimales skalares Multiplett.

$$F\,|_{c=0} = \Sigma \quad \text{mit} \quad \bar{D}^2\Sigma = D^2\bar{\Sigma} = 0. \tag{3.29}$$

Dieser Unterschied kommt allein dadurch zustande, dass S kein allgemeines chirales Feld ist, sondern aus dem reellen Superfeld U hervorgeht. Wäre U komplex, müssten beide Summanden der Bewegungsgleichung (3.25) für sich verschwinden, was der Randbedingung des komplexen linearen Multipletts entspricht.

Die zur Wirkung des 3-Form-Multiplet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dual}} =& \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\,(-FF^*) \\ =& f^*(\frac{i}{2}\partial_m w^m + \frac{1}{4}\Box f) + \frac{1}{2}\psi\vartheta - \frac{i}{2}\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - \frac{1}{2}mm^* - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{4}w_m^* w^m + h.c. \end{aligned} \tag{3.30}$$

In dieser Wirkung tauchen mehr Felder auf als in der ursprünglichen Theorie, da F keine minimale Darstellung ist. Die Hilfsfelder lassen sich durch ihre Bewegungsgleichungen $\psi = 0$, $\vartheta = 0$, $m = 0$ und $w_m = -i\partial_m f$ eliminieren, und man erhält schließlich:

$$\mathcal{L}_{\text{dual}} = -\partial_m f \partial^m f^* - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - c^2 \tag{3.31}$$

Auch hier tritt ein skalares Feld und ein Spinorfeld auf. Damit hat die duale Wirkung die gleichen dynamischen Freiheitsgrade wie (2.26). Anstelle der Feldstärke der 3-Form steht hier allerdings eine negative Konstante $(-c^2)$, die als konstantes Potential verstanden werden kann. Hier ist deshalb, wie immer wenn ein Potential in seinem Minimum nicht verschwindet, die Supersymmetrie spontan gebrochen [3, 20]. Das Superfeld (3.28) erfüllt nicht die allgemeinen Supersymmetrie-Transformationen (2.14). Explizit erkennt man, dass die Transformation des Feldes φ zu einem konstanten Term führt,

$$\delta_\theta\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} = 2ic\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + 2i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m f, \tag{3.32}$$

der von keinem anderen Feld kompensiert wird.

Diese Konstante würde nur in einer Theorie mit Gravitation beobachtbare Konsequenzen vorhersagen. So könnte man (3.31) als Teil der Einstein-Hilbert-Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie ansehen [32]. Mit einer kosmologischen Konstante Λ lautet diese

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}} &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\Big(\frac{R-2\Lambda}{2\kappa} + \mathcal{L}_{\text{Materie}}\Big) \\ &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\Big(\frac{R-2\Lambda}{2\kappa} - \partial_m f\partial^m f^* - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - c^2 + \dots\Big) \\ &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\Big(\frac{R-2(\Lambda+\kappa c^2)}{2\kappa} - \partial_m f\partial^m f^* - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} + \dots\Big). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Die Punkte stehen für weitere Terme, die dadurch zustande kommen, dass der metrische Tensor hier selbst eine Funktion der Raumzeit ist. Man kann nun ablesen, dass man eine neue effektive kosmologische Konstante

$$\Lambda_{\text{effektiv}} = \Lambda + \kappa c^2 \tag{3.34}$$

erhält. Die zur 3-Form duale Konstante c kann also positive Beiträge zur kosmologischen Konstante liefern, oder ihre Existenz überhaupt erklären, wenn man durch $\Lambda = 0$ keinen entsprechenden Term a priori vorsieht. Als Integrationskonstante kann aber der Wert von c nicht aus der Theorie bestimmt werden, so dass man sie als freien Parameter nur durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen bestimmen kann.

4. Das massive 3-Form-Multiplett

4.1. Eichinvarianz & Wirkung

Um einen Massenterm für die 3-Form in der Wirkung einzufügen, wird hier der Stückelberg-Mechanismus benutzt [33]. Das ist nötig, da ein Term der Form

$$\int d^2\theta d^2\overline{\theta}\, m^2 U^2 \tag{4.1}$$

die Eichinvarianz (3.9) brechen würde. Um das zu umgehen fügt man ein zusätzliches lineares Multiplett L ein. Im allgemeinen renormierbaren Fall lässt sich so der Massenterm [16]

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\, \left(-m^2(U-L)^2 + \xi(U-L)\right), \tag{4.2}$$

konstruieren.[1] Diese Wirkung bleibt invariant unter der gemeinsamen Eichtransformation

$$\begin{aligned} U &\to U - L', \\ L &\to L - L', \end{aligned} \tag{4.3}$$

mit einem linearen Superfeld L'. Das Feld L dient so zur Kompensation der Transformation von U. Dabei treten aber durch dessen Komponentenfelder zusätzliche Freiheitsgrade auf. Diese können durch die Wahl von L', also durch Fixierung der Eichfreiheit (4.3), unterschiedlich zwischen den Feldern U und L verteilt werden. So könnte U wie im masselosen Fall auf die Form der speziellen Eichung (3.13) gebracht werden. Stattdessen können die durch den Massenterm zusätzlich auftretenden Freiheitsgrade durch die Wahl $L' = L$ in U absorbiert werden, was sich darin äußert, dass dessen Komponenten B und χ nicht mehr durch (3.12) wegtransformiert werden können.

[1] Hier wurde auch ein Fayet-Iliopoulos Term durch ξ parametrisiert hinzugefügt. Er erlaubt einen nicht verschwindenden Vakuum-Erwartungswert für die unterste Komponente B.

Mit dem kinetischen Term (3.15) erhalten wir die Wirkung

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \int d^2\theta d^2\bar\theta \Big(SS^* - m^2(U-L)^2 + \xi(U-L)\Big) \\
=& -\partial_m M\,\partial^m M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar\lambda + D^2 + H^2 \\
& - m^2\Big(- i\chi(\frac{\sqrt{2}}{16}\lambda - \frac{1}{2}\sigma^m\partial_m\bar\chi) + i\bar\chi(\frac{\sqrt{2}}{16}\bar\lambda + \frac{1}{2}\bar\sigma^m\partial_m\chi) \\
& + \frac{1}{128}MM^* + 2B(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B) \\
& - \frac{1}{4608}\varepsilon_{mnpq}\varepsilon^{mokl}(C^{npq} - \partial^{[n}B^{pq]})(C_{okl} - \partial_{[o}B_{kl]})\Big) + \xi(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B) \\
=& -\partial_m M\,\partial^m M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar\lambda + D^2 + H^2 \\
& - m^2\Big(i\chi\sigma^m\partial_m\bar\chi - \frac{\sqrt{2}}{16}i\chi\lambda + \frac{\sqrt{2}}{16}i\bar\chi\bar\lambda + \frac{1}{128}MM^* + \frac{1}{8}BD - \frac{1}{2}B\Box B + \frac{1}{768}C'_{npq}C'^{npq}\Big) \\
& + \xi(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Hier wurde C_{npq} wie (3.14) umdefiniert, um die Feldstärke der B_{pq} zu absorbieren.[2] Die Feldstärke H bleibt dabei invariant. Durch die Bewegungsgleichung für D,

$$
2D - \frac{m^2}{8}B + \frac{\xi}{16} = 0, \qquad \Rightarrow D = \frac{m^2}{16}B - \frac{\xi}{32},
\tag{4.5}
$$

lässt sich auch hier dieses Hilfsfeld eliminieren. Wegen des Fayet-Iliopoulos Terms in (4.2) erhält das Feld B dabei einen Vakuum-Erwartungswert proportional zu ξ. Die Bewegungsgleichung (4.5) in die Wirkung (4.4) eingesetzt ergibt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -\partial_m M\,\partial^m M^* - \frac{m^2}{128}MM^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar\lambda - m^2 i\chi\sigma^m\partial_m\bar\chi + \frac{\sqrt{2}}{16}m^2 i\chi\lambda - \frac{\sqrt{2}}{16}m^2 i\bar\chi\bar\lambda \\
& - \frac{m^2}{2}\partial_m B\partial^m B - \frac{m^4}{256}B^2 + \frac{m^2\xi}{128}B - \frac{\xi}{2}\Box B - \frac{\xi^2}{1024} + H^2 - \frac{m^2}{768}C_{npq}C^{npq}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Die Massenterme der durch den Stückelberg-Mechanismus zusätzlich auftretenden Felder B und χ erhalten ihre gewöhnliche Form mit den Umdefinitionen

$$
\begin{aligned}
\chi &\to \frac{i}{m}\chi, \\
B &\to \frac{\sqrt{2}}{m}B,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

so dass sich die Wirkung als

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -\partial_m M\,\partial^m M^* - \frac{m^2}{128}MM^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar\lambda - i\chi\sigma^m\partial_m\bar\chi - \frac{\sqrt{2}}{16}m\chi\lambda - \frac{\sqrt{2}}{16}m\bar\chi\bar\lambda \\
& - \partial_m B\partial^m B - \frac{m^2}{128}B^2 + \frac{m\xi}{128\sqrt{2}}B - \frac{\xi}{2\sqrt{2}m}\Box B - \frac{\xi^2}{1024} + H^2 - \frac{m^2}{768}C_{npq}C^{npq}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

[2]Der Strich an C'_{npq} wird im Folgenden weggelassen.

schreiben lässt. Jetzt kann noch das Feld B durch

$$B \to B - \frac{\xi}{2\sqrt{2}m} \tag{4.9}$$

verschoben werden, um seinen Vakuum-Erwartungswert $<B>= \frac{\xi}{2\sqrt{2}m}$ zu absorbieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& - \partial_m M \, \partial^m M^* - \frac{m^2}{128} M M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} - i\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{\sqrt{2}}{16} m\chi\lambda - \frac{\sqrt{2}}{16} m\bar{\chi}\bar{\lambda} \\ & - \partial_m B \partial^m B - \frac{m^2}{128} B^2 + H^2 - \frac{m^2}{768} C_{npq} C^{npq}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Spinorfelder λ und χ bilden hier zusammen einen massiven Dirac-Spinor. Im massiven Fall trägt die 3-Form auch mit einem bosonischen Freiheitsgrad bei, da ihre Bewegungsgleichung keine triviale Bedingung, wie im masselosen Fall (3.17), ausdrückt. Damit beschreibt die Wirkung (4.10) ein komplexes und ein reelles massives Skalarfeld (3 bosonische Freiheitsgrade), eine massive 3-Form (1 bosonischer Freiheitsgrad) und ein massives Dirac-Feld (4 fermionische Freiheitsgrade).

4.2. Dualisierung im massiven Fall

Um auch zum massiven Fall eine duale Wirkung zu finden, schreiben wir den kinetischen Teil analog zum masselosen Fall (3.21) mit einem freien Superfeld F, und addieren den Massenterm (4.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{first}} =& \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \, \big(-FF^* + FS + F^*S^* - m^2(U-L)^2 + \xi(U-L)\big) \\ =& \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \, \big(-FF^* + (U-L)(-4\bar{D}^2 F - 4D^2 F^* + \xi) - m^2(U-L)^2\big) \\ =& \Big[- f^*(d - \frac{1}{4}\Box f - \frac{i}{2}\partial_m w^m) + \frac{1}{2}\psi\vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(\zeta - \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\varphi}) \\ & - \frac{1}{2}mm^* - \frac{1}{2}nn^* + \frac{1}{4}w^*_m w^m + M^*d - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\zeta - n(D+iH) + h.c.\Big] \\ & - m^2\Big(i\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{\sqrt{2}}{16} i\chi\lambda + \frac{\sqrt{2}}{16} i\bar{\chi}\bar{\lambda} + \frac{1}{128} MM^* \\ & + \frac{1}{8}BD - \frac{1}{2}B\Box B + \frac{1}{768} C_{npq}C^{npq}\Big) + \xi\big(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B\big).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dieser Ansatz für die first-order Wirkung ist gerechtfertigt, da F der gleichen Bewegungsgleichung (3.20) wie im masselosen Fall genügt. Man kann deshalb hier ganz analog zeigen, dass sich aus (4.11) durch Elimination von F die bekannte Wirkung (4.4) reproduzieren lässt.

Die Variation nach U führt nun zur Bewegungsgleichung

$$U - L = -\frac{2}{m^2}(\bar{D}^2 F + D^2 F^*) + \frac{\xi}{2m^2}, \tag{4.12}$$

mit der man durch Einsetzen in die first-order Wirkung (4.11), die duale Wirkung

$$\mathcal{L}_{\text{dual}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(-FF^* + \frac{4}{m^2}(\bar{D}^2 F + D^2 F^*)^2 - \frac{2}{m^2}\xi(\bar{D}^2 F + D^2 F^*) + \frac{\xi^2}{4} \right) \tag{4.13}$$

erhält.[3] Um den Mechanismus dieser Dualisierung im Detail zu untersuchen, kann man stattdessen die Bewegungsgleichungen der Komponentenfelder von U aus der first-order Wirkung (4.11) bilden. Diese lauten

$$\begin{aligned}
M: \quad & d^* - \frac{m^2}{128}M^* = 0 && \Rightarrow M = \frac{128}{m^2}d, \\
D: \quad & -n - n^* - \frac{m^2}{8}B + \frac{\xi}{16} = 0 && \Rightarrow B = -\frac{16}{m^2}Re\, n + \frac{\xi}{2m^2}, \\
B: \quad & \frac{1}{8}D - \Box B = 0 && \Rightarrow D = 8\Box B = -\frac{128}{m^2}\Box Re\, n, \\
\lambda: \quad & -\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta + \frac{\sqrt{2}}{16}m^2 i\chi = 0 && \Rightarrow \chi = -\frac{8i}{m^2}\zeta, \\
\chi: \quad & i\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{\sqrt{2}}{16}i\lambda = 0 && \Rightarrow \lambda = \frac{16}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\chi} = \frac{128}{\sqrt{2}m^2}i\sigma^m\partial_m\bar{\zeta}, \\
C_{npq}: \quad & \frac{1}{6}i\varepsilon_{mnpq}\partial^m(n - n^*) - \frac{m^2}{384}C_{npq} = 0 && \Rightarrow C_{npq} = -\frac{128}{m^2}\varepsilon_{mnpq}\partial^m(Im\, n).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Wieder in die Wirkung eingesetzt erhält man direkt den Ausdruck für die duale Wirkung (4.13) in Komponenten ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} = & - f^*d - fd^* + \frac{1}{2}f^*\Box f + \frac{i}{2}f^*\partial_m w^m - \frac{i}{2}f\partial_m w^{m*} \\
& + \frac{1}{2}\psi\vartheta + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\zeta + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varphi}\bar{\zeta} - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - \frac{64}{m^2}i\zeta\sigma^m\partial_m\bar{\zeta} \\
& - mm^* - nn^* - \frac{128}{m^2}\partial_m n\partial^m n^* + \frac{1}{2}w_m^* w^m + \frac{128}{m^2}dd^* + \frac{4\xi}{m^2}\Box Re\, n.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Hier taucht der Parameter ξ in Übereinstimmung mit (4.13) nur noch in einem Term, der gleich einer totalen Raumzeit-Ableitung ist, auf. Diese duale Wirkung enthält noch 16 bosonische und 16 fermionische off-shell Freiheitsgrade. Einige der Felder sind also unphysikalisch. Um sie zu eliminieren, benutzen wir die Bewegungsgleichungen der Hilfsfelder:

$$\begin{aligned}
m: \quad & m^* = 0, \\
\psi: \quad & \vartheta = 0, \\
\vartheta: \quad & \psi = 0, \\
w_m: \quad & -\frac{i}{2}\partial_m f^* + \frac{1}{2}w_m^* = 0 \quad \Rightarrow \quad w_m^* = i\partial_m f^*, \\
d: \quad & -f^* + \frac{128}{m^2}d^* = 0 \quad \Rightarrow \quad d^* = \frac{m^2}{128}f^*,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

[3]Der letzte Term leistet hier keinen Beitrag.

und erhalten damit den Ausdruck für die duale Wirkung on-shell:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} =& -\partial_m f \partial^m f^* - \frac{m^2}{128} f f^* - \frac{128}{m^2}\partial_m n \partial^m n^* - n n^* \\
& - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - \frac{64}{m^2} i\zeta\sigma^m\partial_m\bar{\zeta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\zeta + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varphi}\bar{\zeta} \\
=& -\partial_m f \partial^m f^* - \frac{m^2}{128} f f^* - \partial_m n \partial^m n^* - \frac{m^2}{128} n n^* \\
& - i\varphi\sigma^m\partial_m\bar{\varphi} - i\zeta\sigma^m\partial_m\bar{\zeta} - \frac{\sqrt{2}m}{16}\varphi\zeta - \frac{\sqrt{2}m}{16}\bar{\varphi}\bar{\zeta}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Die Massenterme erhalten im letzten Schritt ihre übliche Form durch Umdefinieren der Felder $\zeta \to -\frac{m}{8}\zeta$ und $n \to \frac{\sqrt{2}m}{16}n$. Die duale Wirkung enthält also zwei komplexe massive Skalarfelder (4 bosonische Freiheitsgrade). ζ und φ bilden einen massiven Dirac-Spinor (4 fermionische Freiheitsgrade). Anstelle der 3-Form tritt hier ein weiteres skalares Feld n auf, so dass die Gesamtzahl der Freiheitsgrade wie gefordert gleich bleibt. Im massiven Fall ist die 3-Form also nicht mehr dual zu einer Konstante.

4.3. Mehrere 3-Form-Multipletts

Wir verallgemeinern hier die Wirkung (4.4) auf N_3 3-Form-Multipletts $U_{\tilde{a}}$, mit $\tilde{a}$=1,..,N_3. Dazu wird eine Massenmatrix $m_{\tilde{a}\tilde{b}} = m_{\tilde{b}\tilde{a}}$ eingeführt, so dass man die Wirkung

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\Big(S_{\tilde{a}}S^*_{\tilde{a}} - m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})(U_{\tilde{b}} - L_{\tilde{b}}) + \xi_{\tilde{a}}(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})\Big) \\
=& -\partial_m M_{\tilde{a}}\,\partial^m M^*_{\tilde{a}} - i\lambda_{\tilde{a}}\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}_{\tilde{a}} + D_{\tilde{a}}D_{\tilde{a}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{a}} \\
& - m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}\Big(i\chi_{\tilde{a}}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}_{\tilde{b}} - \frac{\sqrt{2}}{16}i\chi_{\tilde{a}}\lambda_{\tilde{b}} + \frac{\sqrt{2}}{16}i\bar{\chi}_{\tilde{a}}\bar{\lambda}_{\tilde{b}} + \frac{1}{128}M_{\tilde{a}}M^*_{\tilde{b}} \\
& + \frac{1}{8}B_{\tilde{a}}D_{\tilde{b}} - \frac{1}{2}B_{\tilde{a}}\Box B_{\tilde{b}} + \frac{1}{768}C_{\tilde{a}npq}C^{npq}_{\tilde{b}}\Big) \\
& + \xi_{\tilde{a}}\big(\frac{1}{16}D_{\tilde{a}} - \frac{1}{4}\Box B_{\tilde{a}}\big)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

erhält. Zuerst wird wieder das Hilfsfeld D durch seine Bewegungsgleichung

$$
2D_{\tilde{a}} - \frac{1}{8}m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}B_{\tilde{b}} + \frac{1}{16}\xi_{\tilde{a}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D_{\tilde{a}} = \frac{1}{16}m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}B_{\tilde{b}} - \frac{1}{32}\xi_{\tilde{a}}
\tag{4.19}
$$

eliminiert. Man findet so die on-shell Wirkung

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -\partial_m M_{\tilde{a}}\,\partial^m M^*_{\tilde{a}} - i\lambda_{\tilde{a}}\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}_{\tilde{a}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{a}} \\
& - m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}\Big(i\chi_{\tilde{a}}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}_{\tilde{b}} - \frac{\sqrt{2}}{16}i\chi_{\tilde{a}}\lambda_{\tilde{b}} + \frac{\sqrt{2}}{16}i\bar{\chi}_{\tilde{a}}\bar{\lambda}_{\tilde{b}} + \frac{1}{128}M_{\tilde{a}}M^*_{\tilde{b}} - \frac{1}{2}B_{\tilde{a}}\Box B_{\tilde{b}} + \frac{1}{768}C_{\tilde{a}npq}C^{npq}_{\tilde{b}}\Big) \\
& - \frac{1}{256}m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}m^2_{\tilde{a}\tilde{c}}B_{\tilde{b}}B_{\tilde{c}} + \frac{1}{256}m^2_{\tilde{a}\tilde{b}}\xi_{\tilde{a}}B_{\tilde{b}} - \frac{1}{1024}\xi_{\tilde{a}}\xi_{\tilde{a}} - \frac{1}{4}\xi_{\tilde{a}}\Box B_{\tilde{a}}.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Wenn man voraussetzt, dass die Massenmatrix invertierbar ist, lässt sich analog zum masselosen Fall ((4.7) & (4.9)) durch die Umdefinitionen

$$\begin{aligned} B_{\tilde{a}} &\to \sqrt{2} m^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}} B_{\tilde{b}} - \frac{1}{2} m^{-2}_{\tilde{a}\tilde{b}} \xi_{\tilde{b}}, \\ \chi_{\tilde{a}} &\to i m^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}} \chi_{\tilde{b}}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

die Wirkung (4.20) auch als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &- \partial^m M_{\tilde{a}} \partial_m M^*_{\tilde{a}} - \frac{1}{128} m^2_{\tilde{a}\tilde{b}} M_{\tilde{a}} M^*_{\tilde{b}} - \partial^m B_{\tilde{a}} \partial_m B_{\tilde{a}} - \frac{1}{128} m^2_{\tilde{a}\tilde{b}} B_{\tilde{a}} B_{\tilde{b}} \\ &- i \lambda_{\tilde{a}} \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}_{\tilde{a}} - i \chi_{\tilde{a}} \sigma^m \partial_m \bar{\chi}_{\tilde{a}} - \frac{\sqrt{2}}{16} m_{\tilde{a}\tilde{b}} \chi_{\tilde{a}} \lambda_{\tilde{b}} - \frac{\sqrt{2}}{16} m_{\tilde{a}\tilde{b}} \bar{\chi}_{\tilde{a}} \bar{\lambda}_{\tilde{b}} \\ &+ H_{\tilde{a}} H_{\tilde{a}} - \frac{1}{768} m^2_{\tilde{a}\tilde{b}} C_{\tilde{a}npq} C^{npq}_{\tilde{b}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

schreiben. Die Massenmatrix lässt sich, da sie symmetrisch ist, immer als $\check{m} = AmA^{-1}$, mit $\check{m}_{\tilde{a}\tilde{b}} = \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} m_{\tilde{a}\tilde{a}}$, diagonalisieren, so dass der Massenterm durch eine Umdefinition der Felder $U_{\tilde{a}} \to \check{U}_{\tilde{a}} = A_{\tilde{a}\tilde{b}} U_{\tilde{b}}$ auf die Masseneigenzustände ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} & m^2_{\tilde{a}\tilde{b}} (U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})(U_{\tilde{b}} - L_{\tilde{b}}) \\ =& A^{-1}_{\tilde{c}\tilde{a}} \check{m}^2_{\tilde{a}\tilde{b}} A_{\tilde{b}\tilde{d}} (U_{\tilde{c}} - L_{\tilde{c}})(U_{\tilde{d}} - L_{\tilde{d}}) \\ =& \check{m}^2_{\tilde{a}\tilde{b}} A_{\tilde{a}\tilde{c}} (U_{\tilde{c}} - L_{\tilde{c}}) A_{\tilde{b}\tilde{d}} (U_{\tilde{d}} - L_{\tilde{d}}) \\ =& \check{m}^2_{\tilde{a}\tilde{b}} (\check{U}_{\tilde{a}} - \check{L}_{\tilde{a}})(\check{U}_{\tilde{b}} - \check{L}_{\tilde{b}}). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ohne die Anwesenheit von Wechselwirkungstermen entkoppeln so die Eigenzustände zu den verschiedenen Massen $\check{m}_{\tilde{a}\tilde{a}}$. Die Dualisierung der Wirkung (4.18) kann durch einen völlig analogen Ansatz wie in (4.11) erfolgen. Es sind dabei keine zusätzlichen Komplikationen zu erwarten.

5. Nicht-renormierbare Wirkung

Die bisher untersuchte Theorie soll nicht als fundamentale Beschreibung verstanden werden. Stattdessen kann sie als effektive Theorie angesehen werden, die ein Grenzfall einer renormierbaren Theorie für kleine Energien darstellt. Das heißt, dass es einen kritischen Wert für die Energie gibt, über den hinaus keine Aussagen mehr abgeleitet werden können. Solche effektive Theorien müssen selbst nicht mehr renormierbar sein. Es dürfen also beliebige reelle Funktionen der Superfelder in der Wirkung vorkommen:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) + Z(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}}) \right). \tag{5.1}$$

Um zunächst den kinetischen Term genauer zu untersuchen, benötigt man die Theta-Entwicklung der Funktion $K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}})$. Wir beschränken dafür die Betrachtung vereinfachend auf ausschließlich bosonische Felder. Damit wird das in (3.8) definierte Feldstärke-Multiplett zu

$$\begin{aligned} S_{\tilde{a}} &= M^*_{\tilde{a}} + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m M^*_{\tilde{a}} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box M^*_{\tilde{a}} + \theta\theta(-D_{\tilde{a}} - iH_{\tilde{a}}), \\ S^*_{\tilde{a}} &= M^*_{\tilde{a}} - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m M^*_{\tilde{a}} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box M^*_{\tilde{a}} + \bar{\theta}\bar{\theta}(-D_{\tilde{a}} + iH_{\tilde{a}}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wie in Anhang B beschrieben, kann eine θ-Integration als Ableitung ausgeschrieben werden. Hier findet man so analog zu (B.4):[1]

$$\begin{aligned} &\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) \\ =&K_{\tilde{a}\tilde{b}^*} \left(-\partial^m M^*_{\tilde{a}}\partial_m M_{\tilde{b}} + D_{\tilde{a}}D_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}} \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hier taucht die Metrik einer Kähler-Geometrie $K_{\tilde{a}\tilde{b}^*}$, mit Kähler-Potential K, auf [20, 34, 35]. Die Wirkung (5.3) ist damit invariant unter der Kähler-Transformation

$$K(S, S^*) \to K(S, S^*) + P(S) + P^*(S^*), \tag{5.4}$$

mit einer beliebigen holomorphen Funktion P. Funktionen von chiralen Feldern haben diese Invarianz, da die höchste Komponente von $P(S)$ eine totale Raumzeit-Ableitung ist.

[1] Die Indizes $\tilde{a}$, etc. an K bezeichnen Ableitungen nach $S_{\tilde{a}}$ bzw. deren unterste Komponente $M^*_{\tilde{a}}$, und $K_{\tilde{a}^*}$ die Ableitung nach $S^*_{\tilde{a}}$ bzw. $M_{\tilde{a}}$. Sie sind Funktionen von $M_{\tilde{a}}$ und $M^*_{\tilde{a}}$ zu verstehen.

Die Superraum-Integration der Funktion $Z(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})$ ergibt durch Vergleich mit (B.2)

$$\begin{aligned}
&\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, Z(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})\\
=&\frac{1}{16}\Bigg[Z_{\tilde{a}}\, \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2}(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})\\
&+ Z_{\tilde{a}\tilde{b}}\bigg(2\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})\,\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}(U_{\tilde{b}} - L_{\tilde{b}}) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}})\,\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2}(U_{\tilde{b}} - L_{\tilde{b}})\bigg)\Bigg]_{\theta=\bar{\theta}=0}\\
=&Z_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{16}D_{\tilde{a}} - \frac{1}{4}\Box B_{\tilde{a}}\right) + \frac{1}{2}Z_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\frac{1}{128}M_{\tilde{a}}M^*_{\tilde{b}} + \frac{1}{768}C^{npq}_{\tilde{a}}C_{\tilde{b}npq}\right).
\end{aligned}\tag{5.5}$$

Die Ableitungen von Z sind jetzt Funktionen von $B_{\tilde{a}}$, der untersten Komponente von $U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}}$. Damit ist jetzt die Wirkung (5.1) durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =&K_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(- \partial^m M^*_{\tilde{a}}\partial_m M_{\tilde{b}} + D_{\tilde{a}}D_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}}\right)\\
&+ Z_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{16}D_{\tilde{a}} - \frac{1}{4}\Box B_{\tilde{a}}\right) + \frac{1}{2}Z_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\frac{1}{128}M_{\tilde{a}}M^*_{\tilde{b}} + \frac{1}{768}C^{npq}_{\tilde{a}}C_{\tilde{b}npq}\right)
\end{aligned}\tag{5.6}$$

in Komponentenfeldern gegeben. Mit der Bewegungsgleichung der Hilfsfelder

$$D_{\tilde{a}} = -\frac{1}{32}K^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}Z_{\tilde{b}},\tag{5.7}$$

erhält man schließlich die Wirkung on-shell:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =&K_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(- \partial^m M^*_{\tilde{a}}\partial_m M_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}Z_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\frac{1}{128}M_{\tilde{a}}M^*_{\tilde{b}} + \frac{1}{768}C^{npq}_{\tilde{a}}C_{\tilde{b}npq}\right) - \frac{1}{4}Z_{\tilde{a}}\Box B_{\tilde{a}} - \frac{1}{1024}Z_{\tilde{a}}K^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}Z_{\tilde{b}}\\
=&K_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(- \partial^m M^*_{\tilde{a}}\partial_m M_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}Z_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(- \frac{1}{2}\partial^m B_{\tilde{a}}\partial_m B_{\tilde{b}} + \frac{1}{128}M_{\tilde{a}}M^*_{\tilde{b}} + \frac{1}{768}C^{npq}_{\tilde{a}}C_{\tilde{b}npq}\right) - \frac{1}{1024}Z_{\tilde{a}}K^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}Z_{\tilde{b}}.
\end{aligned}\tag{5.8}$$

Im zweiten Schritt wurde partiell integriert. Der letzte Term stellt hier ein Potential dar. Es kann je nach Wahl der Funktionen K und Z dazu führen, dass die Felder B und M einen Vakuum-Erwartungswert erhalten. Außerdem können die Komponentenfelder unterschiedliche Massen erhalten. Dabei muss die Supersymmetrie in spontan gebrochener Form vorliegen. Das ist genau dann der Fall, wenn das Minimum des Potentials nicht verschwindet [20, 3].

5.1. Dualisierung im nicht-renormierbaren Fall

Auch den nicht-renormierbaren Fall wollen wir nun dualisieren. Dazu betrachten wir die Wirkung (5.1) zuerst im freien und masselosen Fall ($Z = 0$), mit nur einem 3-Form-Multiplett:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, K(S, S^*) = K_{MM^*}(M^*, M)\left(- \partial_m M\partial^m M^* + D^2 + H^2\right).\tag{5.9}$$

Durch Verallgemeinerung auf eine beliebige Funktion $\hat{K}(F,F^*)$ eines unbeschränkten Superfeldes, in Analogie zum renormierbaren Fall (3.18), findet man hier die first-order Wirkung:

$$\mathcal{L}_{\text{first}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Big(- \hat{K}(F,F^*) + FS + F^*S^* \Big). \tag{5.10}$$

Die Variation nach F liefert jetzt

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial F} = S, \quad \frac{\partial \hat{K}}{\partial F^*} = S^*. \tag{5.11}$$

Setzt man für S und S^* entsprechend diese Ableitungen von $\hat{K}$ ein, lässt sich die Wirkung (5.10) durch die Legendre-Transformierte

$$K(S,S^*) = F\frac{\partial \hat{K}}{\partial F} + F^*\frac{\partial \hat{K}}{\partial F^*} - \hat{K}(F,F^*) = FS + F^*S^* - \hat{K}(F,F^*) \tag{5.12}$$

von $\hat{K}$ ausdrücken, vorausgesetzt, die Beziehung (5.11) lässt sich umkehren und F und F^* als Funktionen von S und S^* schreiben. Durch entsprechende Wahl von $\hat{K}$ reproduziert sich somit die Wirkung (5.9). Die Eigenschaften der Legendre-Transformation werden im Anhang C diskutiert.

Obwohl der Mechanismus in Superfeldern bekannt ist [18], ist weniger klar, wie sich die Legendre-Transformation auf Ebene der Komponentenfelder gestaltet. Es soll daher im Einzelnen gezeigt werden, wie man hier die ursprüngliche Wirkung (5.9) reproduzieren kann. Wir schreiben also (5.10), mit Zurückgreifen auf den Ausdruck (B.1), in Komponenten aus (für weitere Details siehe Anhang B):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{first}} = &- \hat{K}_f \left(d - \frac{1}{4}\Box f - \frac{i}{2}\partial_m w^m\right) - \hat{K}_{f^*} \left(d^* - \frac{1}{4}\Box f^* + \frac{i}{2}\partial_m w^{m*}\right) \\ &- \hat{K}_{ff} \left(- \frac{1}{4} w_m w^m + mn\right) - \hat{K}_{f^*f^*} \left(- \frac{1}{4} w^*_m w^{m*} + m^*n^*\right) \\ &- \hat{K}_{ff^*} \left(- \frac{1}{2} w_m w^{m*} + mm^* + nn^*\right) \\ &+ M^*d + Md^* - n(D+iH) - n^*(D-iH)\end{aligned} \tag{5.13}$$

Wir bilden nun die Bewegungsgleichungen der Felder aus F, um diese später eliminieren zu können. Sie lauten

$$\begin{aligned} d:&\quad \hat{K}_f - M^* = 0, \\ w_m:&\quad \frac{i}{2}\partial_m \hat{K}_{f^*} - \frac{1}{2}\hat{K}_{ff} w_m - \frac{1}{2}\hat{K}_{ff^*} w^*_m = 0, \\ m:&\quad \hat{K}_{ff} n + \hat{K}_{ff^*} m^* = 0, \\ n:&\quad \hat{K}_{ff} m + \hat{K}_{ff^*} n^* + D + iH = 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Die erste Gleichung ist die Projektion von (5.11) auf die unterste Komponente. Hier vermittelt also eine Legendre-Transformation zwischen den Feldern f und M^* beziehungsweise f^* und M.

Durch deren Eigenschaften (siehe Anhang C) können f, f^* und die Ableitungen der Funktion $\hat{K}(f, f^*)$ durch M, M^* und $K(M^*, M)$ ausgedrückt werden. Wir erhalten somit die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} f &= K_{M^*}, \\ f^* &= K_M, \\ \hat{K}_f &= M^*, \\ \hat{K}_{f^*} &= M, \\ \hat{K}_{ff} &= \frac{K_{MM}}{K_{MM}K_{M^*M^*} - K_{MM^*}^2}, \\ \hat{K}_{ff^*} &= \frac{-K_{MM^*}}{K_{MM}K_{M^*M^*} - K_{MM^*}^2}, \\ \hat{K}_{f^*f^*} &= \frac{K_{M^*M^*}}{K_{MM}K_{M^*M^*} - K_{MM^*}^2}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Zusammen mit den Bewegungsgleichungen (5.14) schreiben sich die Komponentenfelder von F als

$$\begin{aligned} w_m &= -\, iK_{MM^*}\partial_m M + iK_{M^*M^*}\partial_m M^*, \\ w_m^* &= -\, iK_{MM}\partial_m M + iK_{MM^*}\partial_m M^*, \\ m &= -\, K_{M^*M^*}(D + iH), \\ m^* &= -\, K_{MM}(D - iH), \\ n &= -\, K_{MM^*}(D - iH), \\ n^* &= -\, K_{MM^*}(D + iH). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Tatsächlich lassen sich diese Gleichungen auch gewinnen, indem man (5.11) zu

$$F = \frac{\partial K}{\partial S}, \qquad F^* = \frac{\partial K}{\partial S^*}, \tag{5.17}$$

umkehrt. Wieder die Wirkung eingesetzt und den ersten Term durch partielle Integration um-geschrieben erhält man zunächst

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \ & \partial_m M^* \big(\frac{1}{4}\partial^m K_{M^*} - \frac{i}{2}(iK_{MM^*}\partial^m M - iK_{M^*M^*}\partial^m M^*)\big) \\
& + \partial_m M \big(\frac{1}{4}\partial^m K_M + \frac{i}{2}(iK_{MM}\partial^m M - iK_{MM^*}\partial^m M^*)\big) \\
& + \frac{1}{K_{MM}K_{M^*M^*} - K^2_{MM^*}} \\
& \cdot \Big(\frac{1}{4}K_{MM}(iK_{MM^*}\partial_m M - iK_{M^*M^*}\partial_m M^*)(iK_{MM^*}\partial^m M - iK_{M^*M^*}\partial^m M^*) \\
& + \frac{1}{4}K_{M^*M^*}(iK_{MM}\partial_m M - iK_{MM^*}\partial_m M^*)(iK_{MM}\partial^m M - iK_{MM^*}\partial^m M^*) \\
& - \frac{1}{2}K_{MM^*}(iK_{MM^*}\partial_m M - iK_{M^*M^*}\partial_m M^*)(iK_{MM}\partial^m M - iK_{MM^*}\partial^m M^*) \\
& - K_{MM}K_{MM^*}K_{M^*M^*}(D+iH)(D-iH) + K^3_{MM^*}(D+iH)(D-iH)\Big) \\
& + 2K_{MM^*}(D+iH)(D-iH) \\
= \ & K_{MM^*}(M^*, M)\ \Big(- \partial_m M \partial^m M^* + D^2 + H^2\Big),
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

woraus sich im letzten Schritt schließlich durch Zusammenfassen (5.9) ergibt. Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass die zweiten Ableitungen K_{MM} und $K_{M^*M^*}$ vollständig wegfallen und nur ein globaler Faktor K_{MM^*} stehen bleibt. Erst jetzt erhält die Wirkung also die Form einer Kähler Geometrie, und ist damit invariant unter der Kähler-Transformation (5.4). Die Transformierte $K'(S,S^*) = K(S,S^*) + P(S) + P^*(S^*)$ mit frei wählbarer Funktion P führt immer zurück zur Wirkung (5.9). Es ist zu erwarten, dass diese Invarianz eine Entsprechung für die duale Wirkung hat, da die Legendre-Transformation (5.12) von K' selbst von P abhängen würde, was keiner physikalischen Freiheit entsprechen kann.

Wir berechnen jetzt die duale Wirkung zum nicht-renormierbaren Fall. Zuerst muss S wieder durch das freie Feld U ausgedrückt werden, so dass man aus (5.10) durch partielle Integration

$$
\mathcal{L}_{\text{first}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \,\Big(- \hat{K}(F,F^*) - 4U(\bar{D}^2 F + D^2 F^*)\Big) \tag{5.19}
$$

erhält. Die Bewegungsgleichung liefert hier die gleiche Randbedingung an F, wie im renormierbaren Fall ($\bar{D}^2 F + D^2 F^* = 0$, siehe (3.25)), wie man auch leicht durch Bilden der Bewegungsgleichungen zu den Komponenten von S, analog zum renormierbaren Fall, aus (5.13) sehen kann. Die duale Wirkung lautet damit

$$
\mathcal{L}_{\text{dual}} = - \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, \hat{K}(F,F^*). \tag{5.20}
$$

Da F kein chirales Feld ist, ist hier die Entwicklung in Komponentenfelder komplizierter. Unter Berücksichtigung der Randbedingung und Vernachlässigung der Fermion-Felder schreibt sich F als

$$
F = f + \theta\theta m + i\bar{\theta}\bar{\theta}c + \theta\sigma^m\bar{\theta}w_m + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-\frac{1}{4}\Box f - \frac{i}{2}\partial_m w^m). \tag{5.21}
$$

Aus (5.13) erhalten wir damit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} =& - \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, \hat{K}(F, F^*) \\
=& - \hat{K}_f \Big(-\frac{1}{4}\Box f - \frac{i}{2}\partial_m w^m \Big) - \hat{K}_{f^*} \Big(-\frac{1}{4}\Box f^* + \frac{i}{2}\partial_m w^{m*} \Big) \\
& - \hat{K}_{ff} \Big(-\frac{1}{4} w_m w^m + icm \Big) - \hat{K}_{f^*f^*} \Big(-\frac{1}{4} w^*_m w^{m*} - icm^* \Big) \\
& - \hat{K}_{ff^*} \Big(-\frac{1}{2} w_m w^{m*} + mm^* + c^2 \Big) \\
=& - \hat{K}_{ff} \Big(\frac{1}{4}\partial_m f \partial^m f + \frac{i}{2}\partial_m f w^m - \frac{1}{4} w_m w^m + icm \Big) \\
& - \hat{K}_{f^*f^*} \Big(\frac{1}{4}\partial_m f^* \partial^m f^* - \frac{i}{2}\partial_m f^* w^{m*} - \frac{1}{4} w^*_m w^{m*} - icm^* \Big) \\
& - \hat{K}_{ff^*} \Big(\frac{1}{2}\partial_m f \partial^m f^* + \frac{i}{2}\partial_m f^* w^m - \frac{i}{2}\partial_m f w^{m*} - \frac{1}{2} w_m w^{m*} + mm^* + c^2 \Big) .
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Hier wurden die Terme mit ersten Ableitungen von $\hat{K}$ partiell integriert. Die Felder m und w_m haben rein algebraische Bewegungsgleichungen und lassen sich somit eliminieren. Die Gleichungen lauten:

$$
\begin{aligned}
m: \quad & \hat{K}_{ff} ic + \hat{K}_{ff^*} m^* = 0, \\
w_m: \quad & \hat{K}_{ff} \Big(\frac{i}{2}\partial_m f - \frac{1}{2} w_m \Big) + \hat{K}_{ff^*} \Big(\frac{i}{2}\partial_m f^* - \frac{1}{2} w^*_m \Big) = 0, \\
\Rightarrow \quad & m = \frac{\hat{K}_{f^*f^*}}{\hat{K}_{ff^*}} ic, \qquad m^* = -\frac{\hat{K}_{ff}}{\hat{K}_{ff^*}} ic, \\
& w_m = -i \frac{(\hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*} + \hat{K}^2_{ff^*})\partial_m f + 2\hat{K}_{ff^*}\hat{K}_{f^*f^*}\partial_m f^*}{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}}, \\
& w^*_m = i \frac{(\hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*} + \hat{K}^2_{ff^*})\partial_m f^* + 2\hat{K}_{ff}\hat{K}_{ff^*}\partial_m f}{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}} .
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Nach Einsetzen der Lösungen in (5.22) erhält man die on-shell Wirkung:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} =& \frac{-\hat{K}_{ff^*}}{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}} \Bigg(\hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}(\partial_m f \partial^m f^* - 2c^2) + \hat{K}^2_{ff^*}(\partial_m f \partial^m f^* + c^2) \\
& \qquad + \hat{K}_{ff}\hat{K}_{ff^*}\partial_m f \partial^m f + \hat{K}_{ff^*}\hat{K}_{f^*f^*}\partial_m f^* \partial^m f^* + \frac{\hat{K}^2_{ff}\hat{K}^2_{f^*f^*}}{\hat{K}^2_{ff^*}} c^2 \Bigg) \\
=& \frac{-\hat{K}_{ff^*}}{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}} \Big(\hat{K}_{ff}\partial_m f + \hat{K}_{ff^*}\partial_m f^* \Big) \Big(\hat{K}_{f^*f^*}\partial^m f^* + \hat{K}_{ff^*}\partial^m f \Big) \\
& \qquad - \frac{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}}{\hat{K}_{ff^*}} c^2 \\
=& \frac{-\hat{K}_{ff^*}}{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}}\, \partial_m \hat{K}_f\, \partial^m \hat{K}_{f^*} - \frac{\hat{K}^2_{ff^*} - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}}{\hat{K}_{ff^*}} c^2 .
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Obwohl das Superfeld F nicht chiral ist, lässt sich diese duale Wirkung durch eine Kähler-Metrik

$$G(f,f^*) = \frac{\hat{K}_{ff^*}}{\hat{K}_{ff^*}^2 - \hat{K}_{ff}\hat{K}_{f^*f^*}} \tag{5.25}$$

darstellen, indem Terme zu totalen Ableitungen von $\hat{K}_f$ und $\hat{K}_{f^*}$ zusammengefasst werden. Diese Funktionen sind hier also als die natürlichen Variablen der Metrik G anzusehen. Die Integrabilitätsbedingung einer Kähler-Metrik ist hier im eindimensionalen Fall trivial.

Wie erwartet taucht auch im nicht-renormierbaren Fall eine Konstante c^2 in der dualen Wirkung auf. Sie wird hier aber mit einem Faktor G^{-1} multipliziert, der selbst eine Funktion der Felder ist. Je nach der Form dieser Funktion erhält man wie in (3.33) auch hier einen Term, der sich als kosmologische Konstante auswirkt. Interessant ist hierbei, dass eine Entwicklung dieses Terms um $\hat{K}_f$ und $\hat{K}_{f^*}$ zu einem Massenterm und Kopplungstermen für diese Felder führen kann, der ebenfalls proportional zu c^2 ist. Das Verhältnis aus Masse und kosmologischer Konstante hängt damit nur noch von der Funktion $\hat{K}$ ab.

5.2. Dualisierung mit mehreren 3-Form-Multipletts

Die Verallgemeinerung der freien Wirkung (5.9) auf N_3 Feldstärke-Multipletts $S_{\tilde{a}}$, mit $\tilde{a} = 1,..,N_3$, lautet

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) = K_{\tilde{a}\tilde{b}^*}(M^*, M)\, \Big(-\partial_m M^*_{\tilde{a}} \partial^m M_{\tilde{b}} + D_{\tilde{a}} D_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}} H_{\tilde{b}} \Big). \tag{5.26}$$

Die Felder $M^*_{\tilde{a}}$ und $M_{\tilde{a}}$ können hier als Koordinaten einer Kähler-Geometrie mit der Metrik $K_{\tilde{a}\tilde{b}^*}(M^*, M)$ verstanden werden [20, 34]. Aufgrund der zusätzlichen Hilfsfelder, die in der dualen Wirkung auftreten, ist nicht unmittelbar klar, wie diese on-shell aussieht. Insbesondere soll hier untersucht werden, welche Metrik dort auftritt. Die first-order Wirkung wird in diesem Fall zu

$$\mathcal{L}_{\text{first}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Big(-\hat{K}(F_{\tilde{a}}, F^*_{\tilde{a}}) + F_{\tilde{a}} S_{\tilde{a}} + F^*_{\tilde{b}} S^*_{\tilde{b}} \Big), \tag{5.27}$$

verallgemeinert und nimmt also die Form einer Legendre-Transformation in N_3 Dimensionen an. Die Rechnung läuft bis zur dualen Wirkung (5.22) vor Eliminierung der Hilfsfelder völlig analog. Jedes der Superfelder $F_{\tilde{a}}$ muss hier die bekannte Randbedingung (3.25) erfüllen. So erhalten wir die duale Wirkung off-shell, wobei jetzt alle Felder und Ableitungen nach den

Feldern Indizes erhalten:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} =& -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\,\hat{K}(F_{\tilde{a}}, F^*_{\tilde{a}}) \\
=& -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\frac{1}{4}\partial_m f_{\tilde{a}}\partial^m f_{\tilde{b}} + \frac{i}{2}\partial_m f_{\tilde{a}} w^m_{\tilde{b}} - \frac{1}{4} w_{\tilde{a}m} w^m_{\tilde{b}} + ic_{\tilde{a}} m_{\tilde{b}}\right) \\
& -\hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*}\left(\frac{1}{4}\partial_m f^*_{\tilde{a}}\partial^m f^*_{\tilde{b}} - \frac{i}{2}\partial_m f^*_{\tilde{a}} w^{m*}_{\tilde{b}} - \frac{1}{4} w^*_{\tilde{a}m} w^{m*}_{\tilde{b}} - ic_{\tilde{a}} m^*_{\tilde{b}}\right) \\
& -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(\frac{1}{2}\partial_m f_{\tilde{a}}\partial^m f^*_{\tilde{b}} + \frac{i}{2}\partial_m f^*_{\tilde{b}} w^m_{\tilde{a}} - \frac{i}{2}\partial_m f_{\tilde{a}} w^{m*}_{\tilde{b}} - \frac{1}{2} w_{\tilde{a}m} w^{m*}_{\tilde{b}} + m_{\tilde{a}} m^*_{\tilde{b}} + c_{\tilde{a}} c_{\tilde{b}}\right).
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Die Bewegungsgleichung für $m_{\tilde{a}}$ ergibt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{dual}}}{\partial m_{\tilde{a}}} &= -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} ic_{\tilde{b}} - \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*} m^*_{\tilde{b}} = 0 \\
\Rightarrow \qquad m_{\tilde{a}} &= -\hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\hat{K}_{\tilde{b}^*\tilde{c}^*} ic_{\tilde{c}}, \\
m^*_{\tilde{a}} &= -\hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}\hat{K}_{\tilde{b}\tilde{c}} ic_{\tilde{c}}.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Hier wurde vorausgesetzt, dass $\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}$ invertierbar ist. Diese und die folgenden Gleichungen können sonst auch gelöst werden, wenn stattdessen $\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}$ und $\hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*}$ invertierbar sind. Mit der Lösung (5.29) für $m_{\tilde{a}}$ eingesetzt, lässt sich die Wirkung (5.28) als

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} =& -\frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\partial^m f_{\tilde{a}} + iw^m_{\tilde{a}}\right)\left(\partial_m f_{\tilde{b}} + iw_{\tilde{b}m}\right) - \frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*}\left(\partial^m f^*_{\tilde{a}} - iw^{*m}_{\tilde{a}}\right)\left(\partial_m f^*_{\tilde{b}} - iw^*_{\tilde{b}m}\right) \\
& -\frac{1}{2}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(\partial^m f_{\tilde{a}} + iw^m_{\tilde{a}}\right)\left(\partial_m f^*_{\tilde{b}} - iw^*_{\tilde{b}m}\right) + \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*} w^m_{\tilde{a}} w^*_{\tilde{b}m} \\
& + \left(\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{c}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}^*}\hat{K}_{\tilde{d}^*\tilde{b}^*} - \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\right) c_{\tilde{a}} c_{\tilde{b}},
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

schreiben. Hier wurden die Terme zusammengefasst, um leichter zu zeigen, dass auch diese duale Wirkung durch eine komplexe Geometrie ausgedrückt werden kann. Wir betrachten jetzt die Bewegungsgleichungen von $w_{\tilde{a}m}$. Sie lauten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{dual}}}{\partial w_{\tilde{a}m}} &= -\frac{i}{2}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\partial_m f_{\tilde{b}} + iw_{\tilde{b}m}\right) - \frac{i}{2}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(\partial_m f^*_{\tilde{b}} - iw^*_{\tilde{b}m}\right) + \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*} w^*_{\tilde{b}m} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{dual}}}{\partial w^*_{\tilde{a}m}} &= \frac{i}{2}\hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*}\left(\partial_m f^*_{\tilde{b}} - iw^*_{\tilde{b}m}\right) + \frac{i}{2}\hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}\left(\partial_m f_{\tilde{b}} + iw_{\tilde{b}m}\right) + \hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}} w_{\tilde{b}m} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Durch diese Gleichungen kann natürlich eine explizite Lösung für $w_{\tilde{a}m}$ durch $f_{\tilde{a}}$ und $f^*_{\tilde{a}}$ bestimmt werden. Es erweist sich aber als nützlich, das Feld zunächst durch die Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
Z_{\tilde{a}m} =& \frac{1}{2}\partial_m f_{\tilde{a}} + \frac{i}{2} w_{\tilde{a}m}, \\
Z^*_{\tilde{a}m} =& \frac{1}{2}\partial_m f^*_{\tilde{a}} - \frac{i}{2} w^*_{\tilde{a}m},
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

auszudrücken, und in die Wirkung (5.30) zu substituieren. Man erhält

$$\begin{aligned} w_{\tilde{a}m} &= -\frac{i}{2}\Big(\partial_m f_{\tilde{a}} + i w_{\tilde{a}m} + \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{c}^*}\hat{K}_{\tilde{c}^*\tilde{b}^*}\left(\partial_m f^*_{\tilde{b}} - i w^*_{\tilde{b}m}\right)\Big) \\ &= -i\big(Z_{\tilde{a}m} + \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{c}^*}\hat{K}_{\tilde{c}^*\tilde{b}^*}Z^*_{\tilde{b}m}\big), \\ w^*_{\tilde{a}m} &= \frac{i}{2}\Big(\partial_m f^*_{\tilde{a}} - i w^*_{\tilde{a}m} + \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}}\hat{K}_{\tilde{c}\tilde{b}}\left(\partial_m f_{\tilde{b}} + i w_{\tilde{b}m}\right)\Big) \\ &= i\big(Z^*_{\tilde{a}m} + \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}}\hat{K}_{\tilde{c}\tilde{b}}Z_{\tilde{b}m}\big). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Setzt man diese Gleichungen nun in (5.30) ein, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\mathcal{L}_{\text{dual}} = \Big(\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{c}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}^*}\hat{K}_{\tilde{d}^*\tilde{b}^*} - \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\Big)\big(Z^m_{\tilde{a}}Z^*_{\tilde{b}m} + c_{\tilde{a}}c_{\tilde{b}}\big). \tag{5.34}$$

Hier tritt also schon eine komplexe Struktur mit einer Metrik $g_{\tilde{a}\tilde{b}^*}$ auf. Diese berechnet sich aus den zweiten Ableitungen der Funktion $\hat{K}$, also den Elementen ihrer Hesse-Matrix. Als Blockmatrix kann sie als

$$\text{Hess}\,\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} & \hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}} \\ \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*} & \hat{K}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*} \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

geschrieben werden. Für die folgenden Schritten ist es zweckmäßig, die folgenden Matrizen zu definieren:

$$\begin{aligned} N_{\tilde{a}\tilde{b}} &= \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} - \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{c}^*}\hat{K}_{\tilde{c}^*\tilde{d}^*}\hat{K}^{-1}_{\tilde{d}^*\tilde{e}}\hat{K}_{\tilde{e}\tilde{b}}, \\ \bar{N}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*} &= \delta_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*} - \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}}\hat{K}_{\tilde{c}\tilde{d}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{d}\tilde{e}^*}\hat{K}_{\tilde{e}^*\tilde{b}^*}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Wir gehen hier von der Invertierbarkeit von N und $\bar{N}$ aus. Damit kann die Metrik in der Wirkung (5.34) durch

$$\begin{aligned} g_{\tilde{a}\tilde{b}^*} &= \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{c}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}^*}\hat{K}_{\tilde{d}^*\tilde{b}^*} - \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}^*} \\ &= -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{e}^*}\big(\delta_{\tilde{e}^*\tilde{b}^*} - \hat{K}^{-1}_{\tilde{e}^*\tilde{f}}\hat{K}_{\tilde{f}\tilde{c}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}^*}\hat{K}_{\tilde{d}^*\tilde{b}^*}\big) \\ &= -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{e}^*}\bar{N}_{\tilde{e}^*\tilde{b}^*} \end{aligned} \tag{5.37}$$

ausgedrückt werden.

Da die Wirkung (5.34) aber durch die $Z_{\tilde{a}m}$ immer noch von den Hilfsfeldern abhängt, lösen wir jetzt die Bewegungsgleichungen (5.31) explizit nach $w_{\tilde{a}m}$ und $w^*_{\tilde{a}m}$ und erhalten

$$\begin{aligned} w_{\tilde{a}m} &= -2iN^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{b}\tilde{c}^*}\hat{K}_{\tilde{c}^*\tilde{d}^*}\partial_m f^*_{\tilde{d}} - i(2N^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}} - \delta_{\tilde{a}\tilde{b}})\partial_m f_{\tilde{b}}, \\ w^*_{\tilde{a}m} &= 2i\bar{N}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*}\hat{K}^{-1}_{\tilde{b}^*\tilde{c}}\hat{K}_{\tilde{c}\tilde{d}}\partial_m f_{\tilde{d}} + i(2\bar{N}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*} - \delta_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*})\partial_m f^*_{\tilde{b}}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

In die Definition (5.32) eingesetzt findet man

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{a}m} &= N^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\hat{K}^{-1}_{\tilde{b}\tilde{c}^*}\partial_m\hat{K}_{\tilde{c}^*}, \\ Z^*_{\tilde{a}m} &= \bar{N}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}^*}\hat{K}^{-1}_{\tilde{b}^*\tilde{c}}\partial_m\hat{K}_{\tilde{c}}, \end{aligned} \tag{5.39}$$

so dass man schließlich für die duale Wirkung (5.34) den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{dual}} &= g_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\left(Z^m_{\tilde{a}} Z^*_{\tilde{b}m} + c_{\tilde{a}} c_{\tilde{b}}\right)\\ &= \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}} N^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}} g_{\tilde{d}\tilde{e}^*} \bar{N}^{-1}_{\tilde{e}^*\tilde{f}^*} \hat{K}^{-1}_{\tilde{f}^*\tilde{b}}\, \partial^m \hat{K}_{\tilde{a}^*} \partial_m \hat{K}_{\tilde{b}} + g_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\, c_{\tilde{a}} c_{\tilde{b}}\\ &= G_{\tilde{a}^*\tilde{b}}\, \partial_m \hat{K}_{\tilde{a}^*} \partial^m \hat{K}_{\tilde{b}} + g_{\tilde{a}\tilde{b}^*}\, c_{\tilde{a}} c_{\tilde{b}}\end{aligned} \tag{5.40}$$

erhält.[2] Hier treten wie im eindimensionalen Fall (5.24) die Funktionen $\hat{K}_{\tilde{a}}$ und $\hat{K}_{\tilde{a}^*}$ als die natürlichen Variablen der Metrik $G_{\tilde{a}^*\tilde{b}}$ auf. Durch die zweiten Ableitungen von $\hat{K}$ ausgedrückt lautet sie

$$\begin{aligned}G_{\tilde{a}^*\tilde{b}} =& \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}} N^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}} g_{\tilde{d}\tilde{e}^*} \bar{N}^{-1}_{\tilde{e}^*\tilde{f}^*} \hat{K}^{-1}_{\tilde{f}^*\tilde{b}}\\ =& - \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}} N^{-1}_{\tilde{c}\tilde{d}} \hat{K}_{\tilde{d}\tilde{g}^*} \bar{N}_{\tilde{g}^*\tilde{e}^*} \bar{N}^{-1}_{\tilde{e}^*\tilde{f}^*} \hat{K}^{-1}_{\tilde{f}^*\tilde{b}}\\ =& - \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{c}} N^{-1}_{\tilde{c}\tilde{b}}\\ =& - \left(N_{\tilde{b}\tilde{c}} \hat{K}_{\tilde{c}\tilde{a}^*}\right)^{-1}\\ =& \left(\hat{K}^{-1}_{\tilde{b}\tilde{c}^*} \hat{K}_{\tilde{c}^*\tilde{d}^*} \hat{K}^{-1}_{\tilde{d}^*\tilde{e}} \hat{K}_{\tilde{e}\tilde{f}} \hat{K}_{\tilde{f}\tilde{a}^*} - \hat{K}_{\tilde{b}\tilde{a}^*}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Damit haben wir hier also eine komplexe Geometrie mit der Metrik $G_{\tilde{a}^*\tilde{b}}$ gefunden. Die zur 3-Form duale Konstante $c_{\tilde{a}}$ taucht in der dualen Wirkung mit einem Faktor $g_{\tilde{a}\tilde{b}^*}$ auf. Die Entwicklung um das Minimum dieser Funktion führt wieder zu einer effektiven kosmologischen Konstante, sowie zu einem Massenterm der Felder $\hat{K}_{\tilde{a}}$. Eine interessante weiterführende Frage wäre nun, ob $G_{\tilde{a}^*\tilde{b}}$ eine Kähler-Metrik darstellt. Dazu müsste festgestellt werden, ob die Integrabilitätsbedingungen [20]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \hat{K}_{\tilde{c}}} G_{\tilde{a}^*\tilde{b}} =& \frac{\partial}{\partial \hat{K}_{\tilde{b}}} G_{\tilde{a}^*\tilde{c}},\\ \frac{\partial}{\partial \hat{K}_{\tilde{c}^*}} G_{\tilde{a}^*\tilde{b}} =& \frac{\partial}{\partial \hat{K}_{\tilde{a}^*}} G_{\tilde{c}^*\tilde{b}},\end{aligned} \tag{5.42}$$

erfüllt sind.

5.3. Dualisierung im Spezialfall reeller Felder

Ein wichtiger Spezialfall für das Kähler-Potential ist $K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) = K(S_{\tilde{a}} + S^*_{\tilde{a}})$. Hier gehen also nur die Realteile der Superfelder $S_{\tilde{a}}$ ein. Das führt dazu, dass einige der in den vorigen Betrachtungen definierten Matrizen singulär werden, und daher auf diesem Weg keine duale Wirkung gefunden werden kann. Um das zu beheben stellen wir fest, dass hier für die Ableitungen von $K(S_{\tilde{a}} + S^*_{\tilde{a}})$

$$\frac{\partial K}{\partial S_{\tilde{a}}} = \frac{\partial K}{\partial S^*_{\tilde{a}}} \tag{5.43}$$

[2] Für den Fall eines komplexen linearen Multipletts, also mit $c_{\tilde{a}} = 0$, wird in Referenz [29] ein abweichendes Ergebnis angegeben.

gilt, und somit die Variablen der Legendre-Transformierten von K

$$\begin{aligned} F_{\tilde{a}} = \frac{\partial K}{\partial S_{\tilde{a}}}, \qquad F^*_{\tilde{a}} = \frac{\partial K}{\partial S^*_{\tilde{a}}} \\ \Rightarrow \quad F_{\tilde{a}} = F^*_{\tilde{a}}, \end{aligned} \tag{5.44}$$

erfüllen müssen. Wir modifizieren daher den Ansatz (5.10) entsprechend, so dass nun die freien Felder $F_{\tilde{a}}$ reell, also Vektormultipletts, sind. Damit erhalten wir

$$\mathcal{L}_{\text{first}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Big(-\hat{K}(F_{\tilde{a}}) + F_{\tilde{a}}\big(S_{\tilde{a}} + S^*_{\tilde{a}}\big)\Big) \tag{5.45}$$

mit den Feldern

$$F_{\tilde{a}} = f_{\tilde{a}} + \theta\theta m_{\tilde{a}} + \bar{\theta}\bar{\theta} m^*_{\tilde{a}} + \theta\sigma^m\bar{\theta} w_{\tilde{a}m} + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\big(d_{\tilde{a}} - \frac{1}{4}\Box f_{\tilde{a}}\big). \tag{5.46}$$

Man findet nach Variation der Wirkung (5.45) nach $F_{\tilde{a}}$ die gesuchte Wirkung

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, K(S_{\tilde{a}} + S^*_{\tilde{a}}), \tag{5.47}$$

die sich wieder als Legendre-Transformation

$$K(S_{\tilde{a}} + S^*_{\tilde{a}}) = F_{\tilde{a}} \frac{\partial \hat{K}}{\partial F_{\tilde{a}}} - \hat{K}(F_{\tilde{a}})\,|_{F_{\tilde{a}}(S_{\tilde{a}}+S^*_{\tilde{a}})}, \tag{5.48}$$

analog dem bisherigen Vorgehen ergibt. Zum andern ergibt sich durch Ausdrücken von $S_{\tilde{a}}$ und $S^*_{\tilde{a}}$ durch $U_{\tilde{a}}$

$$\mathcal{L}_{\text{first}} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Big(-\hat{K}(F_{\tilde{a}}) - 4U_{\tilde{a}}\big(D^2 F_{\tilde{a}} + \bar{D}^2 F_{\tilde{a}}\big)\Big), \tag{5.49}$$

und Variation nach diesen Feldern hier die Randbedingung

$$D^2 F_{\tilde{a}} + \bar{D}^2 F_{\tilde{a}} = 0. \tag{5.50}$$

Ähnlich wie beim linearen Multiplett (2.39) taucht hier die Feldstärke einer 2-Form auf. Zuerst betrachten wir aber wieder die Wirkung (5.45) in Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{first}} = &-\hat{K}_{\tilde{a}} d_{\tilde{a}} + \frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}}\Box f_{\tilde{a}} + \frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} w^m_{\tilde{a}} w_{\tilde{b}m} - \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} m_{\tilde{a}} m^*_{\tilde{b}} \\ &+ m_{\tilde{a}}(-D_{\tilde{a}} + iH_{\tilde{a}}) + m^*_{\tilde{a}}(-D_{\tilde{a}} - iH_{\tilde{a}}) + \frac{i}{2} w^m_{\tilde{a}}\partial_m(M_{\tilde{a}} - M^*_{\tilde{a}}) + d_{\tilde{a}}(M_{\tilde{a}} + M^*_{\tilde{a}}). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Die Reproduktion von (5.47) ist hier wesentlich einfacher als im allgemeinen Fall. Mit den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} d_{\tilde{a}}: &\quad -\hat{K}_{\tilde{a}} + M_{\tilde{a}} + M^*_{\tilde{a}} = 0, \\ w^m_{\tilde{a}}: &\quad \frac{1}{2}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} w^m_{\tilde{b}} + \frac{i}{2}\partial^m(M_{\tilde{a}} - M^*_{\tilde{a}}) = 0, \\ &\Rightarrow \quad w^m_{\tilde{a}} = 2\hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\partial^m(Im\ M_{\tilde{b}}), \\ m_{\tilde{a}}: &\quad -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} m^*_{\tilde{b}} - D_{\tilde{a}} + iH_{\tilde{a}} = 0, \\ m^*_{\tilde{a}}: &\quad -\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}} m_{\tilde{b}} - D_{\tilde{a}} - iH_{\tilde{a}} = 0, \\ &\Rightarrow \quad m_{\tilde{a}} = \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}(-D_{\tilde{b}} - iH_{\tilde{b}}), \end{aligned} \tag{5.52}$$

und den bekannten Relationen der Legendre-Transformation (siehe Anhang C) ergibt sich aus (5.51) bereits

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}}\Box f_{\tilde{a}} - \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\ \partial^m(Im\ M_{\tilde{a}})\partial_m(Im\ M_{\tilde{b}}) + \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\ \Big(D_{\tilde{a}}D_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}}\Big) \\
=& - K_{\tilde{a}\tilde{b}}\ \partial^m(Re\ M_{\tilde{a}})\partial_m(Re\ M_{\tilde{b}}) - \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\ \partial^m(Im\ M_{\tilde{a}})\partial_m(Im\ M_{\tilde{b}}) + \hat{K}^{-1}_{\tilde{a}\tilde{b}}\ \Big(D_{\tilde{a}}D_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}}\Big) \\
=& K_{\tilde{a}\tilde{b}}(M_{\tilde{a}} + M^*_{\tilde{b}})\ \Big(- \partial^m M_{\tilde{a}}\partial_m M^*_{\tilde{b}} + D_{\tilde{a}}D_{\tilde{b}} + H_{\tilde{a}}H_{\tilde{b}}\Big).
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

Mit dieser Bestätigung des Ansatzes können wir jetzt aus (5.51) die duale Wirkung berechnen. Die Bewegungsgleichungen der Felder des 3-Form-Multipletts lauten

$$
\begin{aligned}
M_{\tilde{a}}: &\quad -\frac{i}{2}\partial^m w_{\tilde{a}m} + d_{\tilde{a}} = 0, \\
M^*_{\tilde{a}}: &\quad +\frac{i}{2}\partial^m w_{\tilde{a}m} + d_{\tilde{a}} = 0, \\
\Rightarrow &\quad d_{\tilde{a}} = 0, \quad \partial^m w_{\tilde{a}m} = 0, \\
D_{\tilde{a}}: &\quad - m_{\tilde{a}} - m^*_{\tilde{a}} = 0, \\
C_{\tilde{a}npq}: &\quad -\frac{1}{6}\varepsilon_{mnpq}\partial^m(m_{\tilde{a}} - m^*_{\tilde{a}}), \\
\Rightarrow &\quad m_{\tilde{a}} = ic_{\tilde{a}},
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

womit die Lösung der Randbedingung (5.50) in Komponenten gegeben ist. Die Felder $F_{\tilde{a}}$ schreibt sich damit als

$$
F_{\tilde{a}} = f_{\tilde{a}} + \theta\theta ic_{\tilde{a}} - \bar{\theta}\bar{\theta}ic_{\tilde{a}} + \theta\sigma^m\bar{\theta}\varepsilon_{mnpq}\partial^n B^{pq}_{\tilde{a}} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box f_{\tilde{a}},
\tag{5.55}
$$

wobei die Bedingung $\partial^m w_{\tilde{a}m} = 0$ durch den Ansatz $w_{\tilde{a}m} = \varepsilon_{mnpq}\partial^n B^{pq}_{\tilde{a}}$ gelöst wurde. Diese Lösung setzen wir nun wieder in die first-order Wirkung (5.51) ein und erhalten die duale Wirkung zu (5.47) bzw. (5.53) als

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{dual}} =& -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ \hat{K}(F_{\tilde{a}}) \\
=& \frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}}\Box f_{\tilde{a}} + \frac{1}{4}\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}\varepsilon_{mnpq}\partial^n B^{pq}_{\tilde{a}}\varepsilon^{mokl}\partial_o B_{\tilde{b}kl} - \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}c_{\tilde{a}}c_{\tilde{b}} \\
=& \hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}\ \Big(- \frac{1}{4}\partial^m f_{\tilde{a}}\partial_m f_{\tilde{b}} - \frac{3}{2}\partial^{[n}B^{pq]}_{\tilde{a}}\partial_n B_{\tilde{b}pq} - c_{\tilde{a}}c_{\tilde{b}}\Big).
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

Anstelle der erwarteten $2N_3$ bosonischen Freiheitsgrade in Form von N_3 komplexen skalaren Feldern tauchen hier stattdessen die reellen skalaren Felder $f_{\tilde{a}}$ auf. Die übrigen N_3 Freiheitsgrade werden durch die ebenfalls reellen Tensorfelder $B^{pq}_{\tilde{a}}$ bereitgestellt. Je nach Form der Funktion $\hat{K}(f_{\tilde{a}})$ tritt auch hier analog zu (3.34) eine kosmologische Konstante $\Lambda = \kappa\hat{K}_{\tilde{a}\tilde{b}}(< f_{\tilde{a}} >)c_{\tilde{a}}c_{\tilde{b}}$ auf.

Aufgrund der Invarianz von K unter Kähler-Transformationen (5.4), ist es möglich, dass sich eine Wirkung alternativ wie hier beschrieben durch reelle Felder dualisieren lässt. So kann beispielsweise der renormierbare kinetische Term $K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) = S_{\tilde{a}} S^*_{\tilde{a}}$ durch eine Kähler-Transformation

$$\begin{aligned} K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) &\rightarrow K(S_{\tilde{a}}, S^*_{\tilde{a}}) + P(S_{\tilde{a}}) + P^*(S^*_{\tilde{a}}), \\ S_{\tilde{a}} S^*_{\tilde{a}} &\rightarrow S_{\tilde{a}} S^*_{\tilde{a}} + \frac{1}{2} S_{\tilde{a}} S_{\tilde{a}} + \frac{1}{2} S^*_{\tilde{a}} S^*_{\tilde{a}} = \frac{1}{2} \big(S_{\tilde{a}} + S^*_{\tilde{a}} \big)^2, \end{aligned} \tag{5.57}$$

auch durch den Realteil des Superfeldes S ausgedrückt werden. Der Term kann damit wahlweise durch (5.40) oder (5.56) dualisiert werden.

6. Kopplung an chirale Felder

6.1. Renormierbare Kopplung

Wir wollen in diesem Kapitel die Kopplung des 3-Form-Multipletts an N_c zusätzliche chirale Superfelder Φ_i, mit $i = 1, .., N_c$, untersuchen. Dazu wird der massiven Wirkung (4.4) ein Wechselwirkungsterm und ein kinetischer Term für die chiralen Felder hinzugefügt. Man erhält [19]

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Big(SS^* + \Phi_i \Phi_i^* - m^2 (U - L)^2 + \xi (U - L) \Big) + \int d^2\theta \, S f(\Phi_i) + \int d^2\bar{\theta} \, S^* f^*(\Phi_i^*). \quad (6.1)$$

Diese Wirkung bleibt renormierbar, wenn die Funktion $f(\Phi_i)$ höchstens quadratisch ist. Diese Beschränkung lassen wir hier aber außer Acht, um später leichter auf nicht-renormierbare Wirkungen verallgemeinern zu können.

Die chiralen Felder haben nach (2.23) die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \Phi_i =& A_i + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A_i + \sqrt{2}\theta\Psi_i - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\Psi_i\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F_i, \\ & \text{mit } i = 1, .., N_c. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Durch die Kettenregel der Ableitung kann die Funktion $f(\Phi_i)$ nach θ entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f(\Phi_i)\Big|_{\bar{\theta}=0} =& f(\Phi_i)\Big|_{\theta=0} + \theta\Big(\frac{\partial f(\Phi_i)}{\partial \Phi_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\Big)\Big|_{\theta=0} + \frac{1}{4}\theta\theta\Big(\frac{\partial^2 f(\Phi_i)}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j}\frac{\partial \Phi_i}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\theta} + \frac{\partial f(\Phi_i)}{\partial\Phi_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\theta^2}\Big)\Big|_{\theta=0} \\ =& f(A_i) + \sqrt{2}\theta\Psi_i f_i(A_i) + \theta\theta\Big(- \frac{1}{2} f_{ij}(A_i)\Psi_i\Psi_j + f_i(A_i)F_i\Big). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Damit kann der Wechselwirkungsterm in (6.1) jetzt ausgeschrieben werden, indem die θ-Integration nach (A.10) durch eine Superraum-Ableitung ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW} =& \int d^2\theta \, S f(\Phi_i) + \int d^2\bar{\theta} \, S^* f^*(\Phi_i^*) \\ =& -\frac{1}{4}\Big(D^2 S \; f(\Phi_i) + 2D^\alpha S \; D_\alpha f(\Phi_i) + S \; D^2 f(\Phi_i) + h.c.\Big)\Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\ =& - f(A_i)\; \big(D + iH\big) + f_i(A_i)\; \big(M^* F_i - \lambda\Psi_i\big) - \frac{1}{2} f_{ij}(A_i)\; \Psi_i\Psi_j M^* + h.c. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Mit Zurückgreifen auf den Ausdruck (4.4) lautet also die gesamte Wirkung (6.1) ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &- \partial_m M\, \partial^m M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + D^2 + H^2 \\
&- \partial_m A_i\, \partial^m A_i^* - i\Psi_i\sigma^m\partial_m\bar{\Psi}_i + F_iF_i^* \\
&- m^2\Big(i\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{\sqrt{2}}{16}i\chi\lambda + \frac{\sqrt{2}}{16}i\bar{\chi}\bar{\lambda} + \frac{1}{128}MM^* + \frac{1}{8}BD - \frac{1}{2}B\Box B + \frac{1}{768}C_{npq}C^{npq}\Big) \\
&+ \xi\big(\frac{1}{16}D - \frac{1}{4}\Box B\big) \\
&+ \Big[- f(A_i)\,\big(D + iH\big) + f_i(A_i)\,\big(M^*F_i - \lambda\Psi_i\big) - \frac{1}{2}f_{ij}(A_i)\;\Psi_i\Psi_jM^* + h.c.\Big].
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Zuerst werden die Hilfsfelder durch ihre Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
D:&\quad 2D - \frac{m^2}{8}B + \frac{\xi}{16} - f(A_i) - f^*(A_i^*) = 0 \\
&\Rightarrow \qquad D = \frac{m^2}{16}B - \frac{\xi}{32} + Re\; f(A_i), \\
F_i:&\quad F_i^* + f_i(A_i)M^* = 0 \\
&\Rightarrow \qquad F_i = -f_i^*(A_i^*)M,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

eliminiert. In (6.5) eingesetzt erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &- \partial_m M\, \partial^m M^* - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + H^2 - \partial_m A_i\, \partial^m A_i^* - i\Psi_i\sigma^m\partial_m\bar{\Psi}_i \\
&- m^2\Big(i\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{\sqrt{2}}{16}i\chi\lambda + \frac{\sqrt{2}}{16}i\bar{\chi}\bar{\lambda} + \frac{1}{128}MM^* + \frac{1}{768}C_{npq}C^{npq}\Big) \\
&+ \frac{m^2}{2}B\Box B - \frac{1}{4}\xi\Box B - \frac{m^4}{256}B^2 + \frac{m^2\xi}{256}B - \frac{m^2}{8}B\; Re\; f(A_i) + \frac{\xi}{16}Re\; f(A_i) \\
&- f_i(A_i)f_i^*(A_i^*)MM^* - (Re\; f(A_i))^2 - \frac{\xi^2}{1024} \\
&+ \Big[- if(A_i)H - f_i(A_i)\;\lambda\Psi_i - \frac{1}{2}f_{ij}(A_i)\;\Psi_i\Psi_jM^* + h.c.\Big]
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Die Felder B und χ müssen analog zum kopplungsfreien Fall (4.7) umdefiniert werden, damit die Massenterme ihre gewöhnliche Gestalt erhalten, und um den Parameter ξ wie (4.9) in die Definition von B zu absorbieren. Wir ersetzen also

$$\begin{aligned}
B &\to \frac{\sqrt{2}}{m}B - \frac{\xi}{2m^2}, \\
\chi &\to \frac{i}{m}\chi,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

und erhalten somit die on-shell Wirkung

$$\begin{aligned}
=&-\partial_m A_i\,\partial^m A_i^* - \big(Re\ f(A_i)\big)^2 - i\Psi_i\sigma^m\partial_m\bar{\Psi}_i\\
&-i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} - i\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \Big(\frac{\sqrt{2}}{16}m\chi + f_i(A_i)\Psi_i\Big)\lambda - \Big(\frac{\sqrt{2}}{16}m\bar{\chi} + f_i^*(A_i^*)\bar{\Psi}_i\Big)\bar{\lambda}\\
&-\partial_m M\,\partial^m M^* - \Big(\frac{m^2}{128} + f_i(A_i)f_i^*(A_i^*)\Big)MM^*\\
&-\frac{1}{2}f_{ij}(A_i)\Psi_i\Psi_j M^* - \frac{1}{2}f_{ij}^*(A_i^*)\bar{\Psi}_i\bar{\Psi}_j M\\
&-\partial_m B\partial^m B - \frac{m^2}{128}B^2 - \frac{\sqrt{2}m}{8}B\ Re\ f(A_i)\\
&+H^2 - \frac{m^2}{768}C_{npq}C^{npq} + H\ Im\ f(A_i)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Die Funktion $f(A_i)$ bestimmt hier über die erlaubten Wechselwirkungsprozesse. Sie kann auch Massen

$$\begin{aligned}
m_i^2 =& \frac{\partial^2}{\partial A_i\partial A_i^*}\big(Re\ f(A_i)\big)^2\ |_{A_i=0}\\
=& \frac{1}{2}f_i(0)f_i^*(0)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

für die Felder A_i erzeugen und die Masse von M erhöhen. Außerdem sind die Vakuum-Erwartungswerte von A_i, B und C^{npq} von der Wahl von f abhängig.

6.2. Nicht-renormierbare Kopplung

Die Verallgemeinerung der Wirkung (6.1) auf nicht-renormierbare Kopplungsterme erfolgt jetzt, indem die Konstanten m^2 und ξ durch frei wählbare Funktionen der Felder Φ_i und Φ_i^* ersetzt werden. Es werden außerdem mehrere 3-Form-Multipletts, und nicht-renormierbare kinetische Terme zugelassen. Wir beginnen also mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\Bigg(K(S_{\tilde{a}}, S_{\tilde{a}}^*, \Phi_i, \Phi_{j^*}^*) - m_{\tilde{a}\tilde{b}}^2(\Phi_i, \Phi_{j^*}^*)\Big(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}}\Big)\Big(U_{\tilde{b}} - L_{\tilde{b}}\Big) + \xi_{\tilde{a}}(\Phi_i, \Phi_{j^*}^*)\Big(U_{\tilde{a}} - L_{\tilde{a}}\Big)\Bigg)\\
&+\int d^2\theta\, W(S_{\tilde{a}})f(\Phi_i) + \int d^2\bar{\theta}\, W^*(S_{\tilde{a}}^*)f^*(\Phi_{j^*}^*),\\
&\quad \tilde{a}, \tilde{b} = 1, .., N_3; \qquad i, j^* = 1, .., N_c.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Dabei beschränken wir die Betrachtung auf die bosonischen Felder. Der kinetische Term $K(S_{\tilde{a}}, S_{\tilde{a}}^*, \Phi_i, \Phi_{j^*}^*)$ kann wie (B.4) als Funktion von $(N_3 + N_c)$ chiralen Feldern ausgeschrieben werden. Die übrigen Funktionen schreiben sich in Komponenten nach (B.5) aus. Damit kann die Wirkung (6.11) in Komponentenfeldern ausgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \int d^2\theta d^2\bar\theta \Bigg(K(S_{\tilde a}, S^*_{\tilde a}, \Phi_i, \Phi^*_{j^*}) - m^2_{\tilde a\tilde b}(\Phi_i, \Phi^*_{j^*})\Big(U_{\tilde a} - L_{\tilde a}\Big)\Big(U_{\tilde b} - L_{\tilde b}\Big) + \xi_{\tilde a}(\Phi_i, \Phi^*_{j^*})\Big(U_{\tilde a} - L_{\tilde a}\Big)\Bigg) \\
&+ \int d^2\theta\, W(S_{\tilde a}) f(\Phi_i) + \int d^2\bar\theta\, W^*(S^*_{\tilde a}) f^*(\Phi^*_{j^*}) \\
=& K_{\tilde a^*\tilde b}\Big(- \partial_m M_{\tilde a}\partial^m M^*_{\tilde b} + D_{\tilde a}D_{\tilde b} + H_{\tilde a}H_{\tilde b}\Big) + K_{\tilde a j^*}\Big(- \partial_m M^*_{\tilde a}\partial^m A^*_{j^*} - (D_{\tilde a} + iH_{\tilde a})F^*_{j^*}\Big) \\
&+ K_{\tilde a^* i}\Big(- \partial_m A_i\partial^m M_{\tilde a} + (-D_{\tilde a} + iH_{\tilde a})F_i\Big) + K_{ij^*}\Big(- \partial_m A_i\partial^m A^*_{j^*} + F_iF^*_{j^*}\Big) \\
&- m^2_{\tilde a\tilde b}\Big(\frac{1}{8}B_{\tilde a}D_{\tilde b} - \frac{1}{2}B_{\tilde a}\Box B_{\tilde b} + \frac{1}{128}M_{\tilde a}M^*_{\tilde b} + \frac{1}{768}C_{\tilde a npq}C^{npq}_{\tilde b}\Big) \\
&- \frac{1}{8}m^2_{\tilde a\tilde b,i}B_{\tilde a}M^*_{\tilde b}F_i - \frac{1}{8}m^2_{\tilde a\tilde b,j^*}B_{\tilde a}M_{\tilde b}F^*_{j^*} + \frac{1}{48}iB_{\tilde a}\Big(m^2_{\tilde a\tilde b,i}\partial^m A_i - m^2_{\tilde a\tilde b,j^*}\partial^m A^*_{j^*}\Big)\varepsilon_{mnpq}C^{npq}_{\tilde b} \\
&- m^2_{\tilde a\tilde b,ij^*}B_{\tilde a}B_{\tilde b}\Big(- \partial_m A_i\partial^m A^*_{j^*} + F_iF^*_{j^*}\Big) \\
&+ \xi_{\tilde a}\big(\frac{1}{16}D_{\tilde a} - \frac{1}{4}\Box B_{\tilde a}\big) + \frac{1}{16}\xi_{\tilde a,i}F_iM^*_{\tilde a} + \frac{1}{16}\xi_{\tilde a,j^*}F^*_{j^*}M_{\tilde a} \\
&- \frac{1}{96}i\Big(\xi_{\tilde a,i}\partial^m A_i - \xi_{\tilde a,j^*}\partial^m A^*_{j^*}\Big)\varepsilon_{mnpq}C^{npq}_{\tilde a} + \xi_{\tilde a,ij^*}B_{\tilde a}\Big(- \partial_m A_i\partial^m A^*_{j^*} + F_iF^*_{j^*}\Big) \\
&+ Wf_iF_i + W_{\tilde a}f\big(- D_{\tilde a} - iH_{\tilde a}\big) + W^*f^*_{j^*}F^*_{j^*} + W^*_{\tilde a^*}f^*\big(- D_{\tilde a} + iH_{\tilde a}\big).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Man erhält für die Bewegungsgleichungen der Hilfsfelder:

$$\begin{aligned}
F_i:\quad & K_{\tilde a^* i}\big(- D_{\tilde a} + iH_{\tilde a}\big) + K_{ij^*}F^*_{j^*} - \frac{1}{8}m^2_{\tilde a\tilde b,i}B_{\tilde a}M^*_{\tilde b} - m^2_{\tilde a\tilde b,ij^*}B_{\tilde a}B_{\tilde b}F^*_{j^*} \\
& + \frac{1}{16}\xi_{\tilde a,i}M^*_{\tilde a} + \xi_{\tilde a,ij^*}B_{\tilde a}F^*_{j^*} + Wf_i = 0, \\
D_{\tilde a}:\quad & 2K_{\tilde a^*\tilde b}D_{\tilde b} - K_{\tilde a^* i}F_i - K_{\tilde a j^*}F^*_{j^*} - \frac{1}{8}m^2_{\tilde a\tilde b}B_{\tilde b} + \frac{1}{16}\xi_{\tilde a} - fW_{\tilde a} - f^*W^*_{\tilde a^*} = 0.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Daraus folgen die Lösungen

$$\begin{aligned}
F_i =& \Big[\delta_{ki} - R^*_{k\tilde b^*}K_{\tilde b^* i} - T_{kj^*}R^*_{j^*\tilde b^*}K_{\tilde b^* i}\Big]^{-1}\ \Big[P^{-1}_{ik^*}\big(iK_{k^*\tilde a}H_{\tilde a} - G^*_{k^*}\big) + R^*_{i\tilde b^*}Q_{\tilde b} \\
&+ T_{ik^*}\Big(R^*_{k^*\tilde b^*}Q_{\tilde b} - P^{-1}_{k^* j}\big(iK_{j\tilde a^*} + G_j\big)\Big)\Big], \\
F^*_{j^*} =& \Big[\delta_{i^*j^*} - R_{i^*\tilde b}K_{\tilde b j^*} - T^*_{i^* j}R_{j\tilde b}K_{\tilde b j^*}\Big]^{-1}\ \Big[P^{-1}_{i^* k}\big(- iK_{k\tilde a^*}H_{\tilde a} - G_k\big) + R_{i^*\tilde b}Q_{\tilde b} \\
&+ T^*_{i^* k}\Big(R_{k\tilde b}Q_{\tilde b} - P^{-1}_{kl^*}\big(- iK_{l^*\tilde a} + G^*_{l^*}\big)\Big)\Big], \\
D_{\tilde a} =& \frac{1}{2}K^{-1}_{\tilde a\tilde b^*}\Big(K_{\tilde b^* i}F_i + K_{\tilde b j^*}F^*_{j^*} + Q_{\tilde b}\Big),
\end{aligned} \tag{6.14}$$

mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
P_{ij^*} &= K_{ij^*} - m^2_{\tilde{a}\tilde{b},ij^*} B_{\tilde{a}} B_{\tilde{b}} + \xi_{\tilde{a},ij^*} B_{\tilde{a}}, \\
G_i &= -\frac{1}{8} m^2_{\tilde{a}\tilde{b},i} B_{\tilde{a}} M^*_{\tilde{b}} + \frac{1}{16} \xi_{\tilde{a},i} M^*_{\tilde{a}} + W f_i, \\
Q_{\tilde{b}} &= W_{\tilde{b}} f + W^*_{\tilde{b}^*} f^* + \frac{1}{8} m^2_{\tilde{a}\tilde{b}} B_{\tilde{a}} - \frac{1}{16} \xi_{\tilde{b}}, \\
R_{i\tilde{b}} &= \frac{1}{2} P^{-1}_{ij^*} K_{j^*\tilde{a}} K^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}, \qquad R_{i^*\tilde{b}} = \frac{1}{2} P^{-1}_{i^*j} K_{j\tilde{a}^*} K^{-1}_{\tilde{a}^*\tilde{b}}, \\
T_{ij^*} &= R^*_{i\tilde{b}^*} K_{\tilde{b}k^*} \left(\delta_{j^*k^*} - R^*_{j^*\tilde{b}^*} K_{\tilde{b}k^*} \right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Durch die große Zahl an frei wählbaren Funktionen können mit diesem Ansatz einige komplizierte Wechselwirkungsterme beschrieben werden. Alle Felder können hier, abhängig von der Wahl der Funktionen, verschiedene Massenterme und Vakuum-Erwartungswerte erhalten.

7. Zusammenfassung

Wir haben in dieser Arbeit gesehen, wie eine 3-Form in einer Theorie mit $N = 1$ Supersymmetrie beschrieben werden kann. Deren einzigartige Eigenschaft, über keine masselosen dynamischen Freiheitsgrade zu verfügen, macht es zu einem besonders interessanten Forschungsobjekt. Dazu wurden masselose und massive Wirkungen unter Berücksichtigung einer Eichinvarianz betrachtet. Es wurde gezeigt, wie eine kosmologische Konstante durch Dualisierung der masselosen Wirkungen, und ein skalares Feld im massiven Fall, auftritt. Analog zur bekannten Dualität zwischen chiralem und komplexen linearen Multiplett tritt dabei ein neues Multiplett auf, dass sich vom komplexen linearen Multiplett nur durch ein zusätzliches konstantes Feld unterscheidet.

Die erwartete kosmologische Konstante konnte als Konsequenz einer 3-Form auch in einer supersymmetrischen Theorie hergeleitet werden. Damit kommt der Mechanismus in Frage, den Lambda-Term in den Einstein'schen Feldgleichungen zu erklären, oder einen zusätzlichen Beitrag zu leisten. Der Wert dieser Konstante lässt sich aus der betrachteten Theorie nicht bestimmen, so dass sie nur als phänomenologische Beschreibung dienen kann.

Im nicht-linearen sigma-Modell konnte diese Dualität durch eine Legendre-Transformation des Kähler-Potentials aufgestellt werden. In der dualen Wirkung tritt dabei eine neue Feld-Geometrie auf. Es konnte gezeigt werden, dass sie sich durch eine Metrik mit komplexer Struktur ausdrücken lässt, obwohl ihre Variablen keine chiralen Felder sind. Die auch hier auftretende Konstante steht allerdings im Zusammenhang mit Massen- und Selbstwechselwirkungstermen eines skalaren Feldes, woraus sich eine experimentelle Überprüfbarkeit ergeben könnte.

Schließlich wurde die Kopplung des 3-Form-Multipletts an chirale Felder in einem sigma-Modell diskutiert. Die freie Wahl der Kopplung und der kinetischen Terme ermöglicht es, auf diese Weise eine große Klasse von Theorien zu beschreiben. So können Szenarien mit gebrochener Supersymmetrie, verschiedener Massen für die Teilchenfelder und verschiedener Formen von Wechselwirkungen berücksichtigt werden.

A. Konventionen zur Notation

Diese Arbeit verwendet die Konventionen aus [20], von denen die wichtigsten hier aufgeführt werden sollen. Es werden griechische Buchstaben für Spinorindizes, die die Werte 1 und 2 annehmen, und lateinische für Lorentzindizes, mit den Werten 0 bis 3, benutzt.

Objekte mit einem Spinorindex α, β oder $\dot\alpha$, $\dot\beta$, etc. sind antisymmetrisch unter Vertauschung. Spinorindizes können durch Kontraktion mit dem schiefsymmetrischen Tensor ε erhöht oder abgesenkt werden:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, & \bar\psi_{\dot\alpha} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= -\varepsilon_{\beta\alpha}, & \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} &= -\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha}, \\ \varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} &= 1, & \varepsilon^{21} = \varepsilon_{12} &= -1, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} &= \delta_\alpha^\gamma. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Da Spinoren miteinander antikommutieren gilt

$$\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\gamma = 0, \quad \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\beta}\bar\psi_{\dot\gamma} = 0. \tag{A.2}$$

Zwei Spinoren können durch Kontraktion ihrer Indizes lorentzinvariante Produkte bilden:

$$\begin{aligned} \psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha &= \chi^\alpha\psi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha = \chi\psi, \\ \bar\psi\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = -\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha} &= \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = -\bar\chi^{\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\psi, \\ \theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, &\qquad \theta_\alpha\theta_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta, \\ \bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta, &\qquad \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Durch die Pauli-Matrizen $\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}$ können Produkte aus Spinoren mit einem gepunkteten und einem ungepunkteten Index gebildet werden. Auf diese Weise entstehen Lorentzvektoren.

$$\begin{aligned} \bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha} &= \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^m_{\beta\dot\beta}, \\ \sigma^m_{\alpha\dot\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\sigma^{m\dot\beta\beta}, \\ \sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{\dot\beta\beta}_m &= -2\delta^\beta_\alpha\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}, \\ \psi\sigma^m\bar\chi &= \psi^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = -\bar\chi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\psi_\alpha = -\bar\chi\bar\sigma^m\psi, \\ \psi\sigma^m\bar\sigma^n\chi &= \chi\sigma^n\bar\sigma^m\psi. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Durch den Zusammenhang mit der Lorentzgruppe gilt mit der Minkowski-Metrik η_{mn}:

$$\begin{aligned}
&\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1), \\
&\mathrm{Tr}\ \sigma^m \bar{\sigma}^n = \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} = -2\eta^{mn}, \\
&\theta\sigma^m\bar{\theta}\ \theta\sigma^n\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ \eta^{mn}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Für die Ableitung nach den Graßmann-Variablen θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta &= \delta^\beta_\alpha, & \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}, \\
\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} &= -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\beta}}} &= -\frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}}, \\
\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} &= \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}, & \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\theta\theta &= 4, \\
\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\beta}}}, & \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2}\bar{\theta}\bar{\theta} &= 4.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Das Berezin Integral über diese Variablen ist durch

$$\begin{aligned}
&\int d\theta_\alpha = 0, \\
&\int d\theta_\alpha\ \theta^\beta = \delta^\beta_\alpha, \\
&\int d^2\theta\ \theta\theta = \frac{1}{4}\int \varepsilon^{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta\ \theta\theta = 1, \\
&\int d^2\bar{\theta}\ \bar{\theta}\bar{\theta} = \frac{1}{4}\int \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\ \bar{\theta}\bar{\theta} = 1.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

definiert. Die Integration über Graßmann-Variablen liefert damit das gleiche Ergebnisse, wie eine Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\int d\theta_\alpha\ f(\theta,\bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} f(\theta,\bar{\theta}), \\
&\int d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\ f(\theta,\bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} f(\theta,\bar{\theta}), \\
&\int d^2\theta\ f(\theta,\bar{\theta}) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(\theta,\bar{\theta}), \\
&\int d^2\bar{\theta}\ f(\theta,\bar{\theta}) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} f(\theta,\bar{\theta}), \\
&\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ f(\theta,\bar{\theta}) = \frac{1}{16}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} f(\theta,\bar{\theta}).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Die in (2.17) definierte kovariante Superraum-Ableitung D_α, erfüllt folgende Identitäten:

$$
\begin{aligned}
D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_m, & \bar D_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m,\\
D_\alpha D_\beta &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}D^2, & \bar D_{\dot\alpha}\bar D_{\dot\beta} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar D^2,\\
D_\alpha D_\beta D_\gamma &= 0, & \bar D_{\dot\alpha}\bar D_{\dot\beta}\bar D_{\dot\gamma} &= 0,\\
D^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} - \bar\theta\bar\theta\Box, & \bar D^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial\bar\theta^2} + 2i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} - \theta\theta\Box,\\
[D^2, \bar D_{\dot\alpha}] &= -4i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m D^\alpha, & [\bar D^2, D_\alpha] &= 4i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar D^{\dot\alpha},\\
&& [D^2, \bar D^2] = -\,8iD^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha}\partial_m - 16\Box. &
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

Da sie bis auf totale Ableitungen mit den theta-Ableitungen übereinstimmen, können Integrale über den Superraum nach (A.8) auch durch die kovarianten Ableitungen ausgedrückt werden

$$
\begin{aligned}
\int d^4x \int d^2\theta\, F(x,\theta,\bar\theta) &= -\frac{1}{4}\int d^4x\, D^2F(x,\theta,\bar\theta),\\
\int d^4x \int d^2\bar\theta\, F(x,\theta,\bar\theta) &= -\frac{1}{4}\int d^4x\, \bar D^2F(x,\theta,\bar\theta),\\
\int d^4x\, D_\alpha F(x,\theta,\bar\theta)\; G(x,\theta,\bar\theta) &= -\int d^4x\, F(x,\theta,\bar\theta)\; D_\alpha G(x,\theta,\bar\theta).
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

Diese Operatoren können auch, wie in der letzten Gleichung, durch partielle Integration verschoben werden.

B. Superraum-Integration von Funktionen von Superfeldern

Die Integration über Graßmann-Variablen kann auch als Ableitung geschrieben werden. Bei der Auswertung eines Integrals von allgemeinen Funktionen von Superfeldern über den Superraum können deshalb die Produkt- und die Kettenregel der Ableitung angewendet werden. So kann man die in der Wirkung supersymmetrischer Theorien häufig auftretende $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente einer Funktion $K(F_i, F^*_{j^*})$ von unbeschränkten Superfeldern F_i berechnen. Mit allen fermionischen Komponenten gleich null gesetzt findet man

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, K(F_i, F^*_{j^*}) \\
=& \frac{1}{16} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} K(F_i, F^*_{j^*}) \mid_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
=& \frac{1}{16} \Bigg[K_i \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F_i + K_{j^*} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F^*_{j^*} \\
& + K_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F_j - \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F_j + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F_i \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F_j \right) \\
& + K_{i^*j^*} \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F^*_{i^*} \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} - \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F^*_{i^*} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F^*_{i^*} \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F^*_{j^*} \right) \\
& + K_{ij^*} \left(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} - \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F_i \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F^*_{j^*} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F_i \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F^*_{j^*} \right) \right]_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
=& \frac{1}{16} \Bigg[K_i \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F_i + K_{j^*} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F^*_{j^*} \\
& + K_{ij} \left(2 \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F_j + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F_i \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F_j \right) \\
& + K_{i^*j^*} \left(2 \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F^*_{i^*} \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F^*_{i^*} \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F^*_{j^*} \right) \\
& + K_{ij^*} \left(4 \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} F_i \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F^*_{j^*} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F_i \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F^*_{j^*} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2} F_i \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} F^*_{j^*} \right) \Bigg]_{\theta=\bar{\theta}=0} .
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Aus diesem Ergebnis lässt sich leicht der Ausdruck für die Integration über eine Funktion von nur reellen Variablen $K(V_i)$ ablesen, indem alle $F^*_{j^*}$ gleich null gesetzt werden. Man erhält so

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \int d^2\theta d^2\bar\theta\, K(V_i)\\ =& \frac{1}{16}\left[K_i\, \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar\theta^2}V_i + K_{ij}\left(2\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}V_i\,\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}V_j + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}V_i\,\frac{\partial^2}{\partial\bar\theta^2}V_j\right)\right]_{\theta=\bar\theta=0}.\end{aligned} \tag{B.2}$$

Im Speziellen soll die Entwicklung (B.1) für den Fall chiraler Superfelder Φ_i angegeben werden. Ohne fermionische Komponenten lauten sie

$$\begin{aligned}\Phi_i &= A_i + i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m A_i + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A_i + \theta\theta F_i,\\ \Phi^*_{j^*} &= A^*_{j^*} - i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m A^*_{j^*} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A^*_{j^*} + \bar\theta\bar\theta F^*_{j^*}.\end{aligned} \tag{B.3}$$

Damit erhält man:[1]

$$\begin{aligned}&\int d^4x \int d^2\theta d^2\bar\theta\, K(\Phi_i, \Phi^*_{j^*})\\ =& \int d^4x\, \big[K_i\, \Box A_i + K_{j^*}\, \Box A^*_{j^*}\\ &+ K_{ij}\, \partial_m A_i \partial^m A_j + K_{i^*j^*}\, \partial_m A^*_{i^*}\partial^m A^*_{j^*} - 2K_{ij^*}\, \partial_m A_i\partial^m A^*_{j^*} + 4K_{ij^*}\, F_i F^*_{j^*}\big]\\ =& \int d^4x\, K_{ij^*}\, \big[-\partial_m A_i \partial^m A^*_{j^*} + F_i F^*_{j^*}\big].\end{aligned} \tag{B.4}$$

Im letzten Schritt wurde partiell integriert. Die Felder vermischen hier also durch die Metrik $K_{ij^*}(A_i, A^*_j)$. Da die sich aus der Potential-Funktion $K(A_i, A^*_j)$ durch Ableiten bilden lässt, beschreibt sie eine Kähler-Geometrie [20].

Die übrigen Komponenten lassen sich entsprechend berechnen, so dass man eine Taylor-Entwicklung nach den Graßmann-Variablen θ und $\bar\theta$ erhält. Für chirale Superfelder ohne fermionische Komponenten erhält man

$$\begin{aligned}&K(\Phi_i, \Phi^*_{j^*})\\ =& K + \frac{1}{4}\theta\theta\,\frac{\partial^2 K}{\partial\theta^2} + \frac{1}{4}\bar\theta\bar\theta\,\frac{\partial^2 K}{\partial\bar\theta^2} + \frac{1}{2}\theta\sigma^m\bar\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\sigma_m^{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}K + \frac{1}{16}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar\theta^2}K\\ =& K + \theta\theta K_i F_i + \bar\theta\bar\theta K_j F^*_j + i\theta\sigma^m\bar\theta[K_i\,\partial_m A_i - K_j\,\partial_m A^*_j]\\ &+ \theta\theta\bar\theta\bar\theta\Big[-K_{ij}\,\partial_m A_i\partial^m A^*_j + K_{ij}\, F_i F^*_j\Big].\end{aligned} \tag{B.5}$$

[1] Indizes bezeichnen hier Ableitungen nach dem entsprechenden Argument. Alle Funktionen von Superfeldern und ihre Ableitungen sind an ihren untersten Komponenten auszuwerten, also $K = K(A_i, A^*_j)$.

C. Die Legendre Transformation

Die Legendre-Transformation einer Funktion $K(x)$ ist durch

$$\hat{K}(p) = max_x \Big(x_i p_i - K(x) \Big) \tag{C.1}$$

definiert [36]. Das Maximum kann durch die Ableitung gefunden werden. Es folgt, dass für ein gewähltes p immer

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial x_i}(x) \tag{C.2}$$

gelten muss. Die Umkehrbarkeit dieser Beziehung muss hier vorausgesetzt werden, um eine Funktion $x(p)$ bestimmen zu können. Diese ist eindeutig, solang K konvex (oder konkav) ist. Andernfalls kann nicht garantiert werden, dass (C.2) ein Maximum (oder Minimum) beschreibt. Damit lässt sich die Transformierte auch als

$$\hat{K}(p) = x_i(p) \frac{\partial K}{\partial x_i}(x(p)) - K(x(p)) \tag{C.3}$$

schreiben. Eine Legendre-Transformation drückt den umkehrbaren Übergang einer Funktion zu neuen natürlichen Variablen aus, wie man an ihrem totalen Differential sehen kann:

$$\begin{aligned} d\hat{K} =& p_i dx_i + x_i dp_i - dK \\ =& p_i dx_i + x_i dp_i - \frac{dK}{dx_i} dx_i \\ =& p_i dx_i + x_i dp_i - p_i dx_i \\ =& x_i dp_i \end{aligned} \tag{C.4}$$

Ihre Ableitung erfüllt die Identität

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial p_i} = x_i + \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = x_i \tag{C.5}$$

Der Vergleich mit (C.2) legt nahe, dass eine Rücktransformation durch den gleichen Ausdruck (C.1) gegeben ist. Es gilt

$$\hat{\hat{K}}(x) = xp(x) - \hat{K}(p(x)) = xp(x) - \Big(x(p(x))p(x) - K(x) \Big) = K(x). \tag{C.6}$$

Die Legendre-Transformation ist also als Bijektion zwischen regulären Funktionen ihre eigene Umkehrung. Damit treten solche Funktionen als natürliche Paare $(K, \hat{K})$ auf. Ist eine der beiden bekannt, kann die andere Funktion eindeutig bestimmt werden. Aus der Definition folgt für die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial x_j}{\partial p_k}, \\
\Rightarrow \quad &\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial p_j \partial p_k} = \delta_{ik}, \\
\Rightarrow \quad &\text{Hess } \hat{K} = \big(\text{Hess } K\big)^{-1},
\end{aligned} \tag{C.7}$$

wobei man durch den Zusammenhang (C.2) auf beiden Seiten die gleichen Variablen verwenden muss. Für eine Kähler-Metrik g_{ij^*} gilt damit

$$\begin{aligned}
g_{ij^*} =& \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x^*_{j^*}}(x, x^*), \\
\hat{g}_{ij^*} =& \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial p_i \partial p^*_{j^*}}(p, p^*) = \big(\text{Hess } K\big)^{-1}_{ij^*} \\
=& \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x^*_{j^*}} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial x^*_{k^*}} \frac{\partial^2 K}{\partial x^*_{k^*} \partial x^*_{j^*}} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{C.8}$$

vorausgesetzt, die Variablen von K und $\hat{K}$ lassen sich eindeutig durcheinander ausdrücken.

Literaturverzeichnis

[1] F. Halzen and A. D. Martin, "Quarks And Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics," *New York, Usa: Wiley (1984) 396p*

[2] J. H. Schwarz and N. Seiberg, "String theory, supersymmetry, unification, and all that," Rev. Mod. Phys. **71**, S112 (1999) [arXiv:hep-th/9803179].

[3] H. P. Nilles, "Supersymmetry, Supergravity And Particle Physics," Phys. Rept. **110**, 1 (1984).

[4] M. F. Sohnius, "Introducing Supersymmetry," Phys. Rept. **128**, 39 (1985).

[5] J. Louis, I. Brunner and S. J. Huber, "The supersymmetric standard model," arXiv:hep-ph/9811341.

[6] D. I. Kazakov, "Beyond the standard model," arXiv:hep-ph/0411064.

[7] Eine Einführung in die Stringtheorie geben:
M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION," *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*;
E. Kiritsis, "Introduction to superstring theory," arXiv:hep-th/9709062;
J. H. Schwarz, "Introduction to superstring theory," arXiv:hep-ex/0008017.

[8] G. L. Kane, "The supersymmetry soft-breaking Lagrangian: Where experiment and string theory meet," arXiv:hep-ph/0008190.

[9] M. J. Duff, "Kaluza-Klein Theory In Perspective," arXiv:hep-th/9410046.

[10] T. W. Grimm and J. Louis, "The effective action of type IIA Calabi-Yau orientifolds," Nucl. Phys. B **718**, 153 (2005) [arXiv:hep-th/0412277].

[11] M. J. Duff and P. van Nieuwenhuizen, "Quantum Inequivalence Of Different Field Representations," Phys. Lett. B **94**, 179 (1980).

[12] P. J. E. Peebles and B. Ratra, "The cosmological constant and dark energy," Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003) [arXiv:astro-ph/0207347].

[13] S. W. Hawking, "The Cosmological Constant Is Probably Zero," Phys. Lett. B **134**, 403 (1984);

M. J. Duff, “The Cosmological Constant is Possibly Zero, But the Proof is Probably Wrong,” Phys. Lett. B **226**, 36 (1989);
Z. C. Wu, “The Cosmological Constant is Probably Zero, and a Proof is Possibly Right,” Phys. Lett. B **659**, 891 (2008) [arXiv:0709.3314 [gr-qc]].

[14] G. R. Farrar, G. Gabadadze and M. Schwetz, “On the effective action of N = 1 supersymmetric Yang-Mills theory,” Phys. Rev. D **58**, 015009 (1998) [arXiv:hep-th/9711166].

[15] G. Gabadadze, G. R. Farrar and M. Schwetz, “The spectrum and effective action of SUSY gluodynamics,” arXiv:hep-ph/9809276.

[16] D. G. Cerdeno, A. Knauf and J. Louis, “A note on effective N = 1 super Yang-Mills theories versus lattice results,” Eur. Phys. J. C **31**, 415 (2003) [arXiv:hep-th/0307198].

[17] Für eine moderne Betrachtung siehe:
M. C. Bertin, B. M. Pimentel and P. J. Pompeia, “First order actions: A new view,” Mod. Phys. Lett. A **20**, 2873 (2005) [arXiv:hep-th/0503064];
A. Gaona and J. A. Garcia, “First order actions and duality,” Int. J. Mod. Phys. A **22**, 851 (2007) [arXiv:hep-th/0610022].

[18] S. Penati, A. Refolli, A. Van Proeyen and D. Zanon, “The non-minimal scalar multiplet: Duality, sigma-model, beta-function,” Nucl. Phys. B **514**, 460 (1998) [arXiv:hep-th/9710166].

[19] G. Girardi, R. Grimm, B. Labonne and J. Orloff, “Correspondence between 3-form and non-minimal multiplet in supersymmetry,” arXiv:0712.1923 [hep-th].

[20] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” *Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p*

[21] S. R. Coleman and J. Mandula, “All Possible Symmetries of the S Matrix,” Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).

[22] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, “All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix,” Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).

[23] A. Bilal, “Introduction to supersymmetry,” arXiv:hep-th/0101055.

[24] J. D. Lykken, “Introduction to supersymmetry,” arXiv:hep-th/9612114.

[25] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, “Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry,” Front. Phys. **58**, 1 (1983) [arXiv:hep-th/0108200].

[26] J. Louis and W. Schulgin, “Massive tensor multiplets in N = 1 supersymmetry,” Fortsch. Phys. **53**, 235 (2005) [arXiv:hep-th/0410149].

[27] J. Louis and J. Swiebodzinski, “Couplings of N = 1 chiral spinor multiplets,” Eur. Phys.

J. C **51**, 731 (2007) [arXiv:hep-th/0702211].

[28] C. P. Burgess, J. P. Derendinger, F. Quevedo and M. Quiros, “Gaugino condensates and chiral linear duality: An Effective Lagrangian analysis,” Phys. Lett. B **348**, 428 (1995) [arXiv:hep-th/9501065].

[29] B. B. Deo and S. J. Gates, “Comments On Nonminimal N=1 Scalar Multiplets,” Nucl. Phys. B **254**, 187 (1985).

[30] T. Hubsch, “Linear and chiral superfields are usefully inequivalent,” Class. Quant. Grav. **16**, L51 (1999) [arXiv:hep-th/9903175].

[31] G. R. Farrar, G. Gabadadze and M. Schwetz, “On the effective action of N = 1 supersymmetric Yang-Mills theory,” Phys. Rev. D **58**, 015009 (1998) [arXiv:hep-th/9711166].

[32] G. ’t Hooft, “Introduction To General Relativity,” *Princeton, USA: Rinton Press, Inc. (2001) 96 p*

[33] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, “The Stueckelberg field,” Int. J. Mod. Phys. A **19**, 3265 (2004) [arXiv:hep-th/0304245].

[34] J. W. van Holten, “Kaehler manifolds and supersymmetry,” Acta Phys. Polon. B **34**, 5983 (2003) [arXiv:hep-th/0309094].

[35] U. Lindstrom, “Generalized complex geometry and supersymmetric non-linear sigma models,” arXiv:hep-th/0409250.

[36] R. K. P. Zia, E. F. Redish and S. R. McKay, “Making Sense of the Legendre Transformation,” arXiv:0806.1147v2 [physics.ed-ph]

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Ich möchte mich besonders bei Herrn Louis für die engagierte Betreuung meiner Diplomarbeit und seine freundliche Art bedanken.

Großer Dank gilt auch meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines ganzen Studiums.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur verfasst zu haben.

Die Arbeit wurde noch nicht in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Ich erkläre mich mit der späteren Veröffentlichung oder Ausleihe dieser Arbeit einverstanden.

Hamburg, 15. April 2009 ____________________

Kai Groh