Supersymmetrie und Supergravitation in 2+1 Dimensionen

Diplomarbeit am
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

Vorgelegt von
Olaf Hohm

September 2003

Gutachter der Diplomarbeit:	Prof. Dr. Jan Louis
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Gerhard Mack

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wollte man eine allgemeine Tendenz in der Entwicklung der theoretischen Physik überhaupt ausmachen, so müßte diese wohl so lauten: Alle fundamentalen Konzepte in ihr streben einer Vereinheitlichung zu. Mit anderen Worten, die Zahl der grundlegenden Konstituenten einer jeden Theorie nimmt im Zuge der Weiterentwicklung der Physik ab. Die Beispiele, die sich hierfür finden lassen, sind zahlreich. So erkannten Maxwell und Einstein die wahre Natur der zuvor als fundamental erachteten elektrischen und magnetischen Felder als unterschiedliche Manifestationen ein und desselben fundamentalen Objekts: des Feldstärketensors. Unsere Wahrnehmung von Elektrizität und Magnetismus entspricht hiernach nur einer willkürlichen Koordinatenwahl, durch die das lorentz-kovariante Objekt des Feldstärketensors auf unkanonische Weise in Komponenten zerfällt.

Bei aller Vereinheitlichung in der Physik des 20. Jahrhunderts konnte doch eine Dichothomie nicht völlig aufgelöst werden: die der Unterscheidung zwischen Kraft und Materie. Es stellt sich unser Bild der Welt in Form des Standardmodells nämlich so dar: Auf der einen Seite existiert die Materie, beschrieben durch Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen, und auf der anderen Seite die Eichwechselwirkungen, beschrieben durch bosonische Spin-1-Vektorfelder. Ferner gibt es die Gravitationswechselwirkung, je nach Herkunft beschrieben als Spin-2-Feld oder als Geometrie der Raumzeit. In der Quantenfeldtheorie ist die Unterscheidung zwischen Wechselwirkung und Materie noch vorhanden, wenn auch in einer stark abgeschwächten Form. Die Eichfelder erscheinen in der Quantisierung als Austauschteilchen sowohl zwischen den Fermionen als auch zwischen den Bosonen und sind so die Quelle der Wechselwirkung; jedoch kann dasselbe auch von den Fermionen behauptet werden. Geht man über Tree-Level hinaus, so können auch diese - etwa in QED - als Austauschteilchen sogar nur zwischen Bosonen wirken, z.B. in einer effektiven $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$ Streuung, bei der die Photonen elektromagnetisch miteinander wechselwirken, obwohl es hierfür keinen fundamentalen Vertex gibt. Die Unterscheidung zwischen Materie und Wechselwirkung ist in der Quantenfeldtheorie also nur noch in einer sehr rudimentären Form vorhanden, und es besteht keine Veranlassung, diese nicht ganz aufzugeben.

Ein Ansatz zur Vereinheitlichung von Wechselwirkung und Materie bzw. von Bosonen und Fermionen ist Supersymmetrie (SUSY). Diese erweitert die bekannten Raum-Zeit-Symmetrien der speziellen oder in Supergravitation die der allgemeinen Relativitätstheorie zu einer Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, in der beide durch Symmetrietransformationen auseinander hervorgehen. Beinhaltet Supersymmetrie auch Gravitation, wie dies von einer fundamentalen Theorie zu verlangen ist, so kann sie helfen, eine andere Erscheinungsform der Materie-Kraft-Dichothomie zu beseitigen: das ästhetische Ungleichgewicht in den Einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Die linke Seite derselben,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

wird eindeutig und vollkommen durch die Geometrie der Raumzeit, d.h. durch die Gravitationswechselwirkung selbst beschrieben, während auf der rechten Seite der mehr oder minder beliebige Energie-Impuls-Tensor der Materie[1] steht. "Sie gleicht aber einem Gebäude, dessen einer Flügel aus vorzüglichem Marmor (linke Seite der Gleichung), dessen anderer Flügel aus minderwertigem Holze gebaut ist (rechte Seite der Gleichung). Die phänomenologische Darstellung der Materie ist nämlich nur ein roher Ersatz für eine Darstellung, welche allen bekannten Eigenschaften der Materie gerecht würde." (A. Einstein, [1]) Diese Beliebigkeit des Energie-Impuls-Tensors mindert die Vorhersagekraft der Relativitätstheorie erheblich. Im Extremfall kann man sogar beliebige "Designer"-Raumzeiten erhalten, indem man die rechte Seite der Gleichung durch die linke definiert und so dafür sorgt, da diese trivial erfüllt ist. Wenn Supergravitation allerdings realisiert wäre, könnte diese die möglichen Formen der Materie als die supersymmetrischen Partner des Gravitons identifizieren und so die Herkunft des Energie-Impuls-Tensors klären. Wie elektrische und magnetische Felder durch Lorentztransformationen könnten Wechselwirkung und Materie durch Supersymmetrie ineinander übergehen, und die Unterscheidung wäre endgültig beseitigt.

Neben den vielen konzeptionellen und praktischen Vorzügen von Supersymmetrie (siehe etwa: [2]) gibt es jedoch einen entscheidenden Nachteil: Die von ihr vorhergesagte Bose-Fermi-Entartung, d.h. die Notwendigkeit einer gleiche Zahl bosonischer wie fermionischer Freiheitsgrade und Massenentartung zwischen ihnen, wird in der Natur nicht beobachtet. Supersymmetrie muß also in irgendeiner Form gebrochen sein.

Nun ist die moderne Sichtweise von Supersymmetrie jedoch nicht die, daß es sich hierbei um eine fundamentale Theorie handelt, sondern vielmehr die einer effektiven Beschreibung, die gültig ist unterhalb der Energieskalen einer grundlegenderen Theorie wie eventuell der Stringtheorie, die die Supersymmetrie der Raumzeit vorhersagt. Eine der wichtigsten Fragen auf diesem Gebiet ist also: Wie wird Supersymmetrie gebrochen? Grundsätzlich gibt es zumindest zwei Möglichkeiten. Erstens

[1] Dieser kann natürlich Eichfelder beinhalten, so daß er auch im engeren Sinne nicht nur "Materie" enthält.

kann die Supersymmetrie spontan gebrochen sein, so daß nur der Grundzustand nicht supersymmetrisch ist und damit zu einem Teilchenspektrum ohne Bose-Fermi-Entartung führt. Zweitens kann die Supersymmetrie explizit gebrochen sein, d.h. zu einer supersymmetrischen Wirkung werden explizit Terme hinzugefügt, die die Symmetrie brechen. Von einem physikalischen Standpunkt aus ist der erste Ansatz weit befriedigender, bringt jedoch auf der anderen Seite folgendes Problem mit sich. Bei spontaner Symmetriebrechung fordert die supersymmetrische Variante des Goldstone-Theorems die Existenz eines masselosen Goldstonefermions, das in der Natur aber nicht beobachtet wird. In lokaler Supersymmetrie, d.h. Supergravitation, kann dieses jedoch wegtransformiert werden, ist also nicht mehr vorhanden, so daß kein Widerspruch zu den Beobachtungen besteht. Phänomenologisch akzeptable Modelle für spontane Symmetriebrechung funktionieren also nur für lokale Supersymmetrie, weswegen wir uns in dieser Arbeit auch nur auf solche beschränken werden. Mögliche spontane Symmetriebrechungen können nun auf verschiedene Weise ablaufen. Zunächst wird die Anzahl der Supersymmetrien durch eine Zahl N angegeben, und eine Möglichkeit ist, daß die Theorie von der in $D = 4$ maximal möglichen Supersymmetrie $N = 8$ spontan auf $N = 0$, wie es die Empirie anscheinend verlangt, gebrochen wird. Eine andere Möglichkeit ist, daß die Supersymmetrie zunächst auf $0 < N < 8$ gebrochen wird und erst dann, bei einer kleineren Energieskala, auf $N = 0$ [3]. Es gibt jedoch ein No-go-Theorem, das solche spontanen partiellen Brechungen verbietet[2] und so schien dies für eine gewisse Zeit keine realisierbare Möglichkeit zu sein. Dieses No-go-Theorem läßt sich jedoch umgehen, und so wird in dieser Arbeit das einfachste Beispiel einer partiellen Brechung von $N = 2 \to N = 1$ im Fall von Supergravitation in $2 + 1$ Dimensionen untersucht. Solche Beispiele sind in vier Dimensionen nicht nur von phänomenologischem, sondern auch von kosmologischem Interesse, z.B. im Zusammenhang mit Hybridinflation [4].

Diese Arbeit wird sich ausschließlich mit Supersymmetrie und Supergravitation in $2 + 1$ Dimensionen ($D = 3$) beschäftigen, was sich wie folgt motivieren läßt: Zum einen stellt die zu untersuchende Brechung $N = 2 \to N = 1$ eine neue Variante partieller Brechung dar, da diese aus einer vierdimensionalen Perspektive einer Brechung von $N = 1$ nach $N = \frac{1}{2}$ entspricht. Zum anderen kann man Theorien in $D = 3$ zum besseren Verständnis von Stringkompaktifizierungen untersuchen. Man möchte etwa die Kompaktifizierung von M-Theorie, die eine Theorie in $D = 11$ ist, auf einer 7-dimensionalen Mannigfaltigkeit, wie einer G_2-Mannigfaltigkeit, nach $D = 4$ verstehen, hat dabei aber das Problem, daß M-Theorie selbst nicht ausreichend verstanden ist. Stattdessen kann man eine der besser untersuchten 10-dimensionalen Supergravitationstheorien auch auf einer 7-dimensionalen Mannigfaltigkeit kompaktifizieren und erhält eine Theorie in $D = 3$. Zum Vergleich kann man auch M-Theorie auf $D = 3$ kompaktifizieren [5, 6]. Bei nichtverschwindenden Hintergrundflüssen wird dabei typischerweise ein Teil der Supersymmetrie in $D = 3$ gebrochen sein. Zu einem besseren Verständnis von Stringkompaktifizierung ist also ein besseres Verständnis der allgemeinen Aspekte spontaner Supersymmetriebrechung in $D = 3$ notwendig.

[2]Siehe die Diskussion in 4.1.2.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen strukturiert. Wir behandeln in Kap. 2 zunächst globale Supersymmetrie. Hierzu werden wir die Multipletts im massiven und masselosen Fall für beliebiges N konstruieren und dann angeben, wie man für $N = 1$ und $N = 2$ Wirkungen finden kann. In Kap. 3 behandeln wir Supergravitation in $D = 3$, insbesondere geeichte Supergravitation, die für unsere Untersuchung von spontaner Symmetriebrechung notwendig ist. In Kap. 4 wenden wir uns einem Modell partieller $N = 2 \to N = 1$ Brechung zu, das in [6] gefunden wurde. Hierbei werden wir den Ablauf eines Super-Higgs-Mechanismus und eines topologischen Higgs-Mechanismus finden. In Anhang A werden ferner die Eigenschaften der Lorentzgruppe in $D = 3$ untersucht und die verwendete Konvention eingeführt.

Kapitel 2

Globale Supersymmetrie in $D = 3$

2.1 Die Superalgebra und ihre Multipletts

2.1.1 Die Superalgebra

In konventionellen Quantenfeldtheorien sind die Symmetrien der Raumzeit, die in der Poincaregruppe und ihren Darstellungen verschlüsselt sind, und die zahlreichen sogenannten inneren Symmetrien, die also nicht auf der Raumzeit wirken, vollkommen unabhängig. Es stellt sich die Frage, ob man diese Symmetrien in irgendeinem Sinne vereinheitlichen kann, ob man etwa Bosonen und Fermionen, die sich ja in unterschiedlichen Darstellungen der Poincaregruppe transformieren und ansonsten eventuell inneren Symmetrien unterliegen, zu einem gemeinsamen Multiplett[1] zusammenfassen kann. Eine relativ präzise Beantwortung dieser Frage gibt in vier Dimensionen das Coleman-Mandula-Theorem, das unter ziemlich allgemeinen Annahmen an die S-Matrix, wie etwa Lokalität und relativistische Kovarianz der zugrundeliegenden Quantenfeldtheorie sowie der Annahme, daß die Symmetrie in Form einer Lie-Gruppe beschrieben wird, zeigt, daß die einzig möglichen Symmetrien durch ein direktes Produkt der Poincaregruppe mit diversen davon unabhängigen, inneren Symmetriegruppen beschrieben werden. Supersymmetrie ist die im wesentlichen einzige Möglichkeit diese Restriktion zu umgehen und zeichnet sich dadurch aus, die Symmetrien nicht nur durch gewöhnliche Lie-Gruppen und den zugehörigen Lie-Algebren zu beschreiben, sondern in den Algebren, in denen die Lie-Klammer bzw. der Kommutator eine hervorstechende Rolle spielt, auch Antikommutatoren zuzulassen, um damit gewissermaßen auch fermionische Freiheitsgrade zu involvie-

[1]Der Begriff Multiplett bezeichnet die Elemente des Darstellungsraumes einer irreduziblen Darstellung.

ren. Die gewöhnliche Lie-Algebra der Poincaregruppe

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}), \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu), \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wird hierbei um einige sogenannte Superladungen erweitert, die nichttriviale Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen mit den Poincare-Generatoren erfüllen. In $D = 3$ sind diese von der Form [7]

$$\begin{aligned} \{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_\beta\} &= 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu\delta^{IJ} \\ [M^{\mu\nu}, Q^I_\alpha] &= (\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^I_\beta \\ [P_\mu, Q^I_\alpha] &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Hierbei sind die Q_α Komponenten 2-komponentiger Majoranaspinoren und die $I, J = 1, ..., N$ kennzeichnen die verschiedenen Superladungen. Ferner sind $\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ die Lorentzgeneratoren in der Spinordarstellung.[2] Die Superalgebra ist eine $\mathbb{Z}_2$-gradierte Algebra. Dies bedeutet, daß die Algebra eine direkte Summe zweier Unteralgebren ist, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$, so daß man die Elemente von $\mathfrak{A}_0$ als gerade und die von $\mathfrak{A}_1$ als ungerade interpretieren kann. Definiert man nun eine Abbildung $\eta : \mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{A}_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ durch $\eta(x) = 0$ für $x \in \mathfrak{A}_0$ und $\eta(x) = 1$ für $x \in \mathfrak{A}_1$, so erklärt man die Lie-Klammer auf dieser $\mathbb{Z}_2$-gradierten Algebra als die bilineare Fortsetzung von

$$[x, y\} = xy - (-1)^{\eta(x)\eta(y)}yx. \tag{2.3}$$

Für den geraden Teil reduziert sich das also auf den Kommutator, für den ungeraden auf den Antikommutator.

Nutzt man die Majoranabedingung für die Q_α, so läßt sich die Algebra folgendermaßen umformulieren: Wegen $Q^c = C\overline{Q}^t = Q$ gilt $\overline{Q} = (C^{-1}Q)^t$ oder $\overline{Q}_\beta = (C^{-1})_{\beta\gamma}Q_\gamma$. Die Superalgebra lautet dann also (ohne Einschränkung für $N = 1$)

$$\{Q_\alpha, (C^{-1})_{\beta\gamma}Q_\gamma\} = 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu. \tag{2.4}$$

Multipliziert man beiderseits mit $C_{\delta\beta}$, so folgt:

$$\{Q_\alpha, C_{\delta\beta}(C^{-1})_{\beta\gamma}Q_\gamma\} = \{Q_\alpha, \delta_{\delta\gamma}Q_\gamma\} = 2C_{\delta\beta}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu, \tag{2.5}$$

also $\{Q_\alpha, Q_\delta\} = 2(C(\gamma^\mu)^t)_{\delta\alpha}P_\mu$. Nach Definition der Ladungskonjugationsmatrix hat man jedoch $C(\gamma^\mu)^tC^{-1} = -\gamma^\mu$, also $C(\gamma^\mu)^t = -\gamma^\mu C$. Nach Umbenennung der Indizes ergibt sich die Superalgebra also zu:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu, \tag{2.6}$$

[2] Zu den Eigenschaften der Lorentzgruppe in $D = 3$ und den verwendeten Konventionen siehe Anhang A.

wobei ausgenutzt wurde, daß die $(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}$ symmetrisch in ihren Indizes sind. Benutzt man nun die im Anhang A erläuterte Korrespondenz zwischen Dreiervektoren und symmetrischen reellen 2×2 - Matrizen: $P_{\alpha\beta} = (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu$, so reduziert sich die Superalgebra gar auf:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2P_{\alpha\beta}. \tag{2.7}$$

2.1.2 Dimensionale Reduktion der Superalgebra in $D = 4$

Man kann sich die Superalgebra auch durch dimensionale Reduktion aus der vierdimensionalen entstanden denken. Setzt man nämlich $P_3 = 0$ oder interpretiert diese Komponente als zentrale Ladung, so muß sich die Superalgebra für $D = 3$ ergeben. Die Superalgebra wird in $D = 4$ folgendermaßen formuliert:[3] Die Superladungen sind zweikomponentige komplexe Weylspinoren Q_α, wobei $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ das komplex-konjugierte bezeichnet. (Der Punkt zeigt an, daß sich die Spinoren in der zu $SL(2,\mathbb{C})$ komplex-konjugierten Darstellung transformieren.) Die Algebra lautet dann:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} &= -2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Äquivalent hierzu ist eine (2.2) analoge Darstellung durch reell 4-komponentige Majoranaspinoren. Es ist jedoch zu bedenken, daß in $D = 4$ die N fache Supersymmetrie $4N$ reelle Freiheitsgrade hat, während hingegen in $D = 3$ N fache Supersymmetrie $2N$ reelle Freiheitsgrade hat. $N = 1$ Supersymmetrie in $D = 4$ entspricht also $N = 2$ Supersymmetrie in $D = 3$. Diese Analyse ist jedoch eine reine Abzählung der Freiheitsgrade, und es ist zu beachten, daß die Weylspinoren in vier Dimensionen prinzipiell eine konzeptionell andere Bedeutung haben als die Majoranaspinoren in drei Dimensionen. Um nun die dimensionale Reduktion durchzuführen, muß die Stabilisatorgruppe der P_3-Richtung bestimmt werden, d.h. diejenige Untergruppe von $SL(2,\mathbb{C})$, die Lorentztransformationen mit $P_3' = P_3$ entsprechen. Für diese gilt:

$$G_{(0,0,0,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid uu^* - vv^* = 1 \right\} \subset SL(2,\mathbb{C}), \tag{2.9}$$

was man sofort nachrechnet:

$$\begin{aligned} M\sigma_3 M^\dagger &= M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^\dagger = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & v \\ -v^* & -u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mid u \mid^2 - \mid v \mid^2 & 0 \\ 0 & \mid v \mid^2 - \mid u \mid^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dies ist bei genauerer Betrachtung $SU(1,1)$, nämlich die Gruppe aller Transformationen, die die quadratische Form

$$\eta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \eta(v,w) = v^\dagger I w, \ \text{wobei } I = \sigma_3, \tag{2.11}$$

[3]Die verwendete Konvention im Fall $D = 4$ richtet sich nach [8], nur mit dem Unterschied, daß hier ein Minuszeichen in der Superalgebra auftaucht, da dort die Signatur $(-1, 1, 1, 1)$ verwendet wird.

invariant lassen. Bekanntermaßen sind $SU(1,1)$ und $SL(2,\mathbb{R})$ jedoch isomorph, und da die hier verwendete Spinordarstellung $SL(2,\mathbb{R})$ ist, bestimmen wir stattdessen denjenigen Vierervektor, dessen Stabilisatorgruppe gerade diese Gruppe ist. Es stellt sich heraus, daß dieser Vierervektor $(0,0,1,0)$ ist. Zum Beweis sei $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, dann folgt:

$$\begin{aligned} M\sigma^2 M^\dagger &= M \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -is & -iu \\ ir & it \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i(ur-ts) \\ i(ur-ts) & 0 \end{pmatrix} = \sigma^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

wegen $\det M = ru - ts = 1$. Wir können jetzt die dimensionale Reduktion explizit durchführen. Fordert man, daß sich die Weylspinoren nur unter der Untergruppe $SL(2,\mathbb{R})$ transformieren, so kann man in lorentzinvarianter Weise $P_2 = 0$ setzen. Man erhält für die Superalgebra

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = -2(\sigma^0 P_0 + \sigma^1 P_1 + \sigma^3 P_3)_{\alpha\dot\beta}. \tag{2.13}$$

Man kann nun die Unterscheidung zwischen gepunkteten und ungepunkteten Indizes fallenlassen, da für die reelle Untergruppe die komplex-konjugierte Darstellung mit der gewöhnlichen zusammenfällt. Die bezüglich $SL(2,\mathbb{C})$ irreduzible Darstellung der Weylspinoren wird so bezüglich der reellen Untergruppe $SL(2,\mathbb{R})$ reduzibel. Zerlegt man die Weylspinoren nämlich in Real- und Imaginärteil

$$Q_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1_\alpha + iQ^2_\alpha) \text{ und damit } \overline{Q}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1_\alpha - iQ^2_\alpha), \tag{2.14}$$

so transformieren diese unabhängig unter $SL(2,\mathbb{R})$. Setzt man dies in die Superalgebra (2.13) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} &= \frac{1}{2}(\{Q^1_\alpha, Q^1_\beta\} + \{Q^2_\alpha, Q^2_\beta\} + i(\{Q^2_\alpha, Q^1_\beta\} - \{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\})) \\ &= -2 \begin{pmatrix} -P_0 + P_3 & P_1 \\ P_1 & -P_0 - P_3 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Da die rechte Seite reell ist, folgt also

$$\{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\} = \{Q^2_\alpha, Q^1_\beta\}. \tag{2.16}$$

Ferner hat man in der $D = 4$ Algebra $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\overline{Q}_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 0$, also

$$0 = \{Q^1_\alpha, Q^1_\beta\} - \{Q^2_\alpha, Q^2_\beta\} + i(\{Q^2_\alpha, Q^1_\beta\} + \{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\}), \tag{2.17}$$

also $\{Q^1_\alpha, Q^1_\beta\} = \{Q^2_\alpha, Q^2_\beta\}$ und $\{Q^1_\alpha, Q^2_\beta\} = -\{Q^2_\alpha, Q^1_\beta\} = 0$. Insgesamt erhält man damit die Superalgebra

$$\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = -2 \begin{pmatrix} -P_0 + P_3 & P_1 \\ P_1 & -P_0 - P_3 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \delta^{IJ} = -2P_{\alpha\beta}\delta^{IJ}, \tag{2.18}$$

was gerade die Superalgebra in $D = 3$ ist, wenn man beachtet, daß P_3 aus der dreidimensionalen Perspektive nichts anderes als P_2 ist.

2.1.3 Supermultipletts

Bevor wir die Darstellungen dieser Algebra untersuchen, werden wir zunächst ganz allgemein zeigen, daß die Multipletts dieser Superalgebra, die sogenannten Supermultipletts, immer eine gleiche Anzahl fermionischer und bosonischer Freiheitsgrade enthalten. Hierzu betrachte man den Fermionenzahloperator $F = (-1)^{N_F}$, der durch $(-1)^{N_F}|n_F\rangle = (-1)^{n_F}|n_F\rangle$ definiert ist, wenn $|n_F\rangle$ ein Zustand mit n_F Fermionen ist. Es folgt $F^2 = 1$. Ferner vernichten oder erzeugen geeignete Linearkombinationen der Q_α bzw. $\overline{Q}_\alpha$ Fermionen oder Bosonen wie aus (2.2) folgt. Hierzu ist folgendes zu bemerken: In $D = 4$ gilt für den Spinoperator $[S_3, Q^I_\alpha] = (\sigma^{12})_\alpha{}^\beta Q^I_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_3)_\alpha{}^\beta Q^I_\beta$ und damit die Relationen

$$[S_3, Q^I_1] = \frac{1}{2}Q^I_1,\ [S_3, Q^I_2] = -\frac{1}{2}Q^I_2 \tag{2.19}$$

und analog für $\overline{Q}$, womit man zeigt, daß die Q und $\overline{Q}$ je nach Komponente den Spin um $\frac{1}{2}$ erhöhen oder erniedrigen, d.h. Bosonen und Fermionen ineinander transformieren. Eine vergleichbar einfache Interpretation haben die Superladungen in $D = 3$ - zumindest in der hier gewählten Spinordarstellung - nicht. Es gilt nämlich

$$[M^{12}, Q_\alpha] = (\gamma^{12})_\alpha{}^\beta Q_\beta = -\frac{1}{2}(\sigma_2)_\alpha{}^\beta Q_\beta, \tag{2.20}$$

d.h.[4]

$$[S, Q_1] = \frac{i}{2}Q_2 \text{ und } [S, Q_2] = -\frac{i}{2}Q_1. \tag{2.21}$$

Daß sich hier σ_2 ergibt ist angesichts der dimensionalen Reduktion auch nicht überraschend. Da der vierdimensionale Raum in die 2-Richtung reduziert wird, entspricht die einzige Drehung in $D = 3$ aus einer vierdimensionalen Perspektive eine Drehung um die 2-Achse. Aus (2.21) folgt, daß $Q_1|j\rangle$ und $Q_2|j\rangle$ nicht notwendigerweise einen wohldefinierten Spin haben, wenn dies für $|j\rangle$ gilt. Wir suchen nun geeignete Linearkombinationen der Q_α, die eine solche Eigenschaft haben. Es stellt sich heraus, daß sich dies durch folgende Wahl erreichen läßt:[5]

$$\begin{aligned} R^I &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^I_1 - iQ^I_2) \\ (R^I)^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^I_1 + iQ^I_2). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Fordert man nämlich, daß $|j\rangle$ den Spin j hat, d.h. $S|j\rangle = j|j\rangle$, so folgt:

$$\begin{aligned} S(R^I)^\dagger|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}S(Q^I_1 + iQ^I_2)|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[S, Q^I_1 + iQ^I_2]|j\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^I_1 + iQ^I_2)S|j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}Q^I_2|j\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{i}{2})Q^I_1|j\rangle + j\frac{1}{\sqrt{2}}(Q^I_1 + iQ^I_2)|j\rangle \\ &= (j + \frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{2}}(Q^I_1 + iQ^I_2)|j\rangle = (j + \frac{1}{2})(R^I)^\dagger|j\rangle, \end{aligned} \tag{2.23}$$

[4] Es gibt nur einen Drehimpulsoperator in $D = 3$, so daß dieser keinen weiteren Index trägt. Dieser spielt die Rolle von S_3 in $D = 4$.

[5] Man beachte, daß diese nicht mit (2.14) identisch sind.

und ebenso

$$SR^I|j\rangle = S\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1^I - iQ_2^I)|j\rangle = (j-\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1^I - iQ_2^I)|j\rangle = (j-\frac{1}{2})R^I|j\rangle, \quad (2.24)$$

d.h. $(R^I)^\dagger$ erhöht den Spin um $\frac{1}{2}$ und R^I erniedrigt ihn um $\frac{1}{2}$. Es werden also Bosonen in Fermionen transformiert und umgekehrt. Für den oben definierten Fermionenzahloperator gilt damit $(R^I)^\dagger(-1)^{N_F}|j\rangle = (-1)^{N_F+1}(R^I)^\dagger|j\rangle$, also $\{(R^I)^\dagger, F\} = 0$ und entsprechend für R^I. Da nun

$$Q_1^I = \frac{1}{\sqrt{2}}((R^I)^\dagger + R^I) \text{ und } Q_2^I = \frac{1}{i\sqrt{2}}((R^I)^\dagger - R^I) \quad (2.25)$$

gilt, antivertauschen auch die Q_α mit dem Fermionenzahloperator. Für endlichdimensionale Darstellungen, in denen die Spur also wohldefiniert ist, gilt damit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[(-1)^{N_F}\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\}] &= \mathrm{Tr}[(-1)^{N_F}(Q_\alpha^I Q_\beta^J + Q_\beta^J Q_\alpha^I)] \\
&= \mathrm{Tr}[-Q_\alpha^I(-1)^{N_F}Q_\beta^J + (-1)^{N_F}Q_\beta^J Q_\alpha^I] \\
&= \mathrm{Tr}[-Q_\alpha^I(-1)^{N_F}Q_\beta^J] + \mathrm{Tr}[Q_\alpha^I(-1)^{N_F}Q_\beta^J] \\
&= 0.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Andererseits gilt nach Ausnutzung der Superalgebra

$$0 = \mathrm{Tr}[(-1)^{N_F}\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\}] = -2\delta^{IJ}\mathrm{Tr}[(-1)^{N_F}P_{\alpha\beta}]. \quad (2.27)$$

Für $P_{\alpha\beta} \neq 0$ folgt: $\mathrm{Tr}[(-1)^{N_F}] = 0$. Da $F = (-1)^{N_F}$ diagonalisiert von der Form $F = \mathrm{diag}(1, ..., 1, -1, ..., -1)$ sein muß, folgt, daß es gleich viele bosonische wie fermionische Zustände geben muß.

Außerdem haben alle Teilchen in einem Supermultiplett dieselbe Masse. Dies folgt einfach daraus, daß P^2 wegen (2.2) mit allen Elementen der Algebra vertauscht, d.h. weiterhin ein Casimiroperator ist.[6]

Man kann nun fragen, ob es nicht möglich ist, eine Spinordarstellung zu finden, in der $\gamma^{12} \sim \sigma_3$ gilt, so daß man die Eigenschaften der Q_α hinsichtlich der Transformationen von Fermionen in Bosonen leichter interpretieren kann, und, sollte dies möglich sein, man nicht eine solche Darstellung wählen sollte. Es ist nun in der Tat möglich eine solche zu konstruieren, d.h. die Gammamatrizen so zu wählen, daß die Spinordarstellung zu $SU(1,1)$ wird. Hierzu konstruieren wir den Isomorphismus zwischen $SL(2,\mathbb{R})$ und $SU(1,1)$ explizit. Für die durch

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \text{ und damit } S^{-1} = S^\dagger = S, \quad (2.28)$$

definierte unitäre Matrix gilt:

$$\begin{aligned}
S\sigma_2 S^\dagger &= S\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}S^\dagger \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3.
\end{aligned} \quad (2.29)$$

[6] Im Falle lokaler Supersymmetrie gilt dies nicht immer, was wir in Kap. 3 erörtern werden.

Nun sei $U \in SU(1,1)$, dann gilt also mit (2.10) und (2.11)

$$US \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} S^\dagger U^\dagger = S \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} S^\dagger, \tag{2.30}$$

und damit

$$S^\dagger US \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} S^\dagger U^\dagger S = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

d.h. $S^\dagger US \in SL(2,\mathbb{R})$. Der Isomorphismus ist also gegeben durch

$$SU(1,1) \ni U \longmapsto S^\dagger US =: M(U) \in SL(2,\mathbb{R}). \tag{2.32}$$

Diesen können wir ausnutzen, um eine wie oben charakterisierte Spinordarstellung anzugeben. Wählt man eine äquivalente Darstellung der Cliffordalgebra durch $\Gamma^\mu := S\gamma^\mu S^\dagger$, so wird wie gefordert

$$\Gamma^{12} = \frac{i}{4}[\Gamma^1, \Gamma^2] = \frac{i}{4} S[\gamma^1, \gamma^2]S^\dagger = -\frac{1}{2} S\sigma_2 S^\dagger = -\frac{1}{2}\sigma_3. \tag{2.33}$$

Explizit ergibt sich für die so definierten Gammamatrizen

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Man erhält also unangenehmerweise sowohl reelle wie auch imaginäre Matrizen. Das hat zur Folge, daß sich die Ladungskonjugationsmatrix zu $C = S\sigma_2 S^t = -\sigma_2$ (siehe Anhang A) ergibt, so daß die Majoranaspinoren von der Form

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) + i\psi_2(x) \\ \psi_2(x) + i\psi_1(x) \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

sind. Die dimensionale Reduktion ließe sich nun nicht mehr so einfach wie oben durchführen. Die Spinoren sind nun aber Objekte, die sich effektiv unter $SU(1,1)$ transformieren:

$$\exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}) = S\exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})S^\dagger \in SU(1,1). \tag{2.36}$$

Die vorangegangene Analyse hatte folgenden Zweck: Zur Konstruktion der Multipletts wie in [8] ist es hilfreich, eine Algebra fermionischer Erzeuger und Vernichter zu haben, um etwa die richtige Dimension der irreduziblen Darstellungen zu bestimmen. Um die Elemente der Multipletts als Vektoren, Spinoren usw. identifizieren zu können, müssen diese Erzeuger und Vernichter andererseits wohldefinierte Spineigenschaften haben, in dem Sinne, daß ihre Anwendung auf Objekte mit bestimmten Spin[7] auch wieder ebensolche liefert. Letztere Eigenschaft haben die Superladungen in der eben konstruierten Spinordarstellung, erstere jedoch nicht, einfach deswegen, weil keine der Gammamatrizen proportional zu $\delta_{\alpha\beta}$ sein kann. Es wird also notwendig sein, zu einer geeigneten Linearkombination der Q_α überzugehen, so daß die wohldefinierten Spineigenschaften wieder verloren gehen. Aus diesem Grunde wird es sich als vorteilhaft erweisen, mit der in Anhang A konstruierten Spinordarstellung zu arbeiten.

[7] Hierzu ist vorauszusetzen, daß der Spinbegriff sinnvoll ist, siehe Anhang A.

Masselose Supermultipletts für beliebiges N

Wir werden im folgenden die Darstellungen der Superalgebra im masselosen Fall, d.h. für $P^2 = 0$, untersuchen. Hierzu wählen wir ein Bezugssystem mit $P^\mu = (\omega, 0, \omega)$ bzw. $P_\mu = (\omega, 0, -\omega)$, so daß für die Superalgebra folgt:

$$\begin{aligned}\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} &= -2(\gamma^0 C - \gamma^2 C)_{\alpha\beta}\omega \\ &= -2\omega\delta^{IJ}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)_{\alpha\beta} \\ &= 4\omega\delta^{IJ}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Es folgt also $(Q^I_2)^2 = 0$, d.h Q^I_2 wird durch die Null dargestellt, so daß nur noch Q^I_1 verbleibt. Man erhält nun nach der Reskalierung $\Gamma^I := \frac{1}{\sqrt{2\omega}} Q^I_1$

$$\{\Gamma^I, \Gamma^J\} = 2\delta^{IJ}. \tag{2.38}$$

Dies ist zunächst einfach eine Cliffordalgebra bezüglich $SO(N)$. Beachtet man jedoch, daß es nach 1.1 noch einen Fermionenzahloperator F gibt, der mit allen Q, also auch mit den Γ^I vertauscht, und für den $F^2 = +\mathbf{1}$ gilt, so erhält man eine Cliffordalgebra bezüglich $SO(N+1)$, d.h. mit $N+1$ Gammamatrizen. In der Untersuchung der Darstellungen werden wir [9] folgen: Es läßt sich erreichen, daß F diagonal, d.h. notwendigerweise von der Form

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

ist. Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix in einem d_n-dimensionalen Raum, wobei d_n die Zahl der bosonischen und damit auch der fermionischen Freiheitsgrade ist. Die übrigen Γ^I sind dann ebenfalls in Blockmatrixform:

$$\Gamma^I = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^I_{AD} \\ \Gamma^I_{BC} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

damit sie mit F antikommutieren. Diese Untermatrizen müssen dann also folgende Algebra erfüllen:

$$\begin{aligned}\Gamma^I_{AD}\Gamma^J_{DE} + \Gamma^J_{AF}\Gamma^I_{FE} &= 2\delta^{IJ}\delta_{AE}, \\ \Gamma^I_{BC}\Gamma^J_{CF} + \Gamma^J_{BE}\Gamma^I_{EF} &= 2\delta^{IJ}\delta_{BF}.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Eine detaillierte Auflistung der irreduziblen, masselosen Supermultipletts und der Anzahl der bosonischen Zustände d_n findet sich in [9]. Dieser Quelle folgend werden wir nun explizite, reelle Matrixdarstellungen der Superladungen konstruieren.

Für $N = 1$ ist also eine Darstellung der Cliffordalgebra $C(2,0)$[8] gesucht. Diese ist 2-dimensional und etwa gegeben durch:

$$F(2) := \sigma_3, \Gamma^1(2) := \sigma_1. \tag{2.42}$$

[8] Hier und im Anhang bezeichnet $C(p,q)$ die Cliffordalgebra relativ zur quadratischen Form der Signatur (p,q).

Wegen $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ folgt sofort, daß die Algebra erfüllt ist. Es ist also $d_1 = 1$.

Für $N = 2$ ist eine Darstellung für $C(3,0)$ gesucht. Man erhält eine solche durch Tensorierung derjenigen von $N = 1$:

$$F(4) := \sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2), \Gamma^1(4) = \sigma_1 \otimes \Gamma^1(2), \Gamma^2(4) = \sigma_1 \otimes F(2). \tag{2.43}$$

Man erhält also $d_2 = 2$, und daß die Algebra erfüllt ist, rechnet man nun unmittelbar nach unter Verwendung der Relation $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = A \cdot C \otimes B \cdot D$ für das Tensor- bzw. Kroneckerprodukt. So gilt etwa:

$$\begin{aligned}
F(4)^2 &= \sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2) \cdot \sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2) = \sigma_3^2 \otimes \mathbf{1}(2) = \mathbf{1}(4), \\
\{F(4), \Gamma^1(4)\} &= (\sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2))(\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2)) + (\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2))(\sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2)) \\
&= \sigma_3\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2) + \sigma_1\sigma_3 \otimes \Gamma^1(2) = 0, \\
\{F(4), \Gamma^2(4)\} &= (\sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2))(\sigma_1 \otimes F(2)) + (\sigma_1 \otimes F(2))(\sigma_3 \otimes \mathbf{1}(2)) \\
&= \sigma_3\sigma_1 \otimes \mathbf{1}(2)F(2) + \sigma_1\sigma_3 \otimes F(2)\mathbf{1}(2) = 0, \\
\{\Gamma^1(4), \Gamma^1(4)\} &= 2(\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2))(\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2)) \\
&= 2\sigma_1^2 \otimes \Gamma^1(2)^2 = 2 \cdot \mathbf{1}(4), \\
\{\Gamma^1(4), \Gamma^2(4)\} &= (\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2))(\sigma_1 \otimes F(2)) + (\sigma_1 \otimes F(2))(\sigma_1 \otimes \Gamma^1(2)) \\
&= (\mathbf{1}(2) \otimes \{\Gamma^1(2), F(2)\}) = 0, \\
\Gamma^2(4)^2 &= (\sigma_1 \otimes F(2))(\sigma_1 \otimes F(2)) = \sigma_1^2 \otimes F(2)^2 = \mathbf{1}(4).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Elemente des Darstellungsraumes sind dann die Spaltenvektoren, wobei die oberen Komponenten bosonisch, die unteren fermionisch sind, wie man anhand der Eigenwerte von F sieht. Analog konstruiert man die Darstellungen für beliebiges N durch iteriertes Tensorieren der niederdimensionalen Darstellungen. (Siehe etwa: [10]) Insgesamt erhält man die in Tab. 2.1 angegebene Anzahl bosonischer und fermionischer Zustände für jedes N.

Tabelle 2.1: Masselose Multipletts

N	d_n
1	1
2	2
3	4
4	4
5	8
6	8
7	8
8	8
$n+8$	$16d_n$

Abschließend werden wir die Frage untersuchen, ob und wenn ja welchen Spin man den Elementen des Multipletts zuordnen kann. Hierzu verwenden wir die Relationen (2.21), speziell die Gleichung

$$[S, Q_1] = \frac{i}{2} Q_2. \tag{2.45}$$

Im Fall $N = 1$ sei etwa ein fermionischer Zustand gegeben durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dieser habe den Spin j, d.h $S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun gilt es den Spin von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu bestimmen: Hierzu benutzen wir, daß $Q_1 = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es folgt also:

$$\begin{aligned} S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} S Q_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [S, Q_1] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} Q_1 S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{i}{2} Q_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

wobei in der letzten Gleichung benutzt wurde, daß $Q_2 = 0$ gilt. Es hat also den Anschein, daß Fermionen und Bosonen denselben Spin haben! Wie jedoch im Anhang A ausgeführt, gibt es in $2 + 1$ Dimensionen im masselosen Fall keinen adäquaten Spinbegriff, so daß dieses Ergebnis nicht überraschend ist. Wie schon die Rechnung impliziert, hängt die Tatsache, daß eine der Superladungen verschwindet, direkt damit zusammen, daß es keinen Spin gibt [11].

Massive Supermultipletts

Im massiven Fall gilt $P^2 \neq 0$, wir können also in das Ruhesystem transformieren: $P^\mu = (m, 0, 0)$, also auch $P_\mu = (m, 0, 0)$, so daß für die Superalgebra folgt:

$$\begin{aligned} \{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} &= -2\delta^{IJ} (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu = -2m\delta^{IJ} (\gamma^0 C)_{\alpha\beta} \\ &= 2m\delta^{IJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Für $N = 1$ ergibt sich also:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2m\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.48}$$

Reskaliert man die Felder durch $\Gamma_\alpha := \frac{1}{\sqrt{m}} Q_\alpha$, so erhält man wieder eine Cliffordalgebra

$$\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.49}$$

Man kann nun die wohlbekannte Darstellungstheorie von Cliffordalgebren benutzen, um die Multipletts zu konstruieren. Diese Vorgehensweise hat jedoch den Nachteil, daß man den Spin der Elemente des Multipletts nicht so einfach bestimmen kann. Wir werden daher auf andere Weise vorgehen, die in gewissem Sinne der Standardmethode in [8] entspricht. Hierzu verwenden wir die in (2.22) definierten Operatoren R^I und $(R^I)^\dagger$ und bestimmen aus der Superalgebra die von diesen erfüllte Algebra:

$$\begin{aligned}\{R^I,(R^I)^\dagger\} &= \frac{1}{2}\{Q_1^I - iQ_2^I, Q_1^J + iQ_2^J\}\\ &= \frac{1}{2}(\{Q_1^I,Q_1^J\}+\{Q_2^I,Q_2^J\}) + \frac{i}{2}(\{Q_1^I,Q_2^J\}-\{Q_2^I,Q_1^J\})\\ &= (-P_{11}-P_{22}-iP_{12}+iP_{21})\delta^{IJ}\\ &= 2P_0\delta^{IJ}\end{aligned} \tag{2.50}$$

Dieselben Rechnungen ergeben für die Antikommutatoren von R^I und $(R^I)^\dagger$ mit sich selbst:

$$\begin{aligned}\{R^I,R^J\} &= -2(P_2 - iP_1)\delta^{IJ},\\ \{(R^I)^\dagger,(R^J)^\dagger\} &= -2(P_2 + iP_1)\delta^{IJ}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Es ergibt sich für diese Algebra im Ruhesystem

$$\{R^I,(R^J)^\dagger\} = 2m\delta^{IJ} \text{ und } \{R^I,R^J\} = \{(R^I)^\dagger,(R^J)^\dagger\} = 0. \tag{2.52}$$

Reskaliert man diese also durch $a^I := \frac{1}{\sqrt{2m}}R^I$ und $(a^I)^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2m}}(R^I)^\dagger$, so ergibt sich die bekannte Algebra fermionischer Erzeuger und Vernichter:

$$\{a^I,(a^J)^\dagger\} = \delta^{IJ},\ \{a^I,a^J\} = \{(a^I)^\dagger,(a^J)^\dagger\} = 0. \tag{2.53}$$

Diese Analogie ausnutzend kann man die Darstellungen konstruieren, indem man ein Cliffordvakuum Ω einführt, d.h. ein Element des Darstellungsraumes, das durch die Forderung $a^I\Omega = 0$ für alle $I = 1, ..., N$ definiert ist. Die anderen Elemente des Darstellungsraumes erhält man durch Anwendung der Erzeuger $(a^I)^\dagger$. Die Wirkung der Algebra ist dann vollständig durch die Antivertauschungsrelationen (2.53) definiert.

Für $N = 1$ erhält man die Algebra

$$\{a,a^\dagger\} = 1,\ \{a,a\} = \{a^\dagger,a^\dagger\} = 0, \tag{2.54}$$

d.h. die einzigen linear unabhängigen Zustände sind Ω und $a^\dagger\Omega$. Fordert man, daß Ω_j den Spin j hat und nutzt (2.23), so erhält man ein Multiplett mit den Spins $(j, j+\frac{1}{2})$. Zusammengefaßt findet man die möglichen Multipletts in Tab. 2.2.

Für $N = 2$ Supersymmetrie erhält man einen vierdimensionalen Darstellungsraum mit der Basis

$$\Omega,\ (a^1)^\dagger\Omega,\ (a^2)^\dagger\Omega \text{ und } (a^1)^\dagger(a^2)^\dagger\Omega = -(a^2)^\dagger(a^1)^\dagger\Omega. \tag{2.55}$$

Insgesamt ergibt sich für ein Vakuum mit Spin j also ein Multiplett mit Spins $(j, j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, j+1)$. Wie wir oben sahen, ist die $N = 2$ Superalgebra in $D = 3$

Tabelle 2.2: Massive $N = 1$ Multipletts

Spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$	Ω_1	$\Omega_{3/2}$
0	1			
$\frac{1}{2}$	1	1		
1		1	1	
$\frac{3}{2}$			1	1
2				1

Tabelle 2.3: Massive $N = 2$ Multipletts

Spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$	Ω_1
0	1		
$\frac{1}{2}$	2	1	
1	1	2	1
$\frac{3}{2}$		1	2
2			1

äquivalent zur einfachen Superalgebra in $D = 4$. Man müßte also dieselben Multipletts erhalten. Diese ergeben sich jedoch zu $(j, j + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, j + 1)$, so daß man etwa das Ω_0-Multiplett in $D = 3$ mit dem $\Omega_{\frac{1}{2}}$-Multiplett in $D = 4$ identifizieren muß. Die möglichen Multipletts findet man in Tab. 2.3.

Eine Bemerkung am Rande: Man mag sich darüber wundern, daß sich die Multipletts unterscheiden, wo doch die Algebra fermionischer Erzeuger und Vernichter in beiden Fällen dieselbe ist. Der Unterschied rührt jedoch daher, daß wegen

$$[S_3, Q^I_\alpha] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_1 \\ -Q_2 \end{pmatrix}_\alpha \tag{2.56}$$

in $D = 4$ sowohl Q als auch $\overline{Q}$ und damit auch a und $a^\dagger$ abhängig von der Komponente den Spin erhöhen aber auch erniedrigen können. Im dreidimensionalen Fall erhöhen die $a^\dagger$ jedoch immer den Spin, wie wir weiter oben sahen.

Es ist nun leicht zu sehen, welche Multiplett-Struktur sich für beliebig erweiterte Supersymmetrie ergibt. Bei N-facher Supersymmetrie erhält man einen 2^N-dimensionalen Darstellungsraum, dessen wie oben konstruierte Basiselemente Spins haben, die sich aus dem Pascalschen Dreieck ergeben. (Siehe Tab. 2.4) Zumindest in einem formalen Sinne sind die Multipletts im masselosen Fall in $D = 4$ für beliebiges N identisch mit den massiven in $D = 3$.

Tabelle 2.4: Struktur der massiven Multipletts für beliebiges N

				1					
			1		1				$N=1$
		1		2		1			$N=2$
	1		3		3		1		$N=3$
1		4		6		4		1	$N=4$
				$\vdots$					$\vdots$

2.2 Superraumkonstruktion und supersymmetrische Wirkungen

2.2.1 Superraumkonstruktion

Die nächste Aufgabe wird nun sein, supersymmetrische Feldtheorien explizit zu formulieren, d.h. Felder als die Komponenten eines Multipletts einzuführen und für diese supersymmetrische Wirkungen zu finden. Ein Problem hierbei ist, daß man noch kein wirklich geometrisches Verständnis für Supersymmetrie hat. Denkt man etwa zum Vergleich an die Einführung der speziell-relativistischen Kovarianz, so läßt sich diese geometrisch durch Einführung des Minkowskiraumes beschreiben, d.h. der durch diesen eingeführte Formalismus ermöglicht die Konstruktion manifest lorentzinvarianter Ausdrücke. Dasselbe erreicht man für die allgemein-kovariante Theorie der allgemeinen Relativitätstheorie durch Verwendung des Tensorkalküls oder in moderner, geometrischer Sichtweise: durch Einführung (Pseudo-)Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Es wäre wünschenswert, eine ähnlich geometrische Sichtweise von Supersymmetrie zu haben, die es einem etwa ermöglicht, manifest supersymmetrische Wirkungen zu finden. Ein Ansatz hierzu schien lange Zeit der unten einzuführende Superraumformalismus zu sein, der den flachen Minkowskiraum um fermionische Koordinaten bzw. die Raumzeit-Mannigfaltigkeit zu einer Supermannigfaltigkeit erweitert. Dieser bringt jedoch einige Probleme mit sich: So müssen zur Formulierung von Wirkungen geeignete Bedingungen ("Constraints") an die Felder auf dem Superraum gefunden werden, die für höherdimensionale Theorien oder für solche mit erweiterter Supersymmetrie unbekannt sind oder zumindest sehr unnatürlich erscheinen. Für den hier interessanten Fall existiert jedoch ein solcher Formalismus und wir werden diesen im folgenden erläutern. (Wir folgen dabei im wesentlichen [12].)

Ein Vorteil dieses Formalismus besteht darin, daß man explizite Darstellungen der Superladungen angeben kann, die auf den Feldern operieren. Dies erfolgt auf eine im Prinzip von konventionellen Feldtheorien wohlbekannte Weise, nämlich durch geeignete Differentialoperatoren, die dieselbe Algebra erfüllen: So führt man etwa für relativistisch kovariante Theorien die Differentialoperatoren $M^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$

ein, die eine Darstellung der Lorentzalgebra bilden oder die Operatoren $P_\mu = -i\partial_\mu$, die die Translationen erzeugen. Diese Darstellung von Lie-Algebren durch Differentialoperatoren ist aus differentialgeometrischer Sicht durchaus natürlich. Denn hier wird die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe z.B. als Tangentialraum an der Identität eingeführt, dessen Elemente man auf kanonische Weise als Differentialoperatoren auffassen kann. Die Lie-Klammer ist genau deswegen ein natürliches Objekt auf der Algebra, da der Kommutator zweier Vektorfelder, d.h. zweier linearer Differentialoperatoren, wieder ein solches ist. Will man nun die Superalgebra in ähnlicher Weise interpretieren, so ist zu bedenken, daß der Antikommutator zweier Vektorfelder i.a. kein Vektorfeld mehr ist, was einfach daran liegt, daß sich zweite partielle Ableitungen nicht mehr wie im Kommutator wegheben. Die Theorie der Lie-Gruppen läßt sich also nicht ohne weiteres anwenden. Die Idee zur Übertragung bekannter differentialgeometrischer Konzepte besteht darin, die Antikommutatoren formal als Kommutatoren aufzufassen, indem man sogenannte grassmannwertige Größen einführt. Dies sind antikommutierende Größen θ^α, wie sie etwa von der Pfadintegralquantisierung fermionischer Felder bekannt sind. Zusätzlich fordert man noch, daß diese mit den ungeraden Elementen der Superalgebra, also insbesondere mit den Superladungen, antikommutieren und mit den geraden Elementen kommutieren, so daß also insgesamt gilt:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\theta^\alpha, Q_\beta\} = ... = [P_{\alpha\beta}, \theta^\alpha] = 0. \tag{2.57}$$

Schreibt man nun vor die Superladungen grassmannwertige Koeffizienten, so wird der Antikommutator aufgrund dieser Eigenschaften zu einem Kommutator. Hieraus kann man analog eine Super-Lie-Gruppe definieren, indem man die Gruppenelemente durch abstrakte Exponentiation der Algebra erzeugt. Mit abstrakt ist folgendes gemeint: Die Gruppenelemente schreibt man als e^A, e^B, usw., so daß man die Gruppenstruktur durch die Hausdorff-Formel erklären kann:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{2.58}$$

Höhere Kommutatoren kommen aufgrund der Superalgebra nicht vor. Schreibt man ein Gruppenelement als $G(x,\theta) = \exp(i(x^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta} + \theta^\alpha Q_\alpha))$, so ist die Multiplikation der Gruppenelemente explizit gegeben durch:

$$\begin{aligned} G(0,\xi)G(x,\theta) &= e^{i\xi^\alpha Q_\alpha} e^{i(x^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}+\theta^\alpha Q_\alpha)} \\ &= e^{i(\xi^\alpha+\theta^\alpha)Q_\alpha + ix^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}[\xi^\alpha Q_\alpha, x^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}+\theta^\alpha Q_\alpha]}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Der einzig nichtverschwindende Term im Kommutator ist

$$\begin{aligned} [\xi^\alpha Q_\alpha, \theta^\beta Q_\beta] &= \xi^\alpha Q_\alpha \theta^\beta Q_\beta - \theta^\beta Q_\beta \xi^\alpha Q_\alpha \\ &= -\xi^\alpha Q_\alpha Q_\beta \theta^\beta - (-1)^4 \xi^\alpha Q_\beta Q_\alpha \theta^\beta = -\xi^\alpha \{Q_\alpha, Q_\beta\}\theta^\beta \\ &= 2\xi^\alpha P_{\alpha\beta}\theta^\beta. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Es folgt also

$$G(0,\xi)G(x,\theta) = \exp[i(x^{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\xi^{(\alpha}\theta^{\beta)})P_{\alpha\beta} + i(\xi^\alpha + \theta^\alpha)Q_\alpha], \tag{2.61}$$

wobei ausgenutzt wurde, daß $P_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und $\xi^{(\alpha}\theta^{\beta)} = \xi^\alpha\theta^\beta + \xi^\beta\theta^\alpha$ Symmetrisierung bezeichnet. Die Superladungen Q_α werden also Generatoren, die Koordinatentransformationen

$$x^{\alpha\beta} \longrightarrow x^{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\xi^{(\alpha}\theta^{\beta)} \tag{2.62}$$

erzeugen, die i.a. fermionische und bosonische Koordinaten ineinander transformieren. Entsprechend läßt sich die Superalgebra nun durch Differentialoperatoren mit Differentiationen nach grassmannwertigen Parametern darstellen:[9]

$$Q_\alpha = i\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\theta^\beta\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\beta}}\right) = i\left(\partial_\alpha - i\theta^\beta\partial_{\alpha\beta}\right), \tag{2.63}$$

wobei $\partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\beta}}$ unter Ausnutzung der Korrespondenz von Dreiervektoren mit symmetrischen Matrizen Ableitung nach gewöhnlichen Raumzeitkoordinaten bezeichnet und $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ eine Ableitung nach grassmannwertigen Größen. Diese ist durch die Forderung nach $\mathbb{R}$- Linearität und durch

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{2.64}$$

definiert. Zusätzlich ist zu beachten, daß der Differentialoperator immer auf den unmittelbar benachbarten Faktor wirkt, so daß beim ggf. nötigen Vertauschen die Antikommutativität zu berücksichtigen ist. Eine Produktregel gilt dann also in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^\beta\theta^\gamma) = \delta_\alpha^\beta\theta^\gamma - \delta_\alpha^\gamma\theta^\beta = \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha}\theta^\gamma - \theta^\beta\frac{\partial\theta^\gamma}{\partial\theta^\alpha}. \tag{2.65}$$

Der Operator (2.63) erfüllt dann die Superalgebra. Dies rechnet man wie folgt nach. Zunächst hat man

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -\{\partial_\alpha - i\theta^\delta\partial_{\delta\alpha}, \partial_\beta - i\theta^\gamma\partial_{\gamma\beta}\}\\ &= -\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} + i\{\partial_\alpha, \theta^\gamma\partial_{\gamma\beta}\} + i\{\theta^\delta\partial_{\delta\alpha}, \partial_\beta\} + \{\theta^\delta\partial_{\delta\alpha}, \theta^\gamma\partial_{\gamma\beta}\}.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Diese Terme lassen sich nun folgendermaßen vereinfachen. Es gilt $\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = 0$, denn

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha\partial_\beta(\theta^\gamma\theta^\delta) = \partial_\alpha(\delta_\beta^\gamma\theta^\delta - \delta_\beta^\delta\theta^\gamma) = \delta_\beta^\gamma\delta_\alpha^\delta - \delta_\beta^\delta\delta_\alpha^\gamma \text{ und andererseits}\\ &\partial_\beta\partial_\alpha(\theta^\gamma\theta^\delta) = \partial_\beta(\delta_\alpha^\gamma\theta^\delta - \delta_\alpha^\delta\theta^\gamma) = \delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta - \delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma,\\ &\quad \text{d.h. } \partial_\alpha\partial_\beta = -\partial_\beta\partial_\alpha.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Ferner ist

$$\{\partial_\alpha, \theta^\gamma\partial_{\gamma\beta}\} = (\partial_\alpha\theta^\gamma)\partial_{\gamma\beta} - \theta^\gamma\partial_\alpha\partial_{\gamma\beta} + \theta^\gamma\partial_{\gamma\beta}\partial_\alpha = \partial_{\alpha\beta}, \tag{2.68}$$

wobei die modifizierte Produktregel verwendet wurde. Ebenso hat man

$$\begin{aligned}\{\theta^\delta\partial_{\delta\alpha}, \partial_\beta\} &= \partial_{\beta\alpha} = \partial_{\alpha\beta} \text{ und}\\ \{\theta^\delta\partial_{\delta\alpha}, \theta^\gamma\partial_{\gamma\beta}\} &= \theta^\delta\theta^\gamma\partial_{\delta\alpha}\partial_{\gamma\beta} + \theta^\gamma\theta^\delta\partial_{\gamma\beta}\partial_{\delta\alpha} = 0.\end{aligned} \tag{2.69}$$

[9] Eine äquivalente Darstellung ist $Q_\alpha = i\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}\theta^\beta\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$.

Insgesamt gilt also $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i\partial_{\alpha\beta} = -2P_{\alpha\beta}$, wenn man wie oben $P_{\alpha\beta} := -i\partial_{\alpha\beta}$ setzt.

Die so definierten Differentialoperatoren werden also auf Funktionen wirken, die von grassmannwertigen Variablen abhängen. Diese Funktionen sind dann auf dem Superraum definiert, dessen Einführung noch zur Konstruktion manifest supersymmetrischer Wirkungen von Vorteil ist. Der Superraum wird nun über seine Koordinaten eingeführt, deren einer Anteil die gewöhnlichen Raumzeitkoordinaten $x^{\alpha\beta}$ sind (zunächst einfach für den Minkowskiraum) und deren zweiter Anteil grassmannwertige Spinorkoordinaten θ^α sind: $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha)$. Wir werden nun ein translationsinvariantes Integral einführen, für das also gilt: $\int d\gamma(\gamma+1) = \int d\gamma$, d.h. $\int d\gamma 1 = 0$. Wir wählen noch $\int d\gamma\gamma = 1$, damit Differentiation und Integration äquivalent sind. Es gilt nämlich wegen $\gamma^2 = 0$ für eine beliebige Funktion $f(\gamma) = f(0) + \gamma f'(0)$, also

$$\int d\gamma f(\gamma) = \int d\gamma f(0) + \int d\gamma\gamma f'(0) = f'(0), \tag{2.70}$$

also in Spinorkoordinaten: $\int d\theta_\alpha = \partial_\alpha$. In diesem Kalkül läßt sich eine explizite Darstellung der δ-Funktion angeben. Bezeichnet man die zwei Spinorkomponenten als $+, -$, so gilt:

$$\begin{aligned} \theta^2 := \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha = \frac{1}{2}(\theta^+\theta_+ + \theta^-\theta_-) &= \frac{1}{2}(\theta^+\theta^\alpha\iota_{\alpha+} + \theta^-\theta^\alpha\iota_{\alpha-}) \\ &= \frac{1}{2}(i\theta^+\theta^- - i\theta^-\theta^+) = i\theta^+\theta^-, \end{aligned} \tag{2.71}$$

d.h. $\int d^2\theta\theta^2 = \int d\theta_+ \int d\theta_- i\theta^+\theta^- = -i$. Setzt man nun $\delta^2(\theta) := i\theta^2$, so erhält man eine Darstellung der δ-Funktion. Zusätzlich kann man noch eine supersymmetrisch kovariante Ableitung einführen, die eine ähnliche Rolle spielt wie die kovariante Ableitung etwa in Yang-Mills-Theorien. Diese ist im Superraumformalismus gegeben durch

$$D_M = (D_{\alpha\beta}, D_\alpha) := (\partial_{\alpha\beta}, \partial_\alpha + i\theta^\gamma\partial_{\alpha\gamma}).^{10} \tag{2.72}$$

Die Bezeichnung kovariante Ableitung rührt daher, daß D_α auch die Superalgebra erfüllt und andererseits mit den Superladungen Q_α antikommutiert. Dies hat zur Folge, daß gewisse Zwangsbedingungen, etwa von der Form $D_\alpha\phi = 0$ eine SUSY-kovariante Bedeutung haben: $D_\alpha Q_\beta\phi = -Q_\beta D_\alpha\phi = 0$.

2.2.2 Superfelder und Wirkungen

Ein Superfeld ist definiert als eine Funktion auf dem Superraum. Wie bereits erläutert, kann man diese bezüglich der grassmannwertigen Variablen in eine abbrechende Reihe entwickeln. Man erhält also

$$\phi(x,\theta) = A(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x). \tag{2.73}$$

[10] Man beachte das im Unterschied zur Darstellung der Superladungen veränderte Vorzeichen.

Die Koeffizientenfunktionen A, ψ und F werden dann die Elemente eines Multipletts. Die Supersymmetrietransformationen ergeben sich durch Anwendung der korrespondierenden Differentialoperatoren iQ_α:

$$\begin{aligned}\delta\phi(x,\theta) &= -\epsilon^\alpha(\partial_\alpha - i\theta^\beta\partial_{\alpha\beta})\phi(x,\theta) \\ &=: \delta A + \theta^\alpha\delta\psi_\alpha - \theta^2\delta F,\end{aligned} \tag{2.74}$$

und Vergleich entsprechender Potenzen von θ. Durch explizites Ausrechnen bestimmt man das Transformationsverhalten der Felder unter Supersymmetrietransformationen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\delta\phi(x,\theta) &= -\epsilon^\alpha(\partial_\alpha - i\theta^\beta\partial_{\alpha\beta})(A(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x)) \\ &= -\epsilon^\alpha\psi_\alpha(x) + \epsilon^\alpha\theta_\alpha F(x) + i\epsilon^\alpha\theta^\beta\partial_{\alpha\beta}A(x) + i\epsilon^\gamma\theta^\alpha\theta^\beta\partial_{\gamma\alpha}\psi_\beta(x).\end{aligned} \tag{2.75}$$

Die Transformation der Felder ließt man unmittelbar ab:

$$\begin{aligned}\delta A &= -\epsilon^\alpha\psi_\alpha(x) \\ \delta\psi_\alpha &= -\epsilon^\beta(i\partial_{\alpha\beta}A(x) + \iota_{\alpha\beta}F(x)) \\ \delta F &= -i\epsilon^\alpha\partial_\alpha^{\ \beta}\psi_\beta(x).\end{aligned} \tag{2.76}$$

Man verifiziert leicht, daß die so gefundene Darstellung der Superalgebra abgeschlossen ist, d.h., daß der Kommutator zweier δ, angewandt auf eines der Felder des Multipletts, den Impulsoperator, angewandt auf dasselbe Feld liefert.

Wir kommen nun zur Konstruktion supersymmetrischer Wirkungen. Hierzu sei bemerkt, daß den Supersymmetrietransformationen Koordinatentransformationen auf dem Superraum entsprechen. Da man Raumzeitableitungen wegen des Satzes von Stokes und θ-Ableitungen wegen $\int d^3xd^2\theta\partial_\alpha f^\alpha = \int d^3x\partial_\beta\partial^\beta\partial_\alpha f^\alpha = 0$ ignorieren kann, folgt, daß jedes Superraumintegral

$$S = \int d^3xd^2\theta f(\phi, D_\alpha\phi, ...), \tag{2.77}$$

das nicht explizit von den Koordinaten abhängt, invariant unter der vollen Algebra ist. Entwickelt man das Superfeld $f(x,\theta)$ in eine Reihe der θ und führt die θ-Integration aus, so ergibt sich die Wirkung als gewöhnliches Raum-Zeit-Integral, während man die Komponentenfelder durch Projektion erhält:

$$A(x) = \phi(x,\theta)\mid_{\theta=0}, \psi_\alpha(x) = D_\alpha\phi(x,\theta)\mid_{\theta=0}, F(x) = D^2\phi(x,\theta)\mid_{\theta=0}, \tag{2.78}$$

denn es gilt etwa

$$\begin{aligned}D_\alpha\phi(x,\theta)\mid_{\theta=0} &= (\partial_\alpha + i\theta^\beta\partial_{\alpha\beta})\phi(x,\theta)\mid_{\theta=0} \\ &= \psi_\alpha(x) - \frac{1}{2}\partial_\alpha(\theta^\beta\theta_\beta)F(x) + i\theta^\beta\partial_{\alpha\beta}\phi(x,\theta)\mid_{\theta=0} = \psi_\alpha(x).\end{aligned} \tag{2.79}$$

In den nächsten Abschnitten werden wir die einfachsten Fälle supersymmetrischer Wirkungen mit diesen Methoden konstruieren. Es ist zu beachten, daß diese Vorgehensweise ohne Weiteres nur Wirkungen für einfache Supersymmetrie ($N = 1$) liefern kann, da die Q_α nur für diese Algebra eine Darstellung bilden. Zur Frage, ob ein Superraumformalismus auch zur Konstruktion erweiterter Supersymmetrie geeignet ist, kehren wir später zurück.

2.2.3 Das skalare Multiplett für $N = 1$

Wir werden nun eine supersymmetrische Feldtheorie für das skalare bzw. das chirale Multiplett konstruieren. Dieses soll ein reelles Skalarfeld A enthalten, d.h. einen bosonischen Freiheitsgrad, so daß dessen supersymmetrischer Partner auch genau einen fermionischen Freiheitsgrad hat, d.h. durch einen Majoranaspinor ψ_α beschrieben wird. Das chirale Multiplett ist dann von der Form (A, ψ_α). Das Superfeld (2.73) kann zunächst beliebige komplexe Werte annehmen, d.h. die Komponentenfunktionen werden ebenso komplexwertig. Es müssen also wie oben angedeutet gewisse Bedingungen an das Superfeld gestellt werden, damit die Zahl der Freiheitsgrade nicht zu hoch ist. Andernfalls würden die Superladungen nicht irreduzibel auf den Superfeldern operieren. Im Fall des chiralen Multipletts fordert man einfach, daß das Superfeld reell ist, so daß die Komponentenfelder automatisch die richtige Zahl an Freiheitsgraden haben. (Zum Vergleich: In $D = 4$ fordert man $\overline{D}_{\dot\alpha}\phi = 0$, wobei $\overline{D}_{\dot\alpha}$ die SUSY-kovariante Ableitung bezeichnet.) In Analogie zur kinetischen Lagrangedichte skalarer Quantenfeldtheorien kann man die folgende Wirkung für das skalare Multiplett ansetzen [12]:

$$S_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}\int d^3x d^2\theta (D_\alpha\phi)^2. \tag{2.80}$$

Durch partielle Integration erhält man die Komponentendarstellung:

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}\int d^3x d^2\theta \phi D^2\phi = \frac{1}{2}\int d^3x \partial^2(\phi D^2\phi) \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x D^2[\phi D^2\phi] \mid_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x (D^2\phi D^2\phi + D^\alpha\phi D_\alpha D^2\phi + \phi(D^2)^2\phi)) \mid_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x (F^2 + i\psi^\alpha \partial_\alpha{}^\beta \psi_\beta + A\Box A), \end{aligned} \tag{2.81}$$

wobei in der letzten Zeile (2.78) ausgenutzt wurde. Der F-Term ist offenbar nicht propagierend, da die Bewegungsgleichung $F = 0$ ist, so daß das Multiplett tatsächlich von der Form (A, ψ_α) ist. Zusätzlich können zur Wirkung geeignete Wechselwirkungsterme addiert werden: $S_I = \int d^3x d^2\theta f(\phi)$ mit der Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} S_I &= \int d^3x D^2 f(\phi) \mid_{\theta=0} = \int d^3x (f''(\phi)(D_\alpha\phi)^2 + f'(\phi)D^2\phi) \mid_{\theta=0} \\ &= \int d^3x [f''(A)\psi^2 + f'(A)F]. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Diese Wechselwirkung kann z.B. einen Massenterm[11] oder einen ϕ^3- Wechselwirkungsterm enthalten: $f(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^3 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3$. Höhere Terme werden von der Forde-

[11] Die massiven chiralen $N = 1$ Multipletts haben Spins $(0, \frac{1}{2})$, d.h. die Zahl der Freiheitsgrade ist auch im massiven Fall dieselbe.

rung nach Renormierbarkeit ausgeschlossen [12].[12] Die gesamte Wirkung ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} S &= \int d^3x d^2\theta (-\frac{1}{2}(D_\alpha \phi)^2 + \frac{1}{2} m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3) \\ &= \int d^3x (\frac{1}{2}(A\Box A + i\psi^\alpha \partial_\alpha{}^\beta \psi_\beta + F^2) + m(\psi^2 + AF) + \lambda(A\psi^2 + \frac{1}{2}A^2 F)). \end{aligned} \tag{2.83}$$

2.2.4 Das Vektormultiplett für $N = 1$

Aufgrund der im Anhang A erläuterten Dualität zwischen Eichvektorfeldern und Skalarfeldern in $D = 3$ kann ein Vektormultiplett immer in ein skalares Multiplett, für welches wir schon Wirkungen konstruiert haben, dualisiert werden. Trotzdem werden wir hier direkt Wirkungen für das Vektormultiplett (A_μ, λ^α) selbst angeben, und dabei die wesentlichen Ergebnisse aus [12] zur Konstruktion supersymmetrischer Wirkungen mittels des Superraumformalismus zusammenfassen.

Obwohl die Zahl der Freiheitsgrade dieselbe sein muß wie für das chirale Multiplett, werden wir hier ein komplexes Superfeld zugrundelegen, da die Eichinvarianz die zusätzlichen Komponenten des Superfeldes eliminieren wird. Dieses Superfeld transformiert sich unter einer konstanten Phasentransformation gemäß

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = e^{iK}\phi, \\ \overline{\phi} &\longrightarrow \overline{\phi}' = e^{-iK}\overline{\phi}, \end{aligned} \tag{2.84}$$

wobei $K = \text{const}$. Die freie Lagrangedichte $|D\phi|^2$ ist offenbar invariant unter dieser Transformation. Möchte man dies zu einer lokalen Invarianz, d.h zu Eichinvarianz, erweitern, so ist es wie üblich notwendig, ein Eichfeld Γ_α einzuführen, um die Spinorableitung zu einer kovarianten zu machen:

$$D_\alpha \longrightarrow \nabla_\alpha = D_\alpha \mp i\Gamma_\alpha. \tag{2.85}$$

Fordert man noch, daß sich das Eichpotential gemäß $\delta\Gamma_\alpha = D_\alpha K$ transformiert, wobei K nun ein reelles Superfeld ist, so sind alle beteiligten Ausdrücke kovariant, außerdem gilt $\nabla'_\alpha = e^{iK}\nabla_\alpha e^{-iK}$. Damit ist dann $|\nabla\phi|^2$ eichinvariant. Im raumzeitlichen Anteil taucht wie in konventioneller Eichtheorie ebenfalls ein Eichzusammenhang in vektorieller Form $\Gamma_{\alpha\beta}$ auf:

$$\partial_{\alpha\beta} \longrightarrow \nabla_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} - i\Gamma_{\alpha\beta}, \tag{2.86}$$

wobei $\delta\Gamma_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}K$ und ebenso $\nabla'_{\alpha\beta} = e^{iK}\nabla_{\alpha\beta}e^{-iK}$. Γ_α und $\Gamma_{\alpha\beta}$ können nun als Komponenten einer Super-1-Form $\Gamma_A = (\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha\beta})$ aufgefaßt werden. Das Super-

[12] Daraus, daß $\int d^3x f(\phi)$ dimensionslos sein muß, folgt, daß f Massendimension 3 haben muß: $[f] = 3$. Also ist auch $[m\phi^2] = 3$, d.h. $[\phi] = 1$. Daraus folgt $[\lambda\phi^3] = 3$, also $[\lambda] = 0$, d.h. die Kopplungskonstante ist dimensionslos, während für Theorien höherer Ordnung die Kopplungskonstante eine negative Massendimension hätte.

Eichfeld $\Gamma = \Gamma(x, \theta)$ ist so wie oben ein Feld auf dem Superraum, und die Komponenten enthält man ebenso durch Projektion:

$$\begin{aligned} &\chi_\alpha = \Gamma_\alpha \mid_{\theta=0} , \; B = \frac{1}{2} D^\alpha \Gamma_\alpha \mid_{\theta=0} , \; V_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)} \mid_{\theta=0} \\ &\lambda_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta \mid_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{2.87}$$

während man durch Projektion der vektoriellen 1-Form erhält:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta} \mid_{\theta=0} , \; \rho_\beta = D^\alpha \Gamma_{\alpha\beta} \mid_{\theta=0}, \\ \psi_{\alpha\beta\gamma} &= D_{(\alpha}\Gamma_{\beta\gamma)} \mid_{\theta=0} \text{ und } T_{\alpha\beta} = D^2 \Gamma_{\alpha\beta} \mid_{\theta=0} . \end{aligned} \tag{2.88}$$

Es ist zu bemerken, daß die Komponentenfelder χ und B aufgrund der Eichinvarianz (2.84) wegtransformiert werden können. Dies ist die sogenannte Wess-Zumino-Eichung.

Es ist zweckmäßig, anstatt des Superfeldes Γ_β die folgende Ableitung zu betrachten: (Für weitere Details siehe [12])

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta. \tag{2.89}$$

Man kann nun folgende Wirkung konstruieren:

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^3x d^2\theta W^2 = \frac{1}{g^2} \int d^3x d^2\theta (\frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta)^2. \tag{2.90}$$

Diese kann man wie in (2.78) in Komponentenfelder darstellen.

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{g^2} \int d^3x D^2 W^2 &= \frac{1}{g^2} \int d^3x [W^\alpha D^2 W_\alpha - \frac{1}{2}(D^\alpha W^\beta)(D_\alpha W_\beta)] \mid_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{g^2} \int d^3x [\lambda^\alpha i \partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta - \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}], \end{aligned} \tag{2.91}$$

wobei $f_{\alpha\beta} = D_\alpha W_\beta \mid_{\theta=0}$ die Feldstärke bezeichnet.

Von vergleichbarer Bedeutung neben der eben konstruierten supersymmetrischen Yang-Mills-Wirkung ist in $D = 3$ die Chern-Simons-Wirkung. (Zur Definition siehe 3.2.) Für den abelschen Fall ergibt sich die supersymmetrische Erweiterung aus den oben definierten Superfeldern Γ^α und W_α gemäß [12]

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^3x d^2\theta \Gamma^\alpha W_\alpha. \tag{2.92}$$

Die Komponentendarstellung enthält dann nämlich die Kombination

$$\int d^3x V^{\alpha\beta} \partial_{\gamma\alpha} V_\beta{}^\gamma, \tag{2.93}$$

die gerade die Koordinatendarstellung der abelschen Chern-Simons-Form (3.9) ist.

2.2.5 Supersymmetrische Wirkungen für $N = 2$

Wie wir weiter oben festgestellt haben, ist die Superraumkonstruktion problematisch bei der Formulierung supersymmetrischer Feldtheorien mit mehr als einer Superladung ($N > 1$), da es dann i.d. Regel nicht mehr klar ist, wie die Bedingungen an die Superfelder auszusehen haben. Im Falle $D = 3$, $N = 2$ könnten wir aber die Äquivalenz zur $N = 1$ Supersymmetrie in $D = 4$ ausnutzen. Man kann einen zweiten Satz fermionischer Koordinaten θ^α einführen und diesen dann zweckmäßigerweise mit den anderen Grassmannvariablen zu komplexen Spinoren zusammenfassen. Der Superraum wird dann durch Koordinaten $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}^{\dot{\alpha}})$ beschrieben, wobei die θ^α und die $\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}$ nun einem vierdimensionalen Sinne Weylspinoren sind. (Diese Konstruktion ist gewissermaßen die Umkehrung derjenigen im vorigen Abschnitt, wo die Weylspinoren in $D = 3$-Majoranaspinoren zerlegt wurden.) Der Superraum ist dann vollkommen identisch zum $N = 1$ Superraum in $D = 4$ und man könnte die Bedingungen an die Superfelder ($\overline{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0$ für das chirale Multiplett und $V^\dagger = V$ für das Vektormultiplett) direkt übernehmen. Da also klar ist, daß man hierdurch genau dieselben Wirkungen erhalten würde wie in $D = 4$, kann man stattdessen die dreidimensionalen Analoga direkt durch dimensionale Reduktion konstruieren. Wir werden uns dabei von folgender Grundidee leiten lassen: In der hier gewählten Spinordarstellung kann man die 2-Richtung auf lorentzinvariante Weise als identisch Null annehmen und die in $D = 4$ lebenden Objekte der Weylspinoren auf ebenso lorentzinvariante Weise in Real- und Imaginärteil zerlegen. Besteht nun eine supersymmetrische Feldtheorie in $D = 4$ etwa aus einem komplexen Skalarfeld und einem Weylspinor, so kann man diese Theorie wie folgt auf $D = 3$ dimensional reduzieren. Fordert man, daß sich alle Objekte nur unter (Darstellungen) der Untergruppe $SL(2, \mathbb{R})$ transformieren und daß alle Funktionen unabhängig von x^2 sind, so liefert ein Weylfermion zwei reelle Diracfermionen in $D = 3$ und ein komplexes Skalarfeld zwei reelle Skalarfelder. Reduziert man einen Vektor, so ergeben sich ein Vektor und ein weiterer Skalar. Dieser neue Skalar entsteht aus der 2-Komponente des ursprünglichen Vektorfeldes in $D = 4$. Ebenso lassen sich die Supersymmetrietransformationen auf dem Niveau der Felder bestimmen. Es ist dann unmittelbar klar, daß die resultierende Feldtheorie supersymmetrisch ist. Dieses Verfahren werden wir nun auf das skalare Multiplett in $D = 4$ anwenden: Die freie Wirkung ist

$$S = \int d^4x (i\partial_n \overline{\psi}\overline{\sigma}^n \psi + A^* \Box A + F^* F), \tag{2.94}$$

wobei die Supersymmetrietransformationen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi \\ \delta_\xi \psi &= i\sqrt{2}\sigma^m \overline{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^m \partial_m \psi. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Hierbei bezeichnen lateinische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets m, n, ... $= 0, 1, 2, 3$ Vektorindizes in $D = 4$. Im folgenden kennzeichnen griechische Buchstaben μ, ν, ... $= 0, 1, 3$ die dimensional reduzierten Vektorindizes in $D = 3$. Da

ψ ein komplexer Weylspinor ist, werden wir ihn in $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ zerlegen, ebenso den Parameter ξ, den man formal als konstanten Weylspinor auffassen kann. Um die zweifache Supersymmetrie in $D = 3$ manifest zu machen, werden wir in den SUSY-Transformationen auch die komplexen Skalarfelder in Real- und Imaginärteil zerlegen. Man erhält für den kinetischen Term des fermionischen Feldes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\partial_\mu(\psi_1 - i\psi_2)\overline{\sigma}^\mu(\psi_1 + i\psi_2)\\ &= (\partial_\mu\psi_2)\overline{\sigma}^\mu\psi_1 - (\partial_\mu\psi_1)\overline{\sigma}^\mu\psi_2 + i\sum_{i=1}^{2}(\partial_\mu\psi_i)(\overline{\sigma}^\mu)\psi_i,\end{aligned} \tag{2.96}$$

während für die Transformationen mit $\xi =: \eta + i\zeta$ folgt:

$$\begin{aligned}\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi = \sqrt{2}(\eta + i\zeta)(\psi_1 + i\psi_2)\\ &= \sqrt{2}(\eta\psi_1 - \zeta\psi_2) + i\sqrt{2}(\eta\psi_2 + \zeta\psi_1).\end{aligned} \tag{2.97}$$

Dies ist äquivalent zu zwei Supersymmetrietransformationen mit reellen Parametern, die auf zwei reelle Skalarfelder wirken, denn die Invarianz muß für beliebige ξ gelten, insbesondere für reelle oder rein-imaginäre. Man erhält

$$\begin{aligned}\delta_\eta A_1 &= \sqrt{2}\eta\psi_1,\ \delta_\zeta A_1 = -\sqrt{2}\zeta\psi_2\\ \delta_\eta A_2 &= \sqrt{2}\eta\psi_2,\ \delta_\zeta A_2 = \sqrt{2}\zeta\psi_2.\end{aligned} \tag{2.98}$$

Auf dieselbe Weise erhält man die weiteren SUSY-Transformationen:

$$\begin{aligned}\delta_\eta\psi_1 &= -\sqrt{2}(\eta\sigma^\mu\partial_\mu A_2 - \eta F_1),\ \delta_\zeta\psi_1 = \sqrt{2}(\zeta\sigma^\mu\partial_\mu A_1 - \zeta F_2)\\ \delta_\eta\psi_2 &= \sqrt{2}(\eta\sigma^\mu\partial_\mu A_1 + \eta F_2),\ \delta_\zeta\psi_2 = -\sqrt{2}(\zeta\sigma^\mu\partial_\mu A_2 - \zeta F_1),\end{aligned} \tag{2.99}$$

und ebenso für das Hilfsfeld $F = F_1 + iF_2$

$$\begin{aligned}\delta_\zeta F_1 &= \sqrt{2}\zeta\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_1,\ \delta_\eta F_2 = \sqrt{2}\eta\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_1,\\ \delta_\eta F_1 &= -\sqrt{2}\eta\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_2,\ \delta_\zeta F_2 = \sqrt{2}\zeta\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_2.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Die Wirkung, die unter all diesen Supersymmetrietransformationen invariant ist, ist nach obigem gegeben durch

$$\begin{aligned}S = \int d^3x((\partial_\mu\psi_2)\overline{\sigma}^\mu\psi_1 &- (\partial_\mu\psi_1)\overline{\sigma}^\mu\psi_2\\ &+ i\sum_{i=1}^{2}(\partial_\mu\psi_i)(\overline{\sigma}^\mu)\psi_i + A^*\Box A + F^*F),\end{aligned} \tag{2.101}$$

wobei man sich die kinetischen Terme für A und F auch in Real- und Imaginärteil zerlegt denken kann. Es folgt nun unmittelbar aus der Supersymmetrie der skalaren Wirkung in $D = 4$, daß auch diese invariant ist unter den hier angegebenen Transformationen. Ebenso ist klar, daß die angegebenen Transformationen eine Darstellung der Superalgebra bilden, d.h. insbesondere, daß die Kommutatoren abgeschlossen sind.

Auf vollkommen analoge Weise kann man so beliebige supersymmetrische Wirkungen in $D = 4$ dimensional reduzieren, um so $N = 2$ Wirkungen in $D = 3$ zu erhalten. Für eine supersymmetrische Eichtheorie in $3 + 1$ Dimensionen findet man dies etwa in [13] explizit durchgeführt.

Eine global supersymmetrische $N = 2$ Erweiterung der Chern-Simons-Wirkung kann man jedoch nicht durch dimensionale Reduktion konstruieren, denn die Chern-Simons-Theorie ist so nur in $D = 3$ definiert. Solche Erweiterungen findet man für $N = 2$ und $N = 4$ in [14]. Diese sind etwas länglich, und da wir die Supersymmetrisierung später nicht mehr benötigen[13], werden wir sie hier nicht wiedergeben.

[13]Man beachte, daß aufgrund des Umstandes, daß ein Chern-Simons-Feld nicht-propagierend ist (Abschnitt 3.2), eine solches ohne supersymmetrische Erweiterung zu einer ansonsten supersymmetrischen Theorie hinzugefügt werden kann, ohne die Supersymmetrie zu verletzen, sofern sich die propagierenden Felder nicht in das Chern-Simons-Feld transformieren.

Kapitel 3

Supergravitation in $D = 3$

3.1 Reine Gravitation und Supergravitation

Der Unterschied zwischen klassischer Gravitation, d.h. allgemeiner Relativitätstheorie, in vier und drei Dimensionen ist auffälliger als man zunächst vermuten würde. Dies hängt damit zusammen, daß das Gravitationsfeld in $D = 3$ keine physikalischen, d.h. propagierenden Freiheitsgrade hat und damit eine rein topologische Theorie ist. Freie Lösungen der Einstein-Feldgleichungen können also nicht so etwas wie Gravitationswellen beschreiben. Der Riemannsche Krümmungstensor ist in $D = 3$ nämlich äquivalent zum Ricci-Tensor, denn es gilt die Relation

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \tag{3.1}$$

Aus der Einstein-Gleichung bei verschwindender kosmologischer Konstante in der Form

$$R_{\mu\nu} = \kappa[T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma}] \tag{3.2}$$

folgt für den Vakuum-Fall $T_{\mu\nu} = 0$ also das identische Verschwinden des Riemann-Tensors. Die Raumzeit ist bei Abwesenheit von Materie also lokal flach, kann also insbesondere keine ebene Welle darstellen [15]. Um eine dynamisch nichttriviale Theorie zu erhalten, kann man Materie an die Theorie koppeln, d.h. einen nichtverschwindenden Energie-Impuls-Tensor wählen. So sind die Lösungen der Feldgleichungen bei Anwesenheit von Punktmassen ebenfalls lokal flach, beinhalten aber eine konische Singularität am Ort der Punktmasse [16]. Dies bedeutet, daß die Raumzeit einen flachen Kegel darstellt. Will man den raumartigen Anteil als den $\mathbb{R}^2$ auffassen, so sind aus diesem also ein bestimmter Winkel zu entfernen und die Punkte entlang der verbleibenden Kanten miteinander zu identifizieren. Dieses Phänomen ist für Supergravitation in $D = 3$ von gewissem Interesse, und wir werden daher im nächsten Abschnitt kurz hierauf zurückkommen.

Eine andere Möglichkeit, eine nichtflache Metrik zu erhalten, besteht darin, eine nichtverschwindende kosmologische Konstante Λ zu wählen. Die Raumzeit wird dann im Vakuum-Fall bzw. im Grundzustand maximal symmetrisch sein und eine konstante Krümmung haben. (Trotzdem ist das Gravitationsfeld nach wie vor nicht-propagierend.) Die Einstein-Gleichung lautet

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{3.3}$$

Eine Lösung ist also gegeben durch die Metrik, die

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} \text{ und damit } R = 6\Lambda \tag{3.4}$$

erfüllt. Mit (3.1) folgt damit schon der Riemannsche Krümmungstensor:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma}). \tag{3.5}$$

Ist $\Lambda = 0$, so gewinnen wir den Minkowski-Grundzustand zurück, ist $\Lambda < 0$, so haben wir einen Anti-deSitter-Grundzustand und für $\Lambda > 0$ einen deSitter-Grundzustand. Die Anti-deSitter-Raumzeit ist gegeben durch $S^1 \times \mathbb{R}^2$ und hat die Isometriegruppe $SO(2,2)$, während die deSitter-Raumzeit $\mathbb{R} \times S^2$ ist und die Isometriegruppe $SO(1,3)$ hat.

Wir behandeln nun reine Supergravitation, die auf einer sehr einfachen Grundidee basiert: Wie für jede Symmetrie in der Physik liegt es auch bei Supersymmetrie nahe, zu fragen, ob man diese eichen kann, d.h., ob diese auch in einer lokalen Version realisierbar ist, in der die (hier spinoriellen) Transformationsparameter beliebig von der Raumzeit abhängen. Da die Superalgebra (2.2) aber als Unteralgebra die Lie-Algebra der Poincaregruppe enthält, muß diese notwendigerweise auch geeicht sein. Die allgemeine Relativitätstheorie wird aber für gewöhnlich als Eichtheorie eben dieser Poincaregruppe interpretiert, da die Generatoren P_μ in (2.2) in einer lokalen Transformation die Diffeomorphismen erzeugen. Eine Eichtheorie der Superalgebra muß also notwendigerweise die allgemeine Relativitätstheorie enthalten. In $D = 4$ enthält im lokalen Fall also mindestens ein Supermultiplett ein Spin-2-Feld, welches das Gravitationsfeld mit zwei bosonischen Freiheitsgraden darstellt. Hier sind die masselosen $N = 1$ Multipletts von der Form $(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{2})$, wobei λ_0 die Helizität bezeichnet. Die Multipletts $(\frac{3}{2}, 2)$ und $(-2, -\frac{3}{2})$ bilden also zusammen das Gravitonmultiplett, d.h. bei einfacher Supersymmetrie hat das Gravitationsfeld einen Spin-$\frac{3}{2}$-Partner mit zwei fermionischen Freiheitsgraden. Dieses sogenannte Rarita-Schwinger- oder Gravitino-Feld trägt als Spin-$\frac{3}{2}$-Feld drei Spinorindizes[1] bzw. einen Vektorindex und einen Spinorindex ("Vektor-Spinor"), der für gewöhnlich unterdrückt wird. In drei Dimensionen stellt sich die Situation etwas anders dar: Das Gravitationsfeld selbst hat keine Freiheitsgrade, sein fermionischer Partner also ebensowenig. Die Konstruktion der Multipletts in Kap. 2 hilft uns also nicht bei der Bestimmung des fermionischen Partners, schlicht deswegen nicht, da die Multipletts sich nur auf propagierende Freiheitsgrade beziehen. Man kann aber die

[1] Siehe Anfang Abschnitt A.3.

Analogie zum vierdimensionalen Fall ausnutzen, um wie im Fall reiner Gravitation eine Supergravitationswirkung zu formulieren, wobei wieder ein Vektor-Spinor als fermionischer Partner angenommen wird. Die supersymmetrische Erweiterung der Einstein-Hilbert-Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L}_{\text{SUGRA}} = -\frac{1}{2} i \varepsilon^{\mu\nu\rho} \{ e^a_\mu R_{\nu\rho a} + \overline{\psi}^I_\mu \nabla_\nu \psi^I_\rho \}, \tag{3.6}$$

wobei hier $\omega_\mu{}^a := \frac{i}{2}\varepsilon^{abc}\omega_{\mu\, bc}$ das flache $D = 3$-Hodge-Dual des Spin-Zusammenhangs ω_μ^{ab} bezeichnet. Mit diesem wird die kovariante Ableitung in Spinordarstellung wegen (A.77) zu

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} = \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^a\gamma_a. \tag{3.7}$$

Ebenso ist $R_{\mu\nu\, a} := \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}R^{\;bc}_{\mu\nu}$, so daß der erste Term tatsächlich der übliche Einstein-Hilbert-Term $\frac{1}{2}R$ ist. Ferner kennzeichnet $I = 1, ..., N$ eine beliebige Zahl an Gravitinos. Die Wirkung (3.6) ist dann invariant unter den N (lokalen) Supersymmetrietransformationen [9]

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon e_\mu{}^a &= \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^I\gamma^a\psi^I_\mu, \\ \delta_\epsilon \psi^I_\mu &= \nabla_\mu \epsilon^I. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die durch (3.6) gegebene Wirkung ist ebenso topologisch wie klassische Gravitation. Die Gravitonmultipletts sind also in einem formalen Sinne von der Form (e^a_μ, ψ^I_μ), wobei $I = 1, ..., N$ für N-fache Supersymmetrie steht.

Es gibt eine Besonderheit bei lokaler Supersymmetrie in $D = 3$, die mit der Existenz der im vorigen Abschnitt erläuterten konischen Singularitäten zusammenhängt. Die in Kap. 2 bewiesene Bose-Fermi-Entartung tritt hier nämlich nicht notwendigerweise auf. Dies sei hier aus folgendem Grund erwähnt: Nach einem Ansatz von Witten [17] im Zusammenhang mit Supergravitation in $D = 3$ könnte dies helfen, den Wert der kosmologischen Konstante dadurch zu erklären, daß man die Supersymmetrie als ungebrochen annimmt. Die damit üblicherweise einhergehende, phänomenologisch inakzeptable Bose-Fermi-Entartung, können wir so also umgehen. Die zum Beweis dieser Entartung notwendigen globalen Superladungen existieren in einer Geometrie mit konischen Singularitäten nicht, denn in einer solchen gibt es keine kovariant-konstanten Spinoren. (Dies zeigt man dadurch, daß man annimmt, es gäbe solche Spinoren und diese um eine solche Singularität paralleltransportiert; aufgrund der Notwendigkeit gewisse Kanten miteinander zu identifizieren, erhält man einen Widerspruch [19]). Nimmt man an, daß unsere Welt durch den starken Kopplungslimes einer dreidimensionalen Theorie beschrieben wird, so kann man Eigenschaften, die sich gut durch ungebrochene Supersymmetrie erklären lassen - wie vielleicht den Wert der kosmologischen Konstante -, auch genauso erklären [18].

3.2 Chern-Simons-Theorie

In $D = 3$ existiert neben der altbekannten Yang-Mills-Wirkung noch eine weitere eichinvariante kanonische Wirkung, die für uns im folgenden von Bedeutung sein wird. Diese Chern-Simons-Wirkung erhält man im allgemeinen als aus einem Eichfeld konstruierte 3-Formen, welche durch Integration über 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten sofort als Wirkung interpretierbare skalare Größen liefern und damit gerade für Theorien in drei Dimensionen von besonderer Bedeutung sind. Faßt man das zugrundeliegende Vektorfeld als Lie-Algebra-wertige 1-Form A auf, so lautet die Wirkung

$$S = \int \mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A), \tag{3.9}$$

wobei Tr generisch für eine beliebige quadratische Form auf der Lie-Algebra der Eichgruppe steht. (3.9) ist im folgenden Sinne eine rein topologische Theorie: In $D = 4$ sei F die Krümungs-2-Form des Zusammenhangs A, dann ist $\mathrm{Tr}(F \wedge F) = \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu})$ eine topologische Dichte in dem Sinne, daß das Integral hierüber eine topologische Invariante des zugrundeliegenden Bündels liefert. (Führt man dieses Integral etwa für ein $SU(2)$-Bündel über S^4 aus, so erhält man die 2. Chern-Zahl des Bündels [20].) Gleichzeitig ist $\mathrm{Tr}(F \wedge F)$ geschlossen, d.h. lokal exakt, $\mathrm{Tr}(F \wedge F) = d\omega$, wobei die 3-Form ω gerade durch die Chern-Simons-Dichte gegeben ist:

$$\omega = \mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A). \tag{3.10}$$

Diese transformiert sich unter Eichtransformationen in eine totale Ableitung und liefert damit eine eichinvariante Theorie. Ein nur durch einen Chern-Simons-Term beschriebenes Eichfeld hat aufgrund dieses topologischen Charakters keine physikalischen Freiheitsgrade.

Es sei hier erwähnt, daß man klassische Gravitation in $D = 3$ als eine Poincare-Eichtheorie mit einer Chern-Simons-Wirkung auffassen kann [21]. Ebenso kann man Chern-Simons-Supergravitation betrachten [22].

3.3 Geeichte Supergravitation

3.3.1 Nichtlineare Sigmamodelle

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, sind sowohl klassische Gravitation als auch ihre lokal supersymmetrische Erweiterung in 2+1 Dimensionen bei Abwesenheit von Materie rein topologisch, d.h liefern keine propagierenden Freiheitsgrade und sind damit dynamisch trivial. Eine Möglichkeit hieraus eine dynamisch nichttriviale Theorie zu konstruieren, besteht darin, die Theorie an nichtlineare Sigmamodelle zu koppeln. Diese bestehen aus einer gewissen Zahl an Skalarfeldern ϕ^i, $i = 1, ..., d$, die man an jedem Raumzeitpunkt als Koordinaten einer “internen” Mannigfaltigkeit, der Skalarmannigfaltigkeit (oder auch “Target space”), auffassen kann. Die Felder liefern also eine Abbildung

$$\phi : M \longrightarrow \mathcal{M}$$

von der Raumzeit M in die Skalarmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, welche lokal hierdurch definiert werden kann. Zur Konstruktion der kinetischen Terme für die Skalarfelder stattet man die Skalarmannigfaltigkeit mit einer i.a. nichtflachen Riemannschen Metrik aus (daher die Bezeichnung nichtlinear) und erhält eine Wirkung der Form[2]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_{ij}(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j. \tag{3.11}$$

Möchte man diese global supersymmetrisieren, so muß man wie üblich fermionische Partner χ^i, $i = 1, ..., d$, einführen, und man erhält für skalare $N = 1$ Multipletts (ϕ^i, χ^i) die Wirkung [23]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_{ij}(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j - \frac{1}{2} g_{ij}(\phi) \overline{\chi}^i \gamma^\mu \nabla_\mu \chi^j - \frac{1}{24} R_{ijkl} \overline{\chi}^i \gamma^\mu \chi^j \overline{\chi}^k \gamma_\mu \chi^l, \tag{3.12}$$

wobei $\nabla_\mu \chi^i := \partial_\mu \chi^i + \Gamma^i_{jk} \partial_\mu \phi^j \chi^k$ die bezüglich $g_{ij}(\phi)$ kovariante Ableitung und R_{ijkl} den korrespondierenden Riemannschen Krümmungstensor bezeichnet. Fordert man nun etwa höhere Supersymmetrie ($N > 1$), so stellt man fest, daß sich dies nicht für beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten realisieren läßt, sondern nur für solche, die zusätzlich eine Kählerstruktur tragen [9, 11]. Entsprechend werden die geometrischen Bedingungen bei höherer Supersymmetrie immer restriktiver, so daß $\mathcal{M}$ etwa für $N = 3$ eine quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit sein muß oder für $N = 4$ eine Hyper-Kähler-Mannigfaltigkeit. Für $N \geq 5$ gibt es sogar jeweils nur eine mögliche Skalarmannigfaltigkeit, und es existieren keine Modelle für $N > 16$. (Für weitere Details siehe [9].) Im folgenden werden uns hauptsächlich die Fälle $N = 1, 2$ interessieren.

Wir kommen nun zur Ankopplung dieser Theorie an Supergravitation, zunächst für beliebiges N. Dies ist in [9] und [23] ausführlich dargestellt, und wir werden hier aus Gründen der Vollständigkeit die wesentlichen Ergebnisse zusammenfassen. Für $N \geq 2$ besitzt die Skalarmannigfaltigkeit komplexe Strukturen, die wir mit $f^i_{Pj}(\phi)$, $P = 2, ..., N$, bezeichnen und die in den sogenannten superkovarianten Ableitungen vorkommen:

$$\hat{\partial}_\mu \phi^i := \partial_\mu \phi^i - \frac{1}{2}(\delta^i_j \overline{\psi}_\mu + f^i_{Pj} \overline{\psi}^P_\mu) \chi^j. \tag{3.13}$$

Die f_P erfüllen außerdem eine Cliffordalgebra

$$f^i_{Pk} f^k_{Qj} + f^i_{Qk} f^k_{Pj} = -2\delta_{PQ} \delta^i_j, \tag{3.14}$$

so daß wir aus ihnen $\frac{1}{2}N(N-1)$ Generatoren von $SO(N)$ über $f^{PQ} = f^{[P} f^{Q]}$ und $f^{1P} = -f^{P1} = f^P$ konstruieren können. Damit diese komplexen Strukturen nicht explizit auftauchen, werden wir wie in [23] folgende Notation einführen:

[2] Im folgenden werden wir die metrischen Tensoren auf der Raumzeit und der Skalarmannigfaltigkeit nur durch lateinische und griechische Indizes unterscheiden.

$\chi^{iI} = (\chi^i, f^{Pi}{}_j\chi^j)$, wobei $I = 1, ..., N$. Nutzt man die im vorigen Kapitel angegebene Wirkung für Supergravitation und koppelt diese an die Wirkung (3.12) für nichtlineare Sigmamodelle, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu\rho}(e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} + \overline{\psi}^I_\mu D_\nu \psi^I_\rho)\\ &-\frac{1}{2}eg_{ij}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j + N^{-1}\overline{\chi}^{iI}\gamma^\mu D_\mu\chi^{jI})\\ &+\frac{1}{4}eg_{ij}\overline{\chi}^{iI}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi^I_\mu(\partial_\nu\phi^j + \hat{\partial}_\nu\phi^j)\\ &+\frac{1}{48}eN^{-2}(3(g_{ij}\overline{\chi}^{iI}\chi^{jI})^2 - 2(N-2)(g_{ij}\overline{\chi}^{iI}\gamma^a\chi^{jJ})^2)\\ &-\frac{1}{24}eN^{-2}R_{ijkl}\overline{\chi}^{iI}\gamma_a\chi^{jI}\overline{\chi}^{kJ}\gamma^a\chi^{lJ},\end{aligned} \tag{3.15}$$

wobei die kovarianten Ableitungen durch

$$\begin{aligned}D_\mu\psi^I_\nu &= (\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^a_\mu\gamma_a)\psi^I_\nu + \partial_\mu\phi^i Q^{IJ}_i\psi^J_\nu, \text{ und}\\ D_\mu\chi^{iI} &= (\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^a_\mu\gamma_a)\chi^{iI} + \partial_\mu\phi^j(\Gamma^i_{jk}\chi^{kI} + Q^{IJ}_j\chi^{iJ})\end{aligned} \tag{3.16}$$

gegeben sind. Q^{IJ}_i bezeichnet die durch I, J indizierten zu den f^{PQ} korrespondierenden sogenannten Kähler-Zusammenhänge auf der Skalarmannigfaltigkeit. (So erhält man etwa für $N = 2$ genau einen Kähler-Zusammenhang $Q^{12}_i = Q_i = -\frac{1}{4}i\partial_i K$, wenn K das Kähler-Potential ist. Die Bedeutung der Bezeichnung Zusammenhang wird in Kürze erklärt.). Hierbei ist die Wirkung (3.15) invariant unter den Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned}\delta e_\mu{}^a &= \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^I\gamma^a\psi^I_\mu,\\ \delta\psi^I_\mu &= D_\mu\epsilon^I - \delta\phi^i Q^{IJ}_i\psi^J_\mu - \frac{1}{8}g_{ij}\overline{\chi}^{iI}\gamma^\nu\chi^{jJ}\gamma_{\mu\nu}\epsilon^J,\\ \delta\phi^i &= \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^I\chi^{iI},\\ \delta\chi^{iI} &= \frac{1}{2}(\delta^{IJ} - f^{IJ})^i{}_j\gamma^\mu\hat{\partial}_\mu\phi^j\epsilon^J - \delta\phi^j(\Gamma^i_{jk}\chi^{kI} + Q^{IJ}_j\chi^{iJ}),\end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei nun gilt:

$$\hat{\partial}_\mu\phi^i = \partial_\mu\phi^i - \frac{1}{2}\overline{\psi}^I_\mu\chi^{iI},\ D_\mu\epsilon^I = (\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^a_\mu\gamma_a)\epsilon^I + \partial_\mu\phi^i Q^{IJ}_i\epsilon^J. \tag{3.18}$$

3.3.2 Geeichte Isometrien

Wie wir in Abschnitt 3.1 diskutiert haben, ist Supergravitation die Eichtheorie der Superalgebra, d.h die eben konstruierte Theorie ist automatisch eine Eichtheorie. Zusätzlich kann man solche Theorien aber noch einer weiteren Eichung unterwerfen.

Hierzu nehmen wir an, daß auf der Skalarmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gewisse Isometrien existieren, d.h. Transformationen, die die Metrik invariant lassen. Dies impliziert die Existenz eines Killing-Vektorfeldes X^j, welches die Isometrien erzeugt und für das gilt $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$ bzw. $\mathcal{L}_X g_{ij} = 0$, wenn $\mathcal{L}_X$ die Lie-Ableitung in Richtung des Vektorfeldes bezeichnet.[3] (Man erinnere sich daran, daß man die Menge der Killing-Vektorfelder als Lie-Algebra der Isometriegruppe auffassen kann.) Die von diesen erzeugten Transformationen sind dann Transformationen der Skalarfelder, die die Wirkung (3.12) invariant lassen, denn diese enthält nur Größen, die sich aus der Metrik gewinnen lassen. Will man dies zu einer Symmetrie der ganzen Supergravitationswirkung (3.15) erweitern, so muß man gegebenenfalls eine $SO(N)$ Rotation der Spinorfelder zulassen, deren infinitesimale Erzeugende mit $\mathcal{S}^{IJ}(X, \phi)$ bezeichnet seien. Sind diese Transformationen nun mit der Metrik und den komplexen Strukturen in dem Sinne verträglich, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g_{ij} &= 0, \\ \mathcal{L}_X Q_i^{IJ} + D_i \mathcal{S}^{IJ}(\phi, X) &= 0, \\ \mathcal{L}_X f_{ij}^{IJ} - 2\mathcal{S}^{K[I}(\phi, X) f_{ij}^{J]K} &= 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

gilt, so ist (3.15) invariant unter den kombinierten Transformationen

$$\begin{aligned} \delta\phi^i &= X^i(\phi), \\ \delta\psi_\mu^I &= \mathcal{S}^{IJ}(\phi, X)\psi_\mu^J, \\ \delta\chi^{iI} &= \chi^{jI}\partial_j X^i + \mathcal{S}^{IJ}(\phi, X)\chi^{iJ}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da eine Transformation auf der Skalarmannigfaltigkeit zunächst keinen Bezug zur Raumzeit hat, stellen solche Transformationen also eine globale Symmetrie dar. Es ist nun möglich, diese Symmetrie wie üblich zu eichen, d.h. eine explizite Abhängigkeit der Transformationsparameter von der Raumzeit zuzulassen. Es wird damit notwendig zu jeder der Isometrien X_A^j (A indiziert die verschiedenen Isometrien) ein Vektorfeld $A_{A\mu}$ als Eichfeld einzuführen und dieses minimal an die Theorie zu koppeln. (Zu der Frage, warum wir kein ganzes Vektormultiplett hinzufügen müssen, kehren wir gleich zurück.) Da etwa für $N = 2$ die Vektorfelder $X_A^i\partial_i + X_A^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}$ die Generatoren der Eichgruppe bilden, lautet die kovariante Ableitung

$$\mathcal{D}_\mu\phi^j = \partial_\mu\phi^j + g\Theta^{AB}A_{A\mu}(X_B^i\partial_i + X_B^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}})\phi^j = \partial_\mu\phi^j + g\Theta^{AB}A_{A\mu}X_B^j, \tag{3.21}$$

denn ∂_i und $\partial_{\bar{\imath}}$ bezeichnen die komplexe Differentiation nach ϕ^i bzw. $\overline{\phi}^{\bar{\imath}}$. Θ^{AB} ist eine konstante, symmetrische Matrix, die neben g die Kopplung bestimmt. Entsprechend definiert man die Wirkung dieser kovarianten Ableitung auf Spinorfelder:

$$\mathcal{D}_\mu\psi_\nu^I = \nabla_\mu\psi_\nu^I + \partial_\mu\phi^i Q_i^{IJ}\psi_\nu^J + g\Theta^{AB}A_{A\mu}\mathcal{P}_B^{IJ}\psi_\nu^J, \tag{3.22}$$

[3] Da $\mathcal{M}$ für $N = 2$ eine komplexe Kähler-Mannigfaltigkeit ist, ist das Killing-Vektorfeld in diesem Fall holomorph, d.h. es gilt $\partial_{\bar{\imath}}X^j = 0$ und $\nabla_i X_{\bar{\jmath}} + \nabla_{\bar{\jmath}} X_i = 0$.

und analog für $\mathcal{D}_\mu \chi^{iI}$, wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{IJ}(\phi, X) &= X^j Q_j^{IJ}(\phi) + \mathcal{S}^{IJ}(\phi, X) \text{ und} \\ \mathcal{P}_A^{IJ} &:= \mathcal{P}^{IJ}(\phi, X_A). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dieser Ausdruck ist antisymmetrisch in I, J, d.h. für den Fall $N = 2$ reduziert sich dies auf die sogenannte Impulsabbildung $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_A^{12}$, die man gleichzeitig aus der aufgrund der Killing-Gleichung (3.19) integrablen Relation

$$\partial_j \mathcal{P}_A = \frac{i}{2} g_{j\bar{j}} X_A^{\bar{j}} \tag{3.24}$$

bestimmen kann. Es sei an dieser Stelle noch einmal auf die Bedeutung der verschiedenen kovarianten Ableitungen hingewiesen. Im folgenden bezeichnet ∇_μ die kovariante Ableitung nur bezüglich der Raum-Zeit, D_μ dieselbe, jedoch zusätzlich Kähler-kovariant und $\mathcal{D}_\mu$ die kovariante Ableitung aufgrund der Eichung der Isometrien. Wie in [23] im Detail ausgeführt, führt diese Ankopplung dazu, daß die Wirkung (3.15) nicht mehr invariant unter den Supersymmetrietransformationen ist. Es wird damit notwendig, einen kompensierenden Term einzuführen, der, wie sich herausstellt, auf die Form einer Chern-Simons-Wirkung (siehe Abschnitt 3.2) gebracht werden kann, d.h. die Wirkung wird um die Kopplung

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{1}{8} i g \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_{A\mu} F_{B\nu\rho} \Theta^{AB} \tag{3.25}$$

erweitert. Ferner muß eine Supersymmetrievariation der Vektorfelder der Form

$$\delta A_{A\mu} = 2\mathcal{P}_A^{IJ} \bar{\psi}_\mu^I \epsilon^J + g_{ij} X_A^i \overline{\chi}^{jI} \epsilon^I \tag{3.26}$$

eingeführt werden, aufgrund derer zur Kompensation ein zusätzlicher Yukawa-Kopplungsterm in der Wirkung auftauchen muß. Dieser ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{Y}} = \frac{1}{2} e g A_1^{IJ} \overline{\psi}_\mu^I \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu^J + e g A_{2j}^{IJ} \overline{\psi}_\mu^I \gamma^\mu \chi^{jJ} + \frac{1}{2} e g A_{3ij}^{IJ} \overline{\chi}^{iI} \chi^{jJ}, \tag{3.27}$$

wobei wir explizite Ausdrücke für die Massen Tensoren A_1, A_2 und A_3 für $N = 2$ später angeben werden. Zusätzlich erfahren die Fermionen-Variationen (3.17) folgende Modifikation.

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu^I &= \mathcal{D}_\mu(\omega, Q)\epsilon^I + g A_1^{IJ} \gamma_\mu \epsilon^J \\ \delta\chi^{iI} &= \frac{1}{2}(\delta^{IJ} - f^{IJ})^i{}_j \gamma^\mu \hat{\partial}_\mu \phi^j \epsilon^J - g N g^{ij} A_{2j}^{JI} \epsilon^J. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Man mag nun folgende Fragen stellen: Warum wurde kein ganzes Vektormultiplett zu der Theorie hinzugefügt und wieso enthält die Wirkung nur den topologischen Chern-Simons-Term und nicht etwa einen gewöhnlichen Yang-Mills-Term, wie man das von einer Eichtheorien erwarten würde? Diese beiden Fragen sind verwandt, denn ein Yang-Mills-Vektorfeld ist dynamisch, d.h. um die Supersymmetrie nicht zu verletzen, müßte ein vollständiges Vektormultiplett hinzugefügt werden, insbesondere also weitere 'Spin-$\frac{1}{2}$'-Fermionen, die dann nicht mehr zu den geometrisch besser verstandenen Skalarfeldern ϕ^i gehören. Ferner gibt es in $D = 3$ eine on-shell-Dualität zwischen masselosen Skalaren und masselosen Vektorfeldern (siehe: Anhang A), d.h. man hat eine Freiheit hinsichtlich der Wahl der propagierenden Freiheitsgrade. Man kann eine supersymmetrische Theorie entweder durch Vektormultipletts oder durch skalare Multipletts ausdrücken. Und in der Tat kann man diese Freiheit ausnutzen, um zu zeigen, daß i.a. Yang-Mills-Eichtheorien und Chern-Simons-Eichtheorien (kurz: Yang-Mills-Eichung und Chern-Simons-Eichung) äquivalent sind, wenn man eventuell von einer halb-einfachen zu einer nicht halb-einfachen Eichgruppe übergeht [24]. Wir werden später an einem Beispiel sehen, daß ein reines Chern-Simons-Eichfeld durch Redualisierung in ein propagierendes Vektorfeld mit einem Yang-Mills-Term und einen Chern-Simons-Term transformiert werden kann. Je nach dem, in welchem Bild man arbeitet (Chern-Simons oder Yang-Mills) ergeben sich unterschiedliche Multipletts, insbesondere auch für das Gravitationsmultiplett. Dieses aus höheren Dimensionen unbekannte Phänomen der Mehrdeutigkeit des Gravitationsmultipletts hängt mit seinem nicht-propagierenden Charakter zusammen, denn das Hinzufügen neuer Felder wird nicht a priori von der Supersymmetrie verboten. So enthält in diesem Fall der reinen Chern-Simons-Eichung (3.25) das Gravitationsmultiplett das Eichvektorfeld, denn zusätzlich zu den Transformationen (3.28) erzwingt Supersymmetrie noch, daß sich das Vektorfeld gemäß (3.26) transformiert.[4] In einer Yang-Mills-Eichung hingegen befindet sich das - nun propagierende - Eichfeld nicht mehr im Gravitationsmultiplett.

3.3.3 Das skalare Potential für $N = 2$

Die mit Einführung des Yukawa-Kopplungsterms (3.27) modifizierten Supersymmetrietransformationen (3.28) der fermionischen Felder macht die Einführung eines skalaren Potentials notwendig, das sich durch die Tensoren A_1 und A_2 wie folgt ausdrücken läßt [23]:

$$eV = 2eg^2(\frac{2}{N}A_1^{IJ}A_1^{IJ} - g^{ij}A_{2i}^{IJ}A_{2j}^{IJ}). \tag{3.29}$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß sich die zusätzlichen Terme in der SUSY-Variation der Wirkung wegheben, ist die quadratische Identität

$$2A_1^{IK}A_1^{JK} - Ng^{ij}A_{2i}^{IK}A_{2j}^{JK} = \frac{1}{N}\delta^{IJ}(2A_1^{KL}A_1^{KL} - Ng^{ij}A_{2i}^{KL}A_{2j}^{KL}). \tag{3.30}$$

Diese reduziert sich für $N = 2$ und in Matrixschreibweise auf

$$A_1A_1^t - g^{ij}A_{2i}A_{2j}^t = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A_1A_1^t - g^{ij}A_{2i}A_{2j}^t] \cdot \mathbf{1}, \tag{3.31}$$

[4] Daß in den Supersymmetrievariationen etwa für ψ_μ^I (3.17) auch Felder wie χ^i vorkommen, heißt nicht, daß sich diese in einem gemeinsamen Multiplett befinden. Dies ist vielmehr darauf zurückzuführen, daß man in einer Wess-Zumino-artigen Eichung arbeitet.

wobei $\mathbf{1}$ die zweidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Die Matrix auf der linken Seite ist also gleich ihrer halben Spur multipliziert mit der Einheitsmatrix. Die Lösung für diese Gleichung ist von der Form

$$A_1 A_1^t - g^{ij} A_{2i} A_{2j}^t = \alpha \cdot \mathbf{1}, \tag{3.32}$$

wobei α eine zunächst unbestimmte Funktion ist. Aus (3.29) folgt aber, daß α proportional zum Potential ist:

$$A_1 A_1^t - g^{ij} A_{2i} A_{2j}^t = \frac{1}{4g^2} V \cdot \mathbf{1}. \tag{3.33}$$

Wir werden nun A_1 und A_2 explizit angeben und untersuchen, ob (3.33) erfüllt ist. Da die Skalarmannigfaltigkeit für $N = 2$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit sein muß, d.h. eine komplexe Struktur besitzt, werden wir zu komplexen Koordinaten übergehen, für welche sich (3.33) auf

$$A_1 A_1^t - g^{i\bar{j}} A_{2i} A_{2\bar{j}}^\dagger - g^{j\bar{i}} A_{2j} A_{2\bar{i}}^\dagger = \frac{1}{4g^2} V \cdot \mathbf{1} \tag{3.34}$$

reduziert, wobei $g_{i\bar{j}}$ die Kählermetrik bezeichnet. Es ist [23]

$$\begin{aligned} A_1^{IJ} &= -2T\delta^{IJ} - e^{K/2} \begin{pmatrix} -\mathrm{Re}W & \mathrm{Im}W \\ \mathrm{Im}W & \mathrm{Re}W \end{pmatrix} \\ &= -2T \cdot \mathbf{1} + e^{K/2} \mathrm{Re}W \sigma_3 - e^{K/2} \mathrm{Im}W \sigma_1, \end{aligned} \tag{3.35}$$

sowie [23]

$$\begin{aligned} A_{2i}^{IJ} &= -\partial_i T \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{K/2} D_i W \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\partial_i T(\mathbf{1} - \sigma_2) + \frac{1}{4} e^{K/2} D_i W (\sigma_3 + i\sigma_1). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Hierbei ist $T = \mathcal{P}_A \Theta^{AB} \mathcal{P}_B$, wobei die Impulsabbildung $\mathcal{P}_A$ in (3.24) definiert worden war. Ferner ist $D_i W := \partial_i W + (\partial_i K) W$ die Kähler-kovariante Ableitung der holomorphen Funktion W, des sogenannten Superpotentials. Man beachte, daß A_1 symmetrisch ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} A_1 A_1 &= 4T^2 \cdot \mathbf{1} - 4Te^{K/2} (\mathrm{Re}W \sigma_3 - \mathrm{Im}W \sigma_1) \\ &\quad + e^K ((\mathrm{Re}W)^2 \sigma_3^2 - \mathrm{Re}W \mathrm{Im}W \{\sigma_3, \sigma_1\} + (\mathrm{Im}W)^2 \sigma_1^2) \\ &= 4T^2 \cdot \mathbf{1} - 4Te^{K/2} (\mathrm{Re}W \sigma_3 - \mathrm{Im}W \sigma_1) + e^K |W|^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Da die Sigmamatrizen hermitesch sind, gilt

$$
\begin{aligned}
g^{i\bar{j}} A_{2i} A^{\dagger}_{2\bar{j}} &= g^{i\bar{j}} [-\partial_i T(\mathbf{1} - \sigma_2) + \frac{1}{4} e^{K/2} D_i W(\sigma_3 + i\sigma_1)] \\
&\qquad [-\partial_{\bar{j}} T(\mathbf{1} - \sigma_2) + \frac{1}{4} e^{K/2} D_{\bar{j}} \overline{W}(\sigma_3 - i\sigma_1)] \\
&= g^{i\bar{j}} \partial_i T \partial_{\bar{j}} T(\mathbf{1} - \sigma_2)^2 - \frac{1}{4} e^{K/2} (\mathbf{1} - \sigma_2)(\sigma_3 - i\sigma_1) g^{i\bar{j}} \partial_i T D_{\bar{j}} \overline{W} \\
&\quad - \frac{1}{4} e^{K/2} (\sigma_3 + i\sigma_1)(\mathbf{1} - \sigma_2) g^{i\bar{j}} D_i W \partial_{\bar{j}} T \\
&\quad + \frac{1}{16} e^{K} (\sigma_3 + i\sigma_1)(\sigma_3 - i\sigma_1) g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W}.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks setzen wir die Identitäten (A.78) und (A.79) in (3.38) ein, so daß folgt

$$
\begin{aligned}
g^{i\bar{j}} A_{2i} A^{\dagger}_{2\bar{j}} =& 2(\mathbf{1} - \sigma_2) g^{i\bar{j}} \partial_i T \partial_{\bar{j}} T - \frac{1}{2} e^{K/2} (\sigma_3 - i\sigma_1) g^{i\bar{j}} \partial_i T D_{\bar{j}} \overline{W} \\
& - \frac{1}{2} e^{K/2} (\sigma_3 + i\sigma_1) g^{i\bar{j}} D_i W \partial_{\bar{j}} T + \frac{1}{8} e^{K} (\mathbf{1} + \sigma_2) g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W}.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Ferner gilt die Relation [23]

$$
\Theta^{AB} X^i_B D_i W = 2iW \Theta^{AB} \mathcal{P}_B, \tag{3.40}
$$

wobei für das Killing-Vektorfeld wegen (3.24)

$$
X^i_B = 2i g^{i\bar{j}} \partial_{\bar{j}} \mathcal{P}_B \tag{3.41}
$$

gilt. Kontrahiert man (3.40) beiderseits mit $\mathcal{P}_A$ und benutzt $T = \mathcal{P}_A \Theta^{AB} \mathcal{P}_B$, so erhält man

$$
\mathcal{P}_A \Theta^{AB} X^i_B D_i W = 2i \mathcal{P}_A \Theta^{AB} g^{i\bar{j}} \partial_{\bar{j}} \mathcal{P}_B D_i W = 2iTW. \tag{3.42}
$$

Andererseits gilt wegen der Symmetrie von Θ^{AB} auch

$$
\partial_{\bar{j}} T = 2\mathcal{P}_A \Theta^{AB} \partial_{\bar{j}} \mathcal{P}_B, \tag{3.43}
$$

also insgesamt

$$
g^{i\bar{j}} D_i W \partial_{\bar{j}} T = 2TW \text{ und } g^{i\bar{j}} \partial_i T D_{\bar{j}} \overline{W} = 2T\overline{W}. \tag{3.44}
$$

Für die "gemischten" Terme in (3.39) folgt damit

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} e^{K/2} & (\sigma_3 - i\sigma_1) g^{i\bar{j}} \partial_i T D_{\bar{j}} \overline{W} + \frac{1}{2} e^{K/2} (\sigma_3 + i\sigma_1) g^{i\bar{j}} D_i W \partial_{\bar{j}} T \\
&= T e^{K/2} ((\sigma_3 - i\sigma_1) \overline{W} + (\sigma_3 + i\sigma_1) W) \\
&= 2T e^{K/2} \mathrm{Re}[(\sigma_3 + i\sigma_1) W] \\
&= 2T e^{K/2} (\mathrm{Re} W \sigma_3 - \mathrm{Im} W \sigma_1),
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

was bis auf einen Faktor 2 genau derselbe Term wie in (3.37) ist. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} g^{i\bar{j}} A_{2i} A^{\dagger}_{2\bar{j}} =& 2(\mathbf{1} - \sigma_2) g^{i\bar{j}} \partial_i T \partial_{\bar{j}} T - 2T e^{K/2} (\mathrm{Re} W \sigma_3 - \mathrm{Im} W \sigma_1) \\ & + \frac{1}{8} e^K (\mathbf{1} + \sigma_2) g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Da die Metrik hermitesch sowie σ_1 und σ_3 reell sind, erhält man für das hermitesch-konjugierte $g^{j\bar{i}} A_{2\bar{i}} A^{\dagger}_{2j}$ dasselbe Ergebnis, nur mit dem Unterschied, daß sich vor dem rein-imaginären σ_2 das Vorzeichen umkehrt. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} A_1 A_1 - g^{i\bar{j}} A_{2i} A^{\dagger}_{2\bar{j}} - g^{j\bar{i}} A_{2j} A^{\dagger}_{2\bar{i}} =& (4T^2 + e^K |W|^2 - 4 g^{i\bar{j}} \partial_i T \partial_{\bar{j}} T \\ & - \frac{1}{4} e^K g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W}) \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

also

$$A_1 A_1 - g^{i\bar{j}} A_{2i} A^{\dagger}_{2\bar{j}} - g^{j\bar{i}} A_{2j} A^{\dagger}_{2\bar{i}} = \frac{1}{4g^2} V \cdot \mathbf{1}, \tag{3.48}$$

wenn man

$$V = 2g^2 (8T^2 + 2e^K |W|^2 - 8 g^{i\bar{j}} \partial_i T \partial_{\bar{j}} T - \frac{1}{2} e^K g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W}) \tag{3.49}$$

setzt. Man sieht, daß die quadratische Identität erfüllt, d.h. die linke Seite von (3.48) proportional zur **1** ist, und hat überdies die allgemeine Form des skalaren Potentials für geeichte $N = 2$ Supergravitation in $D = 3$ bestimmt.

Wir können die Bezeichnung Zusammenhang für die Größen $\partial_i K$ sowie die Notwendigkeit, die Kähler-kovariante Ableitung für $N \geq 2$ einzuführen, nun verstehen. Das Kählerpotential ist durch die Metrik nicht vollkommen festgelegt, denn eine sogenannte Kähler-Transformation

$$K \longrightarrow K + F + F^{\dagger}, \tag{3.50}$$

wobei F eine holomorphe Funktion ist, läßt die Metrik $g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K$ invariant. Da das Kählerpotential aber explizit in der Wirkung auftaucht, etwa in Termen der Form $e^K |W|^2$, muß sich das Superpotential aktiv unter der Kähler-Transformation transformieren, damit die Wirkung invariant ist:

$$W \longrightarrow e^{-F} W \ , \ \overline{W} \longrightarrow e^{-F^{\dagger}} \overline{W}. \tag{3.51}$$

Die Kähler-kovariante Ableitung transformiert sich dann eben kovariant:

$$D_i W \to D_i (e^{-F} W) = e^{-F} D_i W. \tag{3.52}$$

Das Superpotential ist somit keine Funktion auf der Skalarmannigfaltigkeit, sondern ein Schnitt in einem geeigneten komplexen Geradenbündel über der Mannigfaltigkeit [8].

Kapitel 4

Spontane $N = 2 \rightarrow N = 1$ Supergravitationsbrechung

Wir behandeln nun die spontane $N = 2 \rightarrow N = 1$ Brechung von Supergravitation in $D = 3$. Zunächst werden wir die wichtigsten Eigenschaften spontaner Symmetriebrechung, die hierfür von Bedeutung sein werden, zusammenfassen.

4.1 Allgemeine Aspekte spontaner Symmetriebrechung

Spontane Symmetriebrechung bezeichnet das Phänomen, daß die dynamischen Gleichungen bzw. die Wirkung einer Theorie eine Symmetrie haben können, die von der Grundzustandslösung nicht respektiert wird. Dies erreicht man durch Wahl eines geeigneten Potentials beteiligter Skalarfelder, wie z.B.

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^*)^2, \tag{4.1}$$

wodurch diese einen nichtverschwindenden VEV[1] erhalten:

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \phi_0 \neq 0. \tag{4.2}$$

Bezeichnet $S = 1 + i\alpha_a T^a$, $\alpha_a = \text{const.}$[2], die Darstellung der Symmetriegruppe auf den Feldern, so ist die Symmetrie also dann spontan gebrochen, d.h. der Grundzustand ϕ_0 nicht invariant unter der Symmetrie, wenn

$$T^a\phi_0 \neq 0 \tag{4.3}$$

für mindestens einen Generator gilt. Dies hat zur Folge, daß in einer effektiven Beschreibung, in der in einer klassischen Formulierung die Lösungen um diese Feldkonfiguration ϕ_0 entwickelt werden bzw. in einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung

[1] Vakuumerwartungswert - vacuum expectation value.
[2] Im folgenden beschränken wir uns ausschließlich auf kontinuierliche Symmetrien.

die Störungsentwicklung um das korrespondierende Vakuum erfolgt, die Theorie diese Symmetrie nicht zu besitzen scheint. Von Relevanz ist hierzu das Goldstone-Theorem, das allgemein feststellt, daß zu jeder spontan gebrochenen Symmetrie ein masseloses Skalarfeld, das Goldstoneboson, existiert. Erweitert man dieses Konzept auf lokale Symmetrien, d.h. auf Eichsymmetrien, so stellt sich die Situation wie folgt dar. Die Skalarfelder werden minimal an die Theorie gekoppelt und unterliegen ebenso einer Eichsymmetrie. In einer speziellen Eichung, in der etwa der Imaginärteil eines komplexen Skalarfeldes

$$\phi(x) = \phi_r(x) e^{i\eta(x)}, \tag{4.4}$$

wobei ϕ_r und η hier reell sind, verschwindet, erscheint dann in der Wirkung z.B. ein Massenterm für das Eichvektorfeld, sofern $\phi_0 = \langle\phi\rangle = \langle\phi_r\rangle \neq 0$ ist, d.h. das Vektorfeld wird massiv, obwohl die Eichsymmetrie der Wirkung noch vorhanden ist - wenn sie auch nach einer Entwicklung um ϕ_0 nicht mehr manifest ist. Die Wirkung lautet nach der Entwicklung $\phi_r(x) = \phi_0 + \phi_r'(x)$, also für $\langle\phi_r'(x)\rangle = 0$, am Grundzustand

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r + \phi_0^2\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + e\phi_0^2 A_\mu\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}e^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu - V. \tag{4.5}$$

Der Kopplungsterm $e\phi_0^2 A_\mu \partial^\mu \eta$ kann unter Ausnutzung der Eichinvarianz wegtransformiert werden, denn für $\phi(x) \to e^{-i\eta(x)}\phi(x) = \phi_r(x)$ und damit $A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\eta(x)$ wird die Wirkung zu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r + \frac{1}{2}e^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu - 2\mu^2\phi_r^2. \tag{4.6}$$

In dieser Eichung wird die Bewegungsgleichung also zur Klein-Gordon-Gleichung des Vektorfeldes A_μ mit der Masse $e^2\langle\phi\rangle^2$. Den zusätzlichen transversalen Freiheitsgrad, den ein massives Vektorfeld haben muß, stammt von dem nun nicht mehr vorhandenen Skalarfeld η, dessen dynamischer Freiheitsgrad nicht durch die Eichung beseitigt werden kann. Dies bezeichnet man als den Higgs-Mechanismus. Im Falle von lokalen Symmetrien ist das Skalarfeld η das masselose Goldstoneboson und man sagt, das Goldstoneboson wird von dem Vektorfeld "gegessen". Ferner beachte man, daß das Potential (4.1) nicht von η in (4.4) abhängt, da eine beliebige $U(1)$ - Rotation das Potential unverändert läßt. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft der Goldstonebosonen.

Die vorangegangene Überlegung macht auch deutlich, was genau es zu bedeuten hat, daß ein Eichfeld massiv wird. Es ist dies so zu verstehen, daß man eine Eichung wählen kann, in der sich die Bewegungsgleichung auf die Klein-Gordon-Gleichung mit nicht verschwindendem Massenterm reduziert. Überdies kann die Aussage, daß ein Eichfeld massiv wird, keine manifest eichinvariante Bedeutung haben, denn daß die Anwendung des Poincare-Casimiroperators $P^2 = P^\mu P_\mu$ auf A_μ als Eigenwert m^2 liefert ($P^2 A_\mu = -\Box A_\mu = m^2 A_\mu$), gilt eben nur für eine bestimmte Eichung. Die einzig mögliche Bedeutung, die die Massivität von A_μ haben kann, ist diese: Es existiert eine Eichung, in der P^2 angewandt auf A_μ als Eigenwert m^2 liefert.

Dieser Higgs-Mechanismus läßt sich auf lokale Supersymmetrie, d.h. auf Supergravitation erweitern, was wir im übernächsten Abschnitt erklären werden, sowie auf eine topologische Variante in $D = 3$, die wir im nächsten Abschnitt einführen.

4.1.1 Der topologische Higgs-Mechanismus

Eichinvariante Massenterme in $D = 3$

Eine Besonderheit in $D = 3$ betrifft die Existenz eichinvarianter Massenterme. Der gewöhnliche Massenterm $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ bricht die Eichinvarianz immer, unabhängig von der Dimension. Zusätzlich zu diesem kann in $D = 3$ jedoch auch ein anderer Term die Rolle eines Massenterms übernehmen und zwar ohne die Eichinvarianz zu brechen. Dieses leistet nämlich der topologische Chern-Simons-Term, der die Eichinvarianz der Theorie unangetastet läßt. Dies kann wie in [25, 26] folgendermaßen begründet werden. Eine Wirkung, die durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi, \tag{4.7}$$

wobei

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{1}{2} \xi \varepsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda \tag{4.8}$$

die Komponentendarstellung der abelschen Chern-Simons-Dichte (3.9) bezeichnet, gegeben ist, führt zu folgenden Bewegungsgleichungen. (Wir beschränken die Analyse auf den für uns relevanten abelschen Fall; das Ergebnis gilt aber auch im allgemeinen.)

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} &= \partial_\rho (\frac{1}{2} \xi \varepsilon^{\mu\rho\sigma} A_\mu - F^{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \xi \varepsilon^{\sigma\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda \\ &= -(\frac{1}{2} \xi \varepsilon^{\sigma\rho\mu} F_{\rho\mu} + \partial_\rho F^{\rho\sigma}). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Wir zeigen nun, daß der Parameter ξ als Masse des Vektorfeldes interpretiert werden kann. Hierzu betrachten wir das Hodge-Dual der Feldstärke-2-Form: $B_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda}$ bzw. $F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} B_\lambda$. Die Bewegungsgleichung wird damit zu

$$\xi B^\mu - \varepsilon^{\nu\lambda\mu} \partial_\nu B_\lambda = 0. \tag{4.10}$$

Unter Ausnutzung der Bianchi-Identität $\partial_\mu B^\mu = 0$ erhält man hiermit

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi g_{\sigma\mu} + \varepsilon_{\sigma\rho\mu} \partial^\rho)(\xi B^\mu - \varepsilon^{\nu\lambda\mu} \partial_\nu B_\lambda) \\ &= \xi^2 B_\sigma - \xi \varepsilon_{\nu\lambda\sigma} \partial^\nu B^\lambda + \xi \varepsilon_{\rho\mu\sigma} \partial^\rho B^\mu - \varepsilon_{\sigma\rho\mu} \varepsilon^{\nu\lambda\mu} \partial^\rho \partial_\nu B_\lambda \\ &= \xi^2 B_\sigma - (\delta^\nu_\sigma \delta^\lambda_\rho - \delta^\lambda_\sigma \delta^\nu_\rho) \partial^\rho \partial_\nu B_\lambda \\ &= (\xi^2 + \partial^\nu \partial_\nu) B_\sigma - \partial_\sigma (\partial^\lambda B_\lambda) \\ &= (\xi^2 + \Box) B_\sigma. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Man sieht: Es taucht ein Klein-Gordon-Operator mit der Masse ξ auf, d.h. klassisch bzw. auf Tree-Level propagieren die Komponenten der dualen Feldstärke - und nach Kontraktion mit $\varepsilon^{\mu\nu\sigma}$ auch die der Feldstärke selbst - mit dieser Masse. Daß dies auch die Massivität der Vektorfelder zur Folge hat, kann wie folgt begründet werden. Die Bewegungsgleichung lautet ausgedrückt durch die Vektorfelder

$$0 = (\Box + \xi^2)F^{\mu\nu} = \partial^\mu(\Box + \xi^2)A^\nu - \partial^\nu(\Box + \xi^2)A^\mu. \tag{4.12}$$

Diese Gleichung kann als Integrabilitätsbedingung interpretiert werden, d.h. es folgt die Existenz eines Skalars ϕ mit

$$(\Box + \xi^2)A_\mu = \partial_\mu \phi. \tag{4.13}$$

Man beachte, daß (4.12) eine eichinvariante Relation ist. Damit auch (4.13) eichinvariant ist, muß sich ϕ unter Eichtransformationen $A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi$ gemäß

$$\phi \longrightarrow \phi - (\Box + \xi^2)\chi \tag{4.14}$$

transformieren. Da der Klein-Gordon-Operator eine Fundamentallösung hat, läßt sich die Gleichung $(\Box + \xi^2)\chi = \phi$ lösen, sofern man voraussetzt, daß ϕ hinreichend gut integrierbar ist. Man kann also die Eichinvarianz ausnutzen, um ϕ wegzutransformieren. In dieser Eichung reduziert sich (4.13) also auf

$$(\Box + \xi^2)A_\mu = 0, \tag{4.15}$$

d.h. das Vektorfeld ist massiv mit der Masse ξ.

Wir haben bisher folgendes festgestellt: Ein propagierendes Vektorfeld, das durch einen Yang-Mills-Term beschrieben wird, hat in $D = 3$ einen propagierenden Freiheitsgrad; dies wird auch nicht durch Addition eines Chern-Simons-Terms geändert, da dieser topologisch ist. Jedoch ist das Vektorfeld nun massiv und hat damit auch als ein solches einen Freiheitsgrad. Wie in [27] ausgeführt, gilt jedoch noch mehr. Wie der rein topologische Chern-Simons-Term zu einem Massenterm werden kann, kann er auch zu einem kinetischen Term werden, wenn man ihm einen konventionellen Massenterm hinzufügt. Diese konstituieren zusammen ein propagierendes, massives Vektorfeld, obwohl die Bewegungsgleichung für einen reinen Massenterm natürlich algebraisch ist. Allgemein gilt die Beziehung, daß die zwei Enden in

$$\text{Yang-Mills + Chern-Simons} \longleftrightarrow \text{Chern-Simons + Masse}$$

physikalisch äquivalente Theorien darstellen, in dem Sinne, daß beide ein massiv propagierendes Vektorfeld mit einem Freiheitsgrad beschreiben. Es verbleibt also noch zu zeigen, daß die Wirkung

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{1}{2}eM^2 A_\mu A^\mu \tag{4.16}$$

zu einem dynamischen Vektorfeld führt.[3] Hierzu schreibt man die Lagrange-Dichte als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m A_\mu Z^{\mu\nu} A_\nu, \text{ wobei } Z^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\rho\nu}\partial_\rho + \frac{M^2}{m}\sqrt{g} g^{\mu\nu}. \tag{4.17}$$

Die formale Determinante der so definierten Matrix von Differentialoperatoren ist dann

$$\begin{aligned} \det Z^{\mu\nu} &= \begin{vmatrix} \frac{M^2}{m} & -\partial_2 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\frac{M^2}{m} & -\partial_0 \\ -\partial_1 & \partial_0 & -\frac{M^2}{m} \end{vmatrix} \\ &= \frac{M^2}{m}\left[(\partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2) + \left(\frac{M^2}{m}\right)^2\right] = \frac{M^2}{m}\left[\Box + \left(\frac{M^2}{m}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Hierbei wurde angenommen, daß die Metrik flach ist, das Ergebnis gilt aber auch im gekrümmten Fall. Da $\det Z^{\mu\nu} = 0$ die Bewegungsgleichung liefert, wissen wir, daß das Vektorfeld dynamisch geworden ist und überdies die berechnete Masse $\frac{M^2}{m}$ hat.

Die hier behauptete Äquivalenz beider Theorien bezieht sich nicht nur auf die Zahl der Freiheitsgrade, sondern gilt in einem tieferen Sinne: Beide sind durch eine Legendre-Transformation verbunden. Das heißt, sie lassen sich aus einer gemeinsamen Wirkung nach Variation jeweils unterschiedlicher Felder gewinnen, indem man zunächst die betreffende Bewegungsgleichung bestimmt und diese wieder in die Ausgangswirkung einsetzt. (Vgl. die Vorgehensweise in A.4.) Man erhält dann entweder die Wirkung (4.7) oder (4.16) [28].

Die Beziehung zwischen konventionellem und topologischem Higgs-Mechanismus

Wie wir soeben festgestellt haben, ist es in $D = 3$ möglich, massive Eichfelder zu beschreiben ohne die Eichinvarianz in irgendeiner Form zu brechen. Trotzdem kann man auch einen Higgs-Mechanismus ablaufen lassen, nur mit dem Unterschied, daß die resultierende Wirkung eben auch topologisch sein kann, in dem Sinne, daß es ein topologischer Effekt ist, der zu massiven Vektorfeldern führt. Startet man etwa wie im konventionellen Fall mit einer Eichtheorie, hier jedoch beschrieben durch einen Chern-Simons-Term, und koppelt diese über die kovariante Ableitung $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi$ an ein komplexes Skalarfeld:

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha\right], \tag{4.19}$$

so wird durch Wahl eines Potentials mit nichtverschwindendem Grundzustand $\phi_0 \neq 0$ die effektive Wirkung von der Form sein

$$S = \int d^3x [\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{2}mA_\mu A^\mu - V], \tag{4.20}$$

[3] Man beachte, daß der Massenterm hier die Eichinvarianz bricht sowie den metrischen Tensor enthält, d.h. er ist nicht mehr topologisch.

wobei $m \sim \phi_0^2$ ist und ϕ_r wie in (4.4) das Higgsfeld bezeichnet, d.h. wegen (4.18) ist das Vektorfeld massiv geworden und hat seinen zusätzlichen Freiheitsgrad vom Skalarfeld η erhalten [31]. Der Unterschied zwischen konventionellem und topologischem Higgs-Mechanismus ist in dieser Formulierung also nicht der, daß in einem ein Goldstoneboson gegessen wird und im anderen nicht, sondern besteht einfach in der unterschiedlichen Form der Massenterme. Für die erste Formulierung topologisch massiver Eichtheorie, bei der ein Chern-Simons-Term als Massenterm wirkt, kann ein Higgs-Mechanismus nicht in dieser Form ablaufen, einfach deswegen nicht, weil die Eichinvarianz nicht gebrochen ist und deswegen auch kein Goldstoneboson auftaucht. Dieses ist auch gar nicht notwendig, da ein durch einen Yang-Mills-Term beschriebenes Eichfeld schon eine Freiheitsgrad hat. Wir werden später jedoch eine Form spontaner Symmetriebrechung von Supergravitation untersuchen, in der beteiligte Vektorfelder auf genau diese Weise massiv werden.

Von all diesem sauber zu trennen ist der ganz und gar gewöhnliche Higgs-Mechanismus für eine $D = 3$ Yang-Mills-Eichtheorie, in der das Yang-Mills-Feld massiv wird mit einem konventionellen Massenterm. Dieser Vorgang ist vollkommen analog zum Higgs-Mechanismus in $D = 4$, und ein Freiheitsgrad der beteiligten Skalarfelder muß also gegessen werden, so daß das Vektorfeld mit zunächst einem Freiheitsgrad als massives Feld zwei Freiheitsgrade trägt. Ein massives Vektorfeld kann in $D = 3$ also je nach Wirkung einen oder auch zwei Freiheitsgrade haben!

4.1.2 Der Super-Higgs-Mechanismus

Wir kommen nun zum Super-Higgs-Mechanismus, der die spontane Brechung lokaler, kontinuierlicher Symmetrien auf Supergravitation verallgemeinert. Zunächst wenden wir uns der Brechung globaler Supersymmetrie zu, bei der es einige zusätzliche Restriktionen hinsichtlich der Energie des Grundzustandes gibt. In $D = 3$ kann man dies wie folgt einsehen. Die in (2.22) eingeführten Operatoren R^I erfüllen die Relation

$$\{R^I, (R^J)^\dagger\} = 2P_0\delta^{IJ}, \tag{4.21}$$

d.h. es gilt für den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2}(R^I(R^I)^\dagger + (R^I)^\dagger R^I). \tag{4.22}$$

Für den Vakuumerwartungswert des Hamiltonoperators gilt damit $\langle 0|H|0\rangle = 0$, also $\|(R^I)^\dagger|0\rangle\|^2 + \|R^I|0\rangle\|^2 = 0$ genau dann, wenn $R|0\rangle = 0$ und $R^\dagger|0\rangle = 0$ gilt, aufgrund der Definition dieser Operatoren also genau dann, wenn

$$\begin{aligned}(Q_1^I - iQ_2^I)|0\rangle &= 0 \text{ und}\\ (Q_1^I + iQ_2^I)|0\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Damit folgt $Q_1^I|0\rangle = iQ_2^I|0\rangle = -Q_1^I|0\rangle$, also $Q_1^I|0\rangle = 0$ und damit auch $Q_2^I|0\rangle = 0$. Da die Superladungen die Generatoren der Supersymmetrie sind, ist nach (4.3) die

Supersymmetrie also genau dann ungebrochen, d.h. die Vakua sind genau dann supersymmetrisch, wenn der Grundzustand die Energie Null hat. Anders ausgedrückt: Vakua mit einer Energie größer als Null brechen notwendigerweise die Supersymmetrie. Mit denselben Methoden kann man das folgende No-go-Theorem beweisen: Es ist keine Symmetriebrechung möglich, die einen Teil der Supersymmetrie erhält [34]. Gäbe es nämlich ein Vakuum, das invariant ist unter einer der Superladungen, so wäre $\langle 0|H|0\rangle = 0$. Da (4.22) aber für jede der Superladungen gilt, wäre das Vakuum dann auch invariant unter allen weiteren Superladungen, d.h die Supersymmetrie wäre ungebrochen. Wie alle No-go-Theoreme basiert jedoch auch dieses auf gewissen Annahmen, die in physikalisch relevanten Szenarien nicht erfüllt sein müssen. So ist es tatsächlich möglich, globale Supersymmetrie partiell zu brechen und in bestimmten Situationen sogar derart, daß der Grundzustand eine Energie größer Null hat. Der dabei auftretende vermeintliche Widerspruch zum obigen Beweis läßt sich wie folgt auflösen. Der Beweis macht explizit von der Existenz der Superladungen Gebrauch, welche nach spontaner Symmetriebrechung nicht mehr notwendigerweise existieren. Stattdessen kann die Supersymmetrie nur als Superstrom gegeben sein, dessen Nullkomponente nicht mehr zu einer Superladung integriert werden kann. (I.a. gilt $Q_\alpha = \int d^2\mathbf{x} J^0_\alpha$, wobei $\partial_m J^m_\alpha = 0$.)

Es herrscht eine gewisse Konfusion über die Frage, ob dieser Beweis so auch für lokale Supersymmetrie gilt. Sollte dem so sein, so kann man ihn aber dadurch umgehen, daß bei kovariant quantisierter Supergravitation der Hilbertraum nicht mehr positiv-definit ist, worauf der Beweis aufbaute. (Für weitere Details siehe [3].) Auch wenn im Falle lokaler Supersymmetrie partielle Brechung nicht von vornherein ausgeschlossen ist, existiert trotzdem ein No-go-Theorem, das die partielle $N = 2 \rightarrow N = 1$ Brechung von Supergravitation, die uns im nächsten Abschnitt im Fall $D = 3$ beschäftigen wird, verbietet [33]. Wie auch immer, alle diese Theoreme sind falsch [34], und es ist daher interessant zu untersuchen, wie eine solche Brechung realisiert wird.

Wir können nun die Lorentzinvarianz des Vakuums benutzen, um Kriterien für die Vakuumerwartungswerte der Supersymmetrie-Variationen bei ungebrochener Supersymmetrie zu finden. Es ist nämlich

$$\langle \psi_\alpha \rangle = \langle A_\mu \rangle = \langle \partial_\mu \phi \rangle = ... = 0 \tag{4.24}$$

für alle Felder, die mindestens einen Vektor- oder Spinorindex tragen, d.h sich nichttrivial unter der Lorentzgruppe transformieren. Da Supersymmetrie-Variationen stets von der Form

$$\begin{aligned} \delta(\text{Fermionen}) &= \text{Bosonen}\ , \\ \delta(\text{Bosonen}) &= \text{Fermionen} \end{aligned} \tag{4.25}$$

sind, verschwindet der Vakuumerwartungswert der Variationen bosonischer Felder notwendigerweise. Als einzige Bedingung an ungebrochene Supersymmetrie verbleibt also die Forderung verschwindender Variation der fermionischen Felder.

Abschließend werden wir den Super-Higgs-Mechanismus einführen. Dieser ist einfach das Analogon für lokale Supersymmetrie, in der ein masseloses Fermion ("Goldstino") auftaucht, das die Rolle des Goldstonebosons übernimmt, und mittels der Supersymmetrie wegtransformiert werden kann. Der fermionische Freiheitsgrad des Goldstinos wird dann in dieser Eichung an das Gravitino abgegeben, und dieses wird massiv. In drei Dimensionen stellt sich die Situation wie folgt dar. Das Gravitinofeld ist zunächst rein topologisch. Durch die spontane Symmetriebrechung kann dieses nun aber massiv, d.h. insbesondere dynamisch werden. Die Situation scheint analog zu der Variante des topologischen Higgs-Mechanismus, bei der zum nichtdynamischen Chern-Simons-Term ein reiner Massenterm addiert wird, wodurch das Vektorfeld propagierend wird. Die Lagrangedichte sei in der Eichung, in der das Goldstino nicht mehr vorhanden ist, etwa von der Form (vgl. (3.6) und (3.27))

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} i\varepsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\rho + \frac{1}{2} m\overline{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu}\psi_\nu, \tag{4.26}$$

dann ergibt sich die Bewegungsgleichung zu

$$0 = i\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_\rho - m\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu. \tag{4.27}$$

Wendet man jetzt in Analogie zu (4.11) von links den Operator $-(i\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}\partial^\lambda + m\gamma_{\mu\sigma})$ an, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= -(i\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}\partial^\lambda + m\gamma_{\mu\sigma})(i\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_\rho - m\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu) \\ &= (\delta^\nu_\lambda\delta^\rho_\sigma - \delta^\rho_\lambda\delta^\nu_\sigma)\partial^\lambda\partial_\nu\psi_\rho + im\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\psi_\nu - im\varepsilon^{\mu\nu\rho}\gamma_{\mu\sigma}\partial_\nu\psi_\rho + m^2\gamma_{\mu\sigma}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu \\ &= \Box\psi_\sigma - \partial_\sigma(\partial\cdot\psi) + m^2\gamma_{\mu\sigma}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu + im(\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\psi_\nu - \varepsilon^{\mu\nu\rho}\gamma_{\mu\sigma}\partial_\nu\psi_\rho). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nutzt man nun die Identität (A.70) so wird dies zu

$$0 = \left(\Box + (\frac{m}{2})^2\right)\psi_\sigma - \partial_\sigma(\partial\cdot\psi) + (\frac{m}{2})^2\gamma_\sigma\gamma^\nu\psi_\nu + im(\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\psi_\nu - \varepsilon^{\mu\nu\rho}\gamma_{\mu\sigma}\partial_\nu\psi_\rho). \tag{4.29}$$

Das Gravitinofeld ist also dynamisch geworden, mit der Masse $\frac{m}{2}$. Die Analogie zwischen dem topologischen Higgs-Mechanismus von Vektorfeldern und dem des Super-Higgs-Mechanismus eines Rarita-Schwinger-Feldes scheint eine vollständige zu sein, wenn man folgende Identifikation vornimmt:

$$\begin{aligned} A_\mu &\longleftrightarrow \psi_\mu \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \text{ (Chern-Simons)} &\longleftrightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\rho \text{ (Rarita-Schwinger)} \\ g^{\mu\nu} &\longleftrightarrow \gamma^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dieses Phänomen sollte man also zweckmäßigerweise als topologischen Super-Higgs-Mechanismus bezeichnen, denn (4.30) stellt aus folgenden Gründen nicht nur eine formale Analogie dar: Wie im Falle der Eichvektorfelder existiert auch eine topologisch massive Erweiterung des Rarita-Schwinger-Feldes [29], bei der die Wirkung um einen Term zweiter Ordnung in den Ableitungen ergänzt wird. Dieser ist das Analogon des Yang-Mills-Terms in der ersten Formulierung massiver Eichtheorie. Andererseits ist diese topologisch massive Wirkung des Rarita-Schwinger-Feldes im selben Sinne äquivalent zu der mit einem gewöhnlichen Massenterm in (4.26), wie in Abschnitt 4.1.1 die zwei Beschreibungen massiver Vektorfelder äquivalent waren: Beide lassen sich aus einer gemeinsamen Wirkung durch Variation unterschiedlicher Felder gewinnen [30].

4.2 Geometrische Bedingungen für $N = 1$ Vakua

4.2.1 Geeichte Peccei-Quinn-Isometrien

Wir werden nun ein spezielles Modell für spontane $N = 2 \to N = 1$ Brechung von Supergravitation untersuchen, das in [6] im Zusammenhang mit der Calabi-Yau-Kompaktifizierung von M-Theorie auf $D = 3$ bei eingeschalteten Flüssen gefunden wurde. Diese Flüsse korrespondieren in der niederdimensionalen Supergravitationstheorie zu den geeichten Isometrien, die wir im letzten Kapitel eingeführt haben. Hier werden wir sogenannte Peccei-Quinn-Isometrien behandeln. Wir beginnen also mit einer $N = 2$ Supergravitation in $D = 3$ mit Skalarfeldern ϕ^i und holomorphen Killing-Vektorfeldern X^i und erhalten im geeichten Fall wie in 3.3.2 die bosonische Lagrangedichte

$$e^{-1}\mathcal{L} = \frac{1}{2}R - g_{i\bar{j}}\mathcal{D}_\mu\phi^i\mathcal{D}^\mu\bar{\phi}^{\bar{j}} - \frac{1}{4}g\Theta^{AB}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu_A F^{\nu\rho}_B + V. \tag{4.31}$$

Aufgrund der im Anhang A erklärten Dualität zwischen Vektoren und Skalaren haben wir anfänglich eine Freiheit hinsichtlich der Wahl der Multipletts: Wir können die Theorie durch Vektormultipletts formulieren oder aber auch durch skalare Multipletts, wenn die Vektorfelder in Skalarfelder dualisiert werden. Eine Redualisierung der Skalarfelder ist nach der Eichung der Isometrien, d.h. nach Einführung neuer Vektorfelder, in welchem die Dualitätsrelation zu

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\nu\rho}_A = -4\mathrm{Re}[g_{i\bar{\imath}}X^{\bar{\imath}}_A\mathcal{D}_\mu\phi^i] + \text{Fermionen}. \tag{4.32}$$

wird, i.a. nicht mehr möglich, sondern nur in speziellen Beispielen, wie den Peccei-Quinn-Isometrien. Zur Erläuterung derselben zerlegen wir die komplexen Skalarfelder wie folgt in zwei Anteile: $\phi^i = (\phi^a, \phi^A)$ und definieren die reellen Komponenten $\varphi^A = \mathrm{Re}\phi^A$ und $\hat{\varphi}^A = \mathrm{Im}\phi^A$. Wir nehmen nun an, daß das Kähler-Potential nicht von den $\hat{\varphi}^A$ abhängt: $K = K(\phi^a, \varphi^A)$.[4] Damit wird dann die Metrik zu

$$g_{i\bar{j}} = \begin{pmatrix} g_{a\bar{b}} & g_{a\bar{B}} \\ g_{A\bar{b}} & g_{A\bar{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{a\bar{b}} & g_{aB} \\ g_{A\bar{b}} & g_{AB} \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

[4] Genauer müßte man $K = K(\phi^a, \overline{\phi}^{\overline{a}}, \phi^A + \overline{\phi}^A)$ schreiben, da K weiterhin von $\overline{\phi}^{\overline{a}}$ in dem Sinne abhängt, daß i.a. $\partial_{\overline{a}}K \neq 0$.

wobei $g_{a\bar{b}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K$, $g_{aA} = \frac{1}{2}\partial_a \partial_A K$ und $g_{AB} = \frac{1}{4}\partial_A \partial_B K =: \frac{1}{2}G_{AB}$. Hierbei bezeichnet ∂_A eine reelle Ableitung, so daß in (4.33) an entsprechender Stelle ungequerte Indizes auftauchen.[5] Die Geometrie ist damit invariant unter konstanten Verschiebungen der Felder $\hat{\varphi}^A$. Die diese erzeugenden Killing-Vektorfelder sind dann bezüglich der Koordinaten ϕ^i von der Form:

$$X^i_B = (0, i\delta^A_B). \tag{4.34}$$

Diese Isometrien kann man nun eichen und die dynamischen $\hat{\varphi}^A$ trotzdem in die Vektorfelder redualisieren, wodurch die $\hat{\varphi}^A$ aus der Wirkung eliminiert werden und die zuvor nichtdynamischen Vektorfelder kinetische Terme erhalten, nämlich einen Yang-Mills-Term. Dies sieht man wie folgt. Die kovariante Ableitung unterscheidet sich nur für die $\hat{\varphi}^A$ von der partiellen und ist wegen (4.34) und (3.21) von der Form

$$\mathcal{D}_\mu \hat{\varphi}^A = \partial_\mu \hat{\varphi}^A + g\Theta^{AB} A_{B\mu}. \tag{4.35}$$

Die Dualitätsrelation (4.32) ist hiermit

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho}_A = -2G_{AB}(\partial_\mu \hat{\varphi}^B + g\Theta^{BC} A_{C\mu}) - 4\mathrm{Im}[g_{aA}\partial_\mu \phi^a] + \text{Fermionen}, \tag{4.36}$$

und wird damit durch Kontraktion mit $\varepsilon^{\mu\nu\beta}$ zu

$$F_{A\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho}(G_{AB}(\partial^\rho \hat{\varphi}^B + g\Theta^{BC} A^\rho_C) + 2\mathrm{Im}[g_{aA}\partial^\rho \phi^a]) + \text{Fermionen}. \tag{4.37}$$

Wir nehmen nun an, daß die Metrik G_{AB} eine Inverse hat und bezeichnen diese mit G^{AB}. In diesem Fall kann man also $\mathcal{D}^\rho \hat{\varphi}^B$ durch $F_{A\mu\nu}$ ausdrücken und damit das propagierende Feld $\hat{\varphi}^A$ eliminieren, wodurch das zuvor nichtpropagierende Vektorfeld dynamisch wird, und zwar gerade in Form eines Yang-Mills-Terms. Anstatt der φ^A werden wir noch neue reelle Koordinaten einführen: $M_A = \frac{1}{2}\partial_A K$, wodurch (4.31) zu

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L}_g =& \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}G^{AB}\partial_\mu M_A \partial^\mu M_B + \frac{1}{4}G^{AB}F^{\mu\nu}_A F_{B\mu\nu} - G_{a\bar{b}}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \overline{\phi}^{\bar{b}} \\ &+ \varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu}_A \mathrm{Im}[G^{AB} g_{aB}\partial^\rho \phi^a] + \frac{1}{4}g\Theta^{AB}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu_A F^{\nu\rho}_B + V \end{aligned} \tag{4.38}$$

wird [6]. Hierbei wurde der Einfachheit halber die Kähler-Metrik umdefiniert, so daß gilt:

$$\begin{aligned} G_{a\bar{b}} = (G^{a\bar{b}})^{-1} :=& g_{a\bar{b}} - 2g_{aA}G^{AB}g_{\bar{b}B} = (g^{a\bar{b}})^{-1} \text{ und} \\ G^{a\bar{b}} =& g^{a\bar{b}}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Das skalare Potential ist nun gegeben durch

$$V = g^2(4g^{i\bar{\imath}}\partial_i T \partial_{\bar{\imath}} T - 4T^2 + e^K(\frac{1}{4}g^{i\bar{\imath}}D_i W D_{\bar{\imath}}\overline{W} - |W|^2)). \tag{4.40}$$

[5] In den komplexen oder Wirtinger-Ableitungen kommt ein Faktor $\frac{1}{2}$ vor, daher ist hier ein entsprechender.

Hier ist $T = \mathcal{P}_A \Theta^{AB} \mathcal{P}_B$, wobei $\mathcal{P}_A$ die in (3.24) eingeführte Impulsabbildung bezeichnet. Zum Killing-Vektorfeld (4.34) ergibt sich diese also zu

$$\mathcal{P}_A = \frac{1}{4} \partial_A K. \tag{4.41}$$

Das Superpotential ist aus folgenden Gründen nur eine Funktion der ϕ^a, nicht jedoch der M_A: Wegen (3.40), d.h. $X^i_A D_i W \sim 2iWM_A$ und der Form des Killing-Vektorfeldes (4.34) gilt

$$D_A W \sim W M_A \sim (\partial_A K) W, \tag{4.42}$$

also $\partial_A W = 0$. In den neuen, unabhängigen Koordinaten (ϕ^a, M_A) lautet das Potential

$$\begin{aligned} g^{-2} V =& \frac{1}{2} M_A \Theta^{AC} G_{CD} \Theta^{DB} M_B - \frac{1}{4} (M_A \Theta^{AB} M_B)^2 \\ &+ \frac{1}{4} e^K G^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \overline{W} - e^K (1 - \frac{1}{2} M_A G^{AB} M_B) |W|^2. \end{aligned} \tag{4.43}$$

4.2.2 Bedingungen für ein $N = 1$ Minkowski-Vakuum

In dem redualisierten Bild des letzten Abschnitts ist das Vektorfeld dynamisch und damit nicht mehr im Gravitationsmultiplett; das Spektrum besteht nun aus masselosen Multipletts der Form

$$N = 2: \ (e^a_\mu, \psi^1_\mu, \psi^2_\mu) + (A_{A\mu}, \lambda^1_A, \lambda^2_A, M_A) + (\phi^1_a, \chi^1_a, \phi^2_a, \chi^2_a), \tag{4.44}$$

wobei hier $(\phi^1_a, \chi^1_a, \phi^2_a, \chi^2_a)$ generisch für eine beliebige Anzahl ungeeichter skalarer Multipletts steht. Wir werden nun die spontane Brechung auf $N = 1$ untersuchen, insbesondere wie sich die Multipletts reorganisieren und welche Felder hierbei massiv werden. Hierbei werden wir finden, daß eines der Gravitinos massiv wird, mit einer Masse, die wir als Skala der Symmetriebrechung auffassen können.

Es gilt nun die geometrischen Bedingungen eines $N = 1$ Grundzustandes zu untersuchen und die Frage zu klären, ob sich diese erfüllen lassen. Aus der oben angegebenen SUSY-Variation der Gravitinos (3.28) folgt für diese im Vakuumerwartungswert

$$\langle \delta \psi^I_\mu \rangle = \langle \nabla_\mu \epsilon^I + i g A_1^{IJ} \gamma_\mu \epsilon^J \rangle, \tag{4.45}$$

wobei $I = 1, 2$ die beiden Superladungen bezeichnet und wir Terme mit verschwindendem Vakuumerwartungswert weggelassen haben. Die Bedingung für ungebrochene Supersymmetrie ist nach 4.1.2

$$\langle \delta \psi^I_\mu \rangle = 0, \tag{4.46}$$

was eine Killing-Spinor-Gleichung für ϵ^I darstellt. Eine solche läßt sich durch einen Produktansatz lösen, bei dem man den Killingspinor als Tensorprodukt des Grundzustandskillingspinors, d.h. eines drei-dimensionalen AdS/Minkowski-Spinors, mit dem Eigenvektor der Matrix A_1 erhält: $\epsilon^I := \epsilon_0 u^I$ mit $A_1^{IJ} u^J = \lambda u^I$. Setzt man dies in (4.46) ein, so erhält man

$$\nabla_\nu \epsilon_0 + ig\lambda\gamma_\nu\epsilon_0 = 0, \tag{4.47}$$

wobei ∇_ν die kovariante Ableitung bezüglich der AdS- oder Minkowski-Raumzeit bezeichnet. Wendet man abermals ∇_μ an, so folgt

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\epsilon_0 + ig\lambda\gamma_\nu\nabla_\mu\epsilon_0 = \nabla_\mu\nabla_\nu\epsilon_0 + g^2\lambda^2\gamma_\nu\gamma_\mu\epsilon_0 = 0. \tag{4.48}$$

Vertauscht man hier die Indizes und subtrahiert diese von (4.48), so erhält man

$$[\nabla_\mu, \nabla_\mu]\epsilon_0 + 4ig^2\lambda^2\gamma_{\mu\nu}\epsilon_0 = 0, \tag{4.49}$$

wobei $\gamma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Andererseits gilt für den Kommutator der kovarianten Ableitungen in Spinordarstellung[6]

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\epsilon_0 = \frac{i}{2}R_{\mu\nu ab}\gamma^{ab}\epsilon_0 = \frac{i}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_0. \tag{4.50}$$

Der Riemannsche Krümmungstensor des dreidimensionalen AdS-Raumes, d.h. für $R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$ und $R = 6\Lambda$, ist aber nach (3.1) gegeben durch $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma})$, wobei Λ die kosmologische Konstante bezeichnet. Diese ist bei unserer Normierung der Wirkung gegeben durch den Wert des Potentials am Grundzustand: $\Lambda = 4V_0$.[7] Gilt $V_0 = 0$, so hat man einen Minkowski-Grundzustand, ist $V_0 < 0$, so ist der Grundzustand Anti-deSitter. Es folgt mit (4.50)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\epsilon_0 = 4iV_0\gamma_{\mu\nu}\epsilon_0, \tag{4.51}$$

d.h. mit (4.49) ist $g^2\lambda^2 = -V_0$, also

$$g|\lambda| = \sqrt{-V_0}. \tag{4.52}$$

Jeder Eigenwert λ von A_1, der diese Relation erfüllt, ist gleich dem inversen AdS-Radius (dem Radius von S^1 in $AdS_3 = S^1 \times \mathbb{R}^2$) und wird zu einer erhaltenen Supersymmetrie korrespondieren.

Um die Bedingungen für spontane Symmetriebrechung zu verstehen, berechnen wir zunächst die Eigenwerte von A_1. Diese war für $N = 2$ explizit gegeben durch (3.35)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2T & 0 \\ 0 & -2T \end{pmatrix} + e^{K/2}\begin{pmatrix} -\mathrm{Re}W & \mathrm{Im}W \\ \mathrm{Im}W & \mathrm{Re}W \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

[6] Dies verifiziert man direkt durch Einsetzen von $\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}\gamma_{ab}$ und $R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu\omega_\nu^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac}\omega_{\nu c}{}^b - \omega_\mu^{bc}\omega_{\nu c}{}^a$.

[7] Man vergleiche dies mit der üblichen Einstein-Hilbert-Wirkung bei nichtverschwindender kosmologischer Konstante.

Die Eigenwerte ergeben sich nun als Lösungen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A_1 - \lambda \mathbf{1}) &= \det \begin{pmatrix} -2T - e^{K/2}\mathrm{Re}W - \lambda & e^{K/2}\mathrm{Im}W \\ e^{K/2}\mathrm{Im}W & -2T + e^{K/2}\mathrm{Re}W - \lambda \end{pmatrix} \\ = \lambda^2 + 4T\lambda - (e^K|W|^2 - 4T^2), \end{aligned} \tag{4.54}$$

d.h. die Eigenwerte sind gegeben durch

$$\lambda_\pm = -2T \pm \sqrt{4T^2 + (e^K|W|^2 - 4T^2)} = -2T \pm e^{K/2}|W|, \tag{4.55}$$

also wegen $T = \mathcal{P}_A \Theta^{AB} \mathcal{P}_B$ und $\mathcal{P}_A = \frac{1}{4}\partial_A K = \frac{1}{2} M_A$ durch

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2} M_A \Theta^{AB} M_B \pm e^{K/2}|W|. \tag{4.56}$$

Damit folgt für die Bedingung ungebrochener Supersymmetrie (4.52) aus der expliziten Form des Potentials (4.43)

$$\begin{aligned} -g^{-2}V_0 = (\lambda_\pm)^2 =& \frac{1}{4}(M_A \Theta^{AB} M_B)^2 \mp e^{K/2}|W| M_A \Theta^{AB} M_B + e^K|W|^2 \\ =& -\frac{1}{2} M_A \Theta^{AC} G_{CD} \Theta^{DB} M_B + \frac{1}{4}(M_A \Theta^{AB} M_B)^2 \\ & - \frac{1}{4} e^K G^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \overline{W} + e^K (1 - \frac{1}{2} M_A G^{AB} M_B)|W|^2, \end{aligned} \tag{4.57}$$

also

$$\begin{aligned} \pm 2 e^{K/2} M_A \Theta^{AB} M_B |W| =& M_A \Theta^{AC} G_{CD} \Theta^{DB} M_B + e^K |W|^2 M_A G^{AB} M_B \\ & + \frac{1}{2} e^K G^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \overline{W}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Damit die volle $N = 2$ Supersymmetrie erhalten bleibt, muß diese Relation (4.58) sowohl für λ_+ als auch für λ_- erfüllt sein, d.h. für beide Vorzeichen. Es folgt, daß beide Seiten der Gleichung identisch verschwinden müssen, also

$$\Theta^{AB} M_B = 0, \; W = 0, \; D_a W = 0, \tag{4.59}$$

jeweils ausgewertet am Grundzustand. Aus den Ausdrücken für das Potential (4.43) und seine Ableitung

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial M_A}(g^{-2}V) =& \Theta^{AC} G_{CD} \Theta^{DB} M_B - (M_A \Theta^{AB} M_B) \Theta^{AC} M_C \\ & + e^K G^{AB} M_B |W|^2 + \frac{1}{2} M_A \Theta^{AC} G_{CD}{}^{,A} \Theta^{DB} M_B \\ & + \frac{1}{2} e^K M_C G^{CD,A} M_D |W|^2, \end{aligned} \tag{4.60}$$

folgt sofort Stationarität sowie das Verschwinden des Potentials am Grundzustand, d.h. das Verschwinden der kosmologischen Konstante. Als einzige weitere Bedingung an die ungebrochene Supersymmetrie verbleibt der Vakuumerwartungswert der Spin-$\frac{1}{2}$-Variationen zu prüfen. Nach (3.17) ist im Grundzustand

$$\langle \delta\chi^{iI} \rangle = -2gg^{ij} \langle A_{2j}^{JI} \rangle \epsilon^J . \tag{4.61}$$

Wir werden nun allgemein zeigen, daß diese Variation notwendigerweise im Grundzustand verschwindet, wenn dies für die Gravitinovariation (4.45) gilt. Hierzu bemerken wir, daß es für jede erhaltene Supersymmetrie wegen (4.52) und (4.61) einen gemeinsamen Eigenvektor ϵ^I von A_1 und A_2 mit

$$A_1\epsilon = \lambda\epsilon \text{ und } A_2^t\epsilon = 0 \tag{4.62}$$

gibt, wobei λ den inversen AdS Radius bezeichnet. Die quadratische Identität (3.33) wird für die Wahl (4.40) des Potentials zu

$$A_1A_1 - g^{ij}A_{2i}A_{2j}^t = -g^{-2}V \cdot \mathbf{1} \tag{4.63}$$

Gilt also $A_1\epsilon = \lambda\epsilon$, so folgt $\langle g^{ij}A_{2i}A_{2j}^t\epsilon \rangle = 0$, also nach Multiplikation von links mit ϵ^t

$$g^{ij}\epsilon^t A_{2i}A_{2j}^t\epsilon = 0. \tag{4.64}$$

Für $v_j := A_{2j}^t\epsilon$ ist also $g^{ij}v_i^t v_j = 0$ und damit aufgrund der Tatsache, daß die Riemannsche Metrik positiv-definit ist: $v_j = 0$ bzw. $A_{2j}^t\epsilon = 0$. Die zweite der Bedingungen (4.62) ist also automatisch erfüllt, wenn es die erste ist. Es genügt also, nur die Variation der Gravitinos zu berücksichtigen. Anders ausgedrückt: Jeder Eigenwert von A_1, der gleich dem inversen AdS-Radius ist, entspricht einer erhaltenen Supersymmetrie.[8]

Wir kommen nun zur Frage zurück, ob eine spontane Symmetriebrechung möglich ist, die genau $N = 1$ Supersymmetrie erhält. Hierzu muß die Beziehung (4.58) für genau ein Vorzeichen erfüllt sein. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst den Fall, daß $M_A G^{AB} M_B = 2$ gilt, in welchem der letzte Term im Potential (4.43) verschwindet, so daß das dieses positiv-definit wird:

$$\begin{aligned} g^{-2}V =& \frac{1}{2}(M_A\Theta^{AC} - 2TM_AG^{AC})G_{CD}(\Theta^{DB}M_B - 2TG^{DB}M_B) \\ &+ \frac{1}{4}e^K G^{a\bar{b}} D_aW D_{\bar{b}}\overline{W}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Man beachte, daß für diesen Fall unsere obige Forderung nach Unabhängigkeit der G_{AB} von den ϕ^a erfüllt ist. Hier ist $V_0 = 0$ also eine hinreichende Bedingung für ein globales Minimum, was wiederum äquivalent ist zu

$$\Theta^{DB}M_B - 2TG^{DB}M_B = 0 \text{ und } D_aW = 0, \tag{4.66}$$

[8] In $D = 4$ liefern beide Bedingungen (4.62) unabhängige Beschränkungen an den Grundzustand. Dies ist der eigentliche Grund dafür, daß sich $N = 2 \to N = 1$ Brechung hier nur schwer realisieren läßt.

und damit nach (4.58) zu

$$\pm 2e^{K/2} M_A \Theta^{AB} M_B |W| = M_A \Theta^{AC} G_{CD} \Theta^{DB} M_B + e^K |W|^2 M_A G^{AB} M_B. \quad (4.67)$$

Nutzt man (4.66), so erhält man für den ersten Term in (4.67) mit $T = \frac{1}{4} M_A \Theta^{AB} M_B$

$$M_A \Theta^{AC} G_{CD} 2T G^{DB} M_B = \frac{1}{2} (M_A \Theta^{AB} M_B)^2, \quad (4.68)$$

also

$$\pm 2e^{K/2} M_A \Theta^{AB} M_B |W| = \frac{1}{2} (M_A \Theta^{AB} M_B)^2 + 2e^K |W|^2, \quad (4.69)$$

und damit[9]

$$\pm 2e^{K/2} |W| = M_A \Theta^{AB} M_B \quad (4.70)$$

für genau eines der beiden Vorzeichen. Die beiden Bedingungen (4.66) und (4.70) sind notwendige und hinreichende Bedingung für ein Vakuum mit $N = 1$ Supersymmetrie und verschwindender kosmologischer Konstante.

4.2.3 Das Massenspektrum

Als nächstes kommen wir zu der Frage zurück, welche Felder bei der spontanen $N = 2 \to N = 1$ Brechung massiv werden und wie sich die Multipletts bei der Brechung reorganisieren. Zur Beantwortung derselben werden wir ausnutzen, daß man innerhalb der $N = 1$ Multipletts immer noch eine Massenentartung hat, die es einem ermöglicht, die Elemente der Multipletts zu identifizieren. Für $N = 2$ Supergravitation besteht das masselose Gravitonmultiplett $(e^a_\mu, \psi^{1,2}_\mu)$ aus einem Graviton und zwei Gravitinos. Wie wir in 4.2.2 gesehen haben, entspricht jeder Eigenwert von A_1, der gleich dem inversen AdS-Radius ist, einer ungebrochenen Supersymmetrie. Da A_1 die Gravitinomassenmatrix ist (siehe (3.27)), ist im Fall verschwindender kosmologischer Konstante $N = 2$ Supersymmetrie also genau dann ungebrochen, wenn die Gravitinos masselos bleiben. Wird die Supersymmetrie auf $N = 1$ gebrochen, so ist genau einer der Eigenwerte von A_1 von Null verschieden, d.h. genau eines der beiden Gravitinos wird massiv. Es wird also ein Super-Higgs-Mechanismus ablaufen, dessen Details wir im folgenden behandeln. Ist in (4.70) etwa $M_A \Theta^{AB} M_B = -2e^{K/2}|W|$, so ist mit (4.56) $\lambda_- = 0$ und $\lambda_+ = 2e^{K/2}|W|$, d.h. mit (3.27) erwarten wir für die Masse des Gravitinos $m_\psi = g e^{K/2}|W|$. Die Multipletts spalten sich also in ein $N = 1$ masseloses Gravitonmultiplett und ein massives $\frac{3}{2}$-Multiplett auf, d.h. die Massenentartung aufgrund der Supersymmetrie wird aufgehoben. Nach der Brechung erhält man also ein Gravitonmultiplett der Form (e^a_μ, ψ^1_μ) und eines, welches das massive Gravitino enthält, zusammen mit einem bosonischen Partner, der dieselbe Masse hat.

[9]Setzt man $x := 2e^{K/2}|W|$ und $y := M_A \Theta^{AB} M_B$, so folgt aus (4.69) $\pm xy = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2$, also $x^2 \mp 2xy + y^2 = 0$, also $(x \mp y)^2 = 0$ und damit $x = \pm y$, d.h. (4.70).

Der Super-Higgs-Mechanismus

Wir untersuchen nun den detaillierten Ablauf des Super-Higgs-Mechanismus und werden dabei insbesondere das Goldstonefermion identifizieren. Wir bemerken zunächst, daß in den Yukawa-Kopplungstermen in der Wirkung (3.27) die χ^{jJ} über Terme der Form $\overline{\psi}_\mu \gamma^\mu \chi$ mit den Gravitinos wechselwirken, so daß z.B. die Massenmatrizen der fermionischen Felder χ^i nicht so einfach abgelesen werden können. Wie in [8] ausgeführt, haben solche Mischungen jedoch einen bedeutenden physikalischen Ursprung, und bevor wir untersuchen, wie sich die auftretenden Ausdrücke explizit diagonalisieren lassen, werden wir diesen durch folgende Überlegung erläutern. Wir führen ein neues Feld $\eta^I = A_{2j}^{IJ} \chi^{jJ}$ ein, dessen Supersymmetrievariationen sich im Vakuumerwartungswert wegen (3.28) wie folgt verhalten:

$$\langle \delta \eta^I \rangle = -2g \langle A_{2j}^{IJ} g^{jk} A_{2k}^{KJ} \epsilon^K \rangle. \tag{4.71}$$

Wegen der quadratischen Identität (4.63) folgt dann aufgrund der verschwindenden kosmologischen Konstante

$$\begin{aligned} \langle \delta \eta^I \rangle &= -2g \langle g^{jk} A_{2j} A_{2k}^t \rangle \epsilon \\ &= -2g \langle A_1 A_1 \rangle \epsilon \\ &= -8g^{-1} m_\psi^2 \epsilon, \end{aligned} \tag{4.72}$$

wobei angenommen wurde, daß ϵ einen Eigenvektor von A_1 zu dem nichtverschwindenden Eigenwert enthält, der am Grundzustand also zu $2g^{-1} m_\psi$ wird. Betrachtet man stattdessen die Variation relativ zum Nulleigenvektor, so wird entsprechend

$$\langle \delta \eta^I \rangle = 0. \tag{4.73}$$

Man sieht nochmals, daß die Supergravitation spontan auf $N = 1$ gebrochen ist, da es genau eine Linearkombination der ϵ^I gibt, bezüglich derer die Fermionenvariationen im Vakuumerwartungswert verschwinden. Außerdem folgt aus (4.72), daß die Supergravitation bei einer typischen Skala gebrochen ist, die mit der Gravitinomasse identifiziert werden kann.

Daß sich η so wie oben definiert mit einer derartigen konstanten Verschiebung transformiert, zeigt, daß es sich hierbei um das Goldstonefermion handelt. Wie in der spontanen Symmetriebrechung konventioneller Eichtheorien kann dieses nämlich über ein Analogon des Higgs-Mechanismus wegtransformiert werden, was direkt mit dieser konstanten Verschiebung zusammenhängt. Wählt man den spinoriellen Transformationsparameter zu

$$\epsilon^I := \frac{g}{8m_\psi^2} \eta^I, \tag{4.74}$$

so transformiert sich das Goldstonefermion in einer infinitesimalen Transformation wegen (4.72) gemäß

$$\eta^I \longrightarrow \eta^I + \delta \eta^I = \eta^I - 8g^{-1} m_\psi^2 \frac{g}{8m_\psi^2} \eta^I = 0. \tag{4.75}$$

Das Goldstonefermion verschwindet in dieser "Eichung" also am Grundzustand, so daß nach Anwendung der korrespondierenden Transformation (4.74) auf die Wirkung (3.27) die Kopplungsterme im Grundzustand beseitigt sind und die übrigen Massen abgelesen werden können. Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Transformation zur "Beseitigung" des Goldstonefermions nur möglich war, weil lokale Supersymmetrie vorliegt, denn ϵ^I ist als zu η^I proportionaler Spinor raumzeitabhängig. Da der Index I nur zur Vereinfachung der Notation eingeführt worden war, haben wir also genau ein reelles Fermion als Goldstonefermion.

Man kann nun diese Transformation etwa des Gravitinos explizit durchführen, um den Kopplungsterm zu beseitigen. Hierzu werden wir ausnutzen, daß die Matrizen A_1 und A_2 in der Kopplung einen gemeinsamen Eigenvektor haben, nämlich den gemeinsamen Null-Eigenvektor der erhaltenen Supersymmetrie. Es existiert eine orthogonale Matrix $S \in SO(2)$, so daß

$$SA_1S^t = 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_\psi \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

Transformiert man die Gravitinos also gemäß $\hat{\psi}_\mu := S\psi_\mu$, so wird (3.27) in Matrixnotation zu

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L}_Y &= \frac{1}{2}g\overline{\hat{\psi}}^t_\mu SA_1\gamma^{\mu\nu}S^t\hat{\psi}_\nu + g\overline{\hat{\psi}}^t_\mu S\gamma^\mu\eta + \frac{1}{2}gA_{3ij}\overline{\chi}^i\chi^j \\ &= m_\psi\overline{\hat{\psi}}^2_\mu\gamma^{\mu\nu}\hat{\psi}^2_\nu + g\overline{\hat{\psi}}^2_\mu\gamma^\mu\hat{\eta} + \frac{1}{2}g\overline{\chi}^iA_{3ij}\chi^j, \end{aligned} \tag{4.77}$$

wobei $\hat{\eta} := S\eta$ nun den physikalischen Anteil des Goldstonefermions bezeichnet. (4.72) gilt nun bezüglich des Transformationsparameters $\hat{\epsilon} = S\epsilon$, ebenso für die Supersymmetrietransformation (3.28) des transformierten Gravitinos, wobei wir im folgenden $\hat{}$ der Einfachheit halber weglassen werden:

$$\delta_\epsilon\psi^2_\mu = \partial_\mu\epsilon + 2m_\psi\gamma_\mu\epsilon = \frac{g}{8m_\psi^2}\partial_\mu\eta + \frac{g}{4m_\psi}\gamma_\mu\eta. \tag{4.78}$$

Die Supersymmetrietransformation der Yukawa-Kopplung (4.77) wird dann zu

$$\begin{aligned} e^{-1}\delta\mathcal{L}_Y =& m_\psi(\delta\bar{\psi}^2_\mu)\gamma^{\mu\nu}\psi^2_\nu + m_\psi\bar{\psi}^2_\mu\gamma^{\mu\nu}(\delta\psi^2_\nu) + g(\delta\bar{\psi}^2_\mu)\gamma^\mu\eta \\ &+ g\bar{\psi}^2_\mu\gamma^\mu\delta\eta + \frac{1}{2}g\delta(\overline{\chi}^iA_{3ij}\chi^j) \\ =& \frac{g}{4}\left(\frac{1}{2m_\psi}\partial_\mu\overline{\eta} + \overline{\eta}\gamma_\mu\right)\gamma^{\mu\nu}\psi^2_\nu + \frac{g}{4}\bar{\psi}^2_\mu\gamma^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2m_\psi}\partial_\nu\eta + \gamma_\nu\eta\right) \\ &+ \frac{g^2}{4m_\psi}\left(\frac{1}{2m_\psi}\partial_\mu\overline{\eta} + \overline{\eta}\gamma_\mu\right)\gamma^\mu\eta + g\bar{\psi}^2_\mu\gamma^\mu\delta\eta + \frac{1}{2}g\delta(\overline{\chi}^iA_{3ij}\chi^j) \\ =& \frac{g}{4}i\overline{\eta}\gamma^\mu\psi^2_\mu + \frac{g}{4}i\bar{\psi}^2_\mu\gamma^\mu\eta + \frac{g}{8m_\psi}\partial_\mu\overline{\eta}\gamma^{\mu\nu}\psi^2_\nu + \frac{g}{8m_\psi}\bar{\psi}^2_\mu\gamma^{\mu\nu}\partial_\nu\eta \\ &+ \frac{g^2}{8m_\psi^2}\partial_\mu\overline{\eta}\gamma^\mu\eta + \frac{3}{4m_\psi}g^2\overline{\eta}\eta + g\bar{\psi}^2_\mu\gamma^\mu\delta\eta + \frac{1}{2}\delta(\overline{\chi}^iA_{3ij}\chi^j). \end{aligned} \tag{4.79}$$

Hierbei wurden die Identitäten (A.70) und (A.73) genutzt. Mit den Relationen (A.71) und (A.75) folgt ferner, daß sich die Terme in der vorletzten Zeile von (4.79) gegen die korrespondierenden kinetischen Terme wegheben. Insgesamt reduziert sich damit die Supersymmetrievariation von $\mathcal{L}_Y$ auf

$$e^{-1}\delta\mathcal{L}_Y = \frac{g}{8m_\psi^2}\partial_\mu\overline{\eta}\gamma^\mu\eta + \frac{3}{4m_\psi}g^2\overline{\eta}\eta + g\bar{\psi}_\mu^2\gamma^\mu\delta\eta + \frac{1}{2}\delta(\overline{\chi}^i A_{3ij}\chi^j). \tag{4.80}$$

Die Supersymmetrietransformation der Yukawa-Kopplung (4.77) ist also mit (4.75)

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L}_Y \longrightarrow e^{-1}(\mathcal{L}_Y + \delta\mathcal{L}_Y) &= m_\psi\overline{\psi}_\mu^2\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu^2 + g\bar{\psi}_\mu^2\gamma^\mu(\eta + \delta\eta) + ... \\ &= m_\psi\overline{\psi}_\mu^2\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu^2 + ..., \end{aligned} \tag{4.81}$$

wobei Terme, die nur von den χ^i abhängen, weggelassen wurden. Die Wirkung enthält in dieser Eichung also nur Terme quadratisch in den Gravitinos und keine Kopplungen mehr mit den χ^i. Die physikalische Masse der Gravitinos ergibt sich also mit dem Rarita-Schwinger-Term in (3.15) und mit (4.29) tatsächlich zu m_ψ, wir waren also berechtigt, diese als Gravitinomasse zu bezeichnen. Ebenso kann man die Massen der fermionischen χ^i ablesen. Diese ergeben sich aber auch aufgrund der $N = 1$ Massenentartung sofort aus den bosonischen Massen, die wir im nächsten Abschnitt berechnen werden.

Bosonisches Massenspektrum und der Higgs-Mechanismus

Wir werden nun zunächst die Massenmatrizen der Skalarfelder, d.h. die Grundzustandswerte der Hessematrix des Potentials, bestimmen, um festzustellen, welche Felder bei der Brechung massiv geworden sind. Anschließend werden wir die Massen der Vektorfelder bestimmen. Zur Berechnung des Teils $M_{AB}^2 = \langle\frac{\partial^2 V}{\partial M_A\partial M_B}\rangle$ der Massenmatrix benutzen wir (4.60):

$$\begin{aligned} g^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial M_A\partial M_B} &= \Theta^{AC}G_{CD}\Theta^{DB} - 2\Theta^{BD}M_D\Theta^{AC}M_C - (M_A\Theta^{AB}M_B)\Theta^{AB} \\ &+ \Theta^{AC}G_{CD}{}^{,B}\Theta^{DE}M_E + \Theta^{BC}G_{CD}{}^{,A}\Theta^{DE}M_E + \frac{1}{2}M_E\Theta^{EC}G_{CD}{}^{,AB}\Theta^{DF}M_F \\ &+ e^K|W|^2[G^{AB} + (G^{CA,B} + G^{CB,A})M_C + \frac{1}{2}M_C G^{CD,AB}M_D]. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Wir können diesen Ausdruck vereinfachen, indem wir $M_A G^{AB} M_B = 2$ nutzen und diesen differenzieren:

$$0 = 2G^{ED}M_D + M_C G^{CD,E}M_D. \tag{4.83}$$

Nochmaliges Differenzieren liefert:

$$-\frac{1}{2}M_C G^{CD,AB}M_D = G^{AB} + (G^{CA,B} + G^{CB,A})M_C. \tag{4.84}$$

Der Term in der letzten Zeile der Ableitung des Potentials verschwindet also:[10]

$$g^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial M_A \partial M_B} = \Theta^{AC}G_{CD}\Theta^{DB} - 2\Theta^{BD}M_D\Theta^{AC}M_C - (M_A\Theta^{AB}M_B)\Theta^{AB} \\ + \Theta^{AC}G_{CD}{}^{,B}\Theta^{DE}M_E + \Theta^{BC}G_{CD}{}^{,A}\Theta^{DE}M_E + \frac{1}{2}M_E\Theta^{EC}G_{CD}{}^{,AB}\Theta^{DF}M_F. \tag{4.85}$$

Um die physikalischen Konsequenzen zu verstehen, werden wir der Einfachheit halber zunächst den Fall behandeln, daß wir eine beliebige Anzahl Felder ϕ^a haben, jedoch nur eines der M_A. (Geometrisch heißt dies, daß es genau eine Peccei-Quinn-Isometrie auf der Skalarmannigfaltigkeit gibt.) Die Bedingung $M_AG^{AB}M_B = 2$ wird hier zu $G^{-1}M^2 = 2$, d.h. $G(M) = \frac{1}{2}M^2$. In diesem Fall ist $\frac{1}{2}M_A\Theta^{AC}G_{CD}\Theta^{DB}M_B - \frac{1}{4}(M_A\Theta^{AB}M_B)^2 = \frac{1}{2}\Theta^2M^2G(M) - \frac{1}{4}\Theta^2M^4 = 0$, im Potential (4.43) verschwinden also alle M abhängigen Terme, d.h. es gilt identisch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial M^2} = 0. \tag{4.86}$$

Es folgt, daß das Feld M bei der spontanen Symmetriebrechung masselos bleibt. Man könnte vermuten, daß dies auch noch gilt, wenn man mehrere Felder M_A im Spektrum hat. Es ist jedoch zu beachten, daß in diesem Fall die Funktionen $G_{AB}(M_C)$ nicht mehr eindeutig durch die Relation $M_AG^{AB}M_B = 2$ bestimmt sind, wie dies in obigem Beispiel ausgenutzt wurde. Wir werden nun aber zeigen, daß die Felder i.a. nicht masselos bleiben, indem wir den einfachsten nichttrivialen Fall mit $A = 1, 2$ untersuchen. In diesem ist die Metrik notwendigerweise von der Form

$$G_{AB} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2}\begin{pmatrix} \alpha M_1^2 & \beta M_1 M_2 \\ \beta M_1 M_2 & \gamma M_2^2 \end{pmatrix}, \tag{4.87}$$

wobei

$$\alpha\gamma - \beta^2 > 0 \text{ und } \alpha - 2\beta + \gamma = 2, \tag{4.88}$$

denn dann gilt für die inverse Metrik

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{M_1^2} & -\frac{\beta}{M_1M_2} \\ -\frac{\beta}{M_1M_2} & \frac{\alpha}{M_2^2} \end{pmatrix}, \tag{4.89}$$

d.h. es gilt wegen (4.88)

$$M_AG^{AB}M_B = G^{11}M_1^2 + 2G^{12}M_1M_2 + G^{22}M_2^2 = 2. \tag{4.90}$$

Schon im Fall $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$ bleiben nicht alle M_A masselos, was wir im folgenden zeigen werden. Das Potential reduziert sich in diesem Fall auf

$$g^{-2}V = \frac{1}{4}[(\Theta^{11})^2M_1^4 + (\Theta^{22})^2M_2^4] - \frac{1}{2}\Theta^{11}\Theta^{22}M_1^2M_2^2 + \frac{1}{4}e^KG^{a\bar{b}}D_aWD_{\bar{b}}\overline{W}. \tag{4.91}$$

[10] Dies folgt natürlich auch direkt aus der Tatsache, daß im positiv-definiten Fall $M_AG^{AB}M_B = 2$ Terme proportional zu $e^K|W|^2$ nicht mehr im Potential (4.43) auftauchen. Die vorangegangene Rechnung kann als Konsistenzcheck aufgefaßt werden.

Die Massenmatrix ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} g^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial M_1^2}| &= \langle 3(\Theta^{11})^2 M_1^2 - \Theta^{11}\Theta^{22} M_2^2\rangle \\ g^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial M_2^2}| &= \langle 3(\Theta^{22})^2 M_2^2 - \Theta^{11}\Theta^{22} M_1^2\rangle \\ g^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial M_2 \partial M_1}| &= -2\Theta^{11}\Theta^{22}\langle M_1 M_2\rangle. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Diese Ausdrücke lassen sich unter Ausnutzung der Grundzustandsbedingungen noch folgendermaßen vereinfachen: Wegen (4.66) ist

$$\Theta^{11}M_1 + \Theta^{12}M_2 = 2T(G^{11}M_1 + G^{12}M_2) = 2T\frac{1}{M_1}, \tag{4.93}$$

also

$$\Theta^{11}M_1^2 + \Theta^{12}M_1M_2 = 2T = \frac{1}{2}(2\Theta^{12}M_1M_2 + \Theta^{11}M_1^2 + \Theta^{22}M_2^2), \tag{4.94}$$

und damit

$$\Theta^{11}\langle M_1^2\rangle = \Theta^{22}\langle M_2^2\rangle \tag{4.95}$$

Die Massenmatrix (4.92) reduziert sich auf

$$M_{AB}^2 = 2g^2 \begin{pmatrix} (\Theta^{11})^2\langle M_1^2\rangle & -\Theta^{11}\Theta^{22}\langle M_1M_2\rangle \\ -\Theta^{11}\Theta^{22}\langle M_1M_2\rangle & (\Theta^{22})^2\langle M_2^2\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.96}$$

Man sieht: Die Massenmatrix hat den Rang 1, d.h. sie hat genau einen von Null verschiedenen Eigenwert, und damit bleibt genau eines der Felder masselos und das andere wird massiv mit der Masse $m = 2g^2((\Theta^{11})^2M_1^2 + (\Theta^{22})^2M_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Die beiden bisher untersuchten Szenarien legen folgenden allgemeinen Ablauf nahe. Mindestens eines der Skalarfelder M_A bleibt masselos, d.h. die in (4.85) angegebene Massenmatrix hat immer einen Nulleigenvektor, während die anderen Felder massiv werden mit einer Masse, die sich mit (4.85) berechnen läßt.

Wir kommen nun zur Behandlung der übrigen Skalarfelder ϕ^a. Für diese gilt zunächst mit (4.43)

$$\begin{aligned} g^{-2}\frac{\partial V}{\partial \phi^c} =& (\partial_c K)e^K(\frac{1}{4}g^{a\overline{b}}D_aWD_{\overline{b}}\overline{W} - (1-\frac{1}{2}M_AG^{AB}M_B)|W|^2) \\ &+ e^K(\frac{1}{4}g^{a\overline{b}}{}_{,c}D_aWD_{\overline{b}}\overline{W} + \frac{1}{4}g^{a\overline{b}}\partial_c(D_aW)D_{\overline{b}}\overline{W} \\ &+ \frac{1}{4}g^{a\overline{b}}D_aW\partial_c(D_{\overline{b}}\overline{W}) - (1-\frac{1}{2}M_AG^{AB}M_B)(\partial_cW)\overline{W}), \end{aligned} \tag{4.97}$$

wobei $G^{a\overline{b}} = g^{a\overline{b}}$ und die Holomorphie von W, d.h. $\partial_c\overline{W} = 0$, ausgenutzt wurde. Ferner kann man den vorletzten Term folgendermaßen umformen:

$$\partial_c(D_{\overline{b}}\overline{W}) = \partial_{\overline{b}}\partial_c\overline{W} + (\partial_c\partial_{\overline{b}}K)\overline{W} + (\partial_{\overline{b}}K)\partial_c\overline{W} = g_{c\overline{b}}\overline{W}. \tag{4.98}$$

Da am Grundzustand $D_a W = 0$ gilt, ist auch $D_{\overline{a}}\overline{W} = 0$, denn für die komplexe Ableitungen gilt $\partial_{\overline{a}}\overline{W} = \overline{\partial_a W}$, d.h. wegen der Realität von K ist $D_{\overline{a}}\overline{W} = \partial_{\overline{a}}\overline{W} + (\partial_{\overline{a}}K)\overline{W} = \overline{\partial_a W} + \overline{(\partial_a K)W} = \overline{D_a W} = 0$. Der Term proportional zu $g^{a\overline{b}}{}_{,c}$ wird auch bei zweiter Ableitung auf jeden Fall wegfallen. Da es im positiv-definiten Potential (4.65) keine Kopplung zwischen Termen mit den M_A und den ϕ^a gibt, folgt, daß die gemischten Ableitungen identisch verschwinden:

$$g^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial M_A \partial \phi^a} = 0. \tag{4.99}$$

Im Übrigen gilt $\langle \frac{\partial V}{\partial \phi^c} \rangle = 0$ automatisch, wenn (4.66) erfüllt ist, denn wegen (4.97) ist am Grundzustand $g^{-2}\frac{\partial V}{\partial \phi^c} = -\overline{W}e^K(1-\frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)(\partial_c W + (\partial_c K)W) \sim D_c W = 0$ und ebenso $g^{-2}\frac{\partial V}{\partial \overline{\phi}^{\overline{c}}} = 0$. Zur Berechnung der Matrix zweifacher Ableitung nach ϕ^a sei bemerkt, daß sich zunächst ein Term der Ableitung der Exponentialfunktion ergibt, der also proportional zu $\frac{\partial V}{\partial \phi^c}$ ist und damit im Grundzustand verschwindet. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} g^{-2}\langle \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^d \partial \phi^c} \rangle = \langle &-(\partial_c \partial_d K)e^K(1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)|W|^2 \\ &- (\partial_c K)e^K(1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)(\partial_d W)\overline{W} \\ &+ e^K(\frac{1}{4}g^{a\overline{b}}\partial_c(D_a W)\partial_d(D_{\overline{b}}\overline{W}) + \frac{1}{4}g^{a\overline{b}}\partial_d(D_a W)\partial_c(D_{\overline{b}}\overline{W}) \\ &- (1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)(\partial_c \partial_d W)\overline{W})\rangle, \end{aligned} \tag{4.100}$$

wobei wieder solche Terme weggelassen wurden, die proportional zu $D_a W$ sind. Zusätzlich betrachten wir zunächst den Fall des positiv definiten Potentials, in dem also $1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B = 0$ gilt. Insgesamt erhält man mit (4.98)

$$\langle \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^d \partial \phi^c} \rangle = \frac{g^2}{4}\langle e^K \overline{W}(\partial_c(D_d W) + \partial_d(D_c W))\rangle. \tag{4.101}$$

Für die Massenmatrix $\langle \frac{\partial^2 V}{\partial \overline{\phi}^{\overline{d}} \partial \overline{\phi}^{\overline{c}}} \rangle$ erhält man das komplex-konjugierte Ergebnis, da das Potential reell ist. Ebenso gilt:

$$\begin{aligned} g^{-2}\langle \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^{\overline{d}} \partial \phi^c} \rangle &= -g_{c\overline{d}}e^K(1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)|W|^2 \\ &- (\partial_c K)e^K(1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)W\partial_{\overline{d}}\overline{W} + e^K(\frac{1}{4}(g^{a\overline{b}}\partial_{\overline{d}}(D_{\overline{b}}\overline{W})\partial_c(D_a W) \\ &+ g_{c\overline{d}}|W|^2) - (1 - \frac{1}{2}M_A G^{AB} M_B)(\partial_{\overline{d}}\overline{W})(\partial_c W)), \end{aligned} \tag{4.102}$$

wobei wir $g_{a\overline{b}} = \partial_a \partial_{\overline{b}} K$ ausgenutzt haben. Im positiv definiten Fall ist also

$$\langle \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^{\overline{d}} \partial \phi^c} \rangle = \frac{g^2}{4}\langle e^K(g^{a\overline{b}}\partial_{\overline{d}}(D_{\overline{b}}\overline{W})\partial_c(D_a W) + g_{c\overline{d}}|W|^2)\rangle. \tag{4.103}$$

Es bereitet nun keine Schwierigkeiten, die erhaltenen Ausdrücke geometrisch zu interpretieren. Da im Vakuumerwartungswert die D_aW und ihre komplex-konjugierten verschwinden, lassen sich die obigen Ableitungen durch beliebige kovariante ersetzen, denn diese erhalten neben der gewöhnlichen partiellen Ableitung nur Terme proportional zu D_aW. Wir haben damit die durch die spontane Symmetriebrechung entstandenen Massen der Skalarfelder vollständig bestimmt. Zusammenfassend haben wir damit die folgenden Massenmatrizen für die Skalarfelder ϕ^a gefunden:

$$\begin{aligned} M^2_{ab} &= \frac{g^2}{4}\langle e^K \overline{W}[D_a(D_bW) + D_b(D_aW)]\rangle \\ M^2_{a\overline{b}} &= \frac{g^2}{4}\langle e^K [g^{c\overline{d}} D_{\overline{b}}(D_{\overline{d}}\overline{W}) D_a(D_cW) + g_{a\overline{b}}|W|^2]\rangle \\ M^2_{\overline{a}\overline{b}} &= \frac{g^2}{4}\langle e^K W[D_{\overline{b}}(D_{\overline{a}}\overline{W}) + D_{\overline{a}}(D_{\overline{b}}\overline{W})]\rangle. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Ausdrücke analog zu denen einer spontanen $N = 1 \to N = 0$ Brechung in $D = 4$ sind [8], nur mit dem Unterschied, daß dort noch ein Term auftaucht, der von dem Riemannschen Krümmungstensor abhängt. Es wäre interessant, den geometrische Ursprung dieser Diskrepanz zu untersuchen.

Um die physikalischen Massen ablesen zu können, sei zunächst auf folgendes hingewiesen: In einer Sigmamodell-Wirkung der Form $\mathcal{L} \sim g_{a\overline{b}}(\phi)\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\overline{\phi}^{\overline{b}} - m_{a\overline{b}}(\phi)\phi^a\overline{\phi}^{\overline{b}}$ haben die skalaren Felder genau dann eine Masse, wenn im Grundzustand $\langle m_{a\overline{b}}(\phi)\rangle \neq 0$ gilt. Auch in diesem Fall stellt diese Matrix aber nicht notwendigerweise die physikalische Massenmatrix dar, sondern nur dann, wenn die Wirkung in den Koordinaten ausgedrückt ist, in denen die Metrik am Punkt des Grundzustands auf der Skalarmannigfaltigkeit flach, d.h. $\sim \delta_{a\overline{b}}$, ist. Es ist dies darin begründet, daß sich die physikalische Masse als Eigenwert des Poincare-Casimiroperators P^2 nur dann ergibt, wenn im kinetischen Term die Ableitungen der ϕ^a zum selben Index auftauchen.

Es verbleibt an dieser Stelle nur noch die Masse der Vektorfelder zu berechnen. Auf den ersten Blick hat es den Anschein, daß die Wirkung (4.38) keinen Massenterm für die Vektorfelder generieren könnte, denn diese tauchen typischerweise in Form der kovarianten Ableitung im kinetischen Term der zur Eichsymmetrie korrespondierenden Skalarfelder auf. Diese sind jedoch gerade in die Vektorfelder redualisiert, und die kinetischen Terme der üblichen Skalarfelder enthalten entsprechend keine Vektorfelder. Es wird hier also kein gewöhnlicher Higgs-Mechanismus ablaufen, sondern höchstens ein topologischer, wie wir ihn in 4.1.1 erklärt haben. Daß dies der Fall ist, kann auf zweierlei Weise begründet werden. In der Wirkung (4.38) lautet der relevante Teil für den Fall, daß wir nur ein Feld M_A und nur ein Eichvektorfeld haben, wegen $\langle G^{-1}(M)\rangle = \frac{g\Theta}{m_\psi}$:

$$\frac{1}{4}\frac{g\Theta}{m_\psi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g\Theta\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho. \tag{4.105}$$

Nach Multiplikation mit $\frac{m_\psi}{g\Theta}$, wodurch die Dynamik nicht verändert wird, reduziert sich dies auf (4.8) mit $\xi = m_\psi$.[11] Und wir hatten dort schon gesehen, daß das Vektorfeld dann die Masse m_ψ hat. Andererseits kann man auch nochmals die Dualitätsrelation (4.32) nutzen und diese in den Yang-Mills-Term einsetzten, so daß man im nicht redualisierten Bild erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}G^{AB}F_A^{\mu\nu}F_{B\mu\nu}&\\ &= \frac{1}{4}G^{AB}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}G_{AC}G_{BE}(\partial_\rho\hat{\varphi}^C + g\Theta^{CD}A_{D\rho})(\partial^\sigma\hat{\varphi}^E + g\Theta^{EF}A_F^\sigma) + ...\\ &= \frac{1}{2}G_{CE}\partial_\rho\hat{\varphi}^C\partial^\rho\hat{\varphi}^E + \frac{1}{2}g^2G_{CE}\Theta^{CD}\Theta^{EF}A_{D\rho}A_F^\rho + ...\end{aligned} \tag{4.106}$$

Wegen $\langle M^2\rangle = \frac{2m_\psi}{g\Theta}$ reduziert sich der relevante Term bei verschwindender kosmologischer Konstante auf

$$\frac{1}{2}g^2\Theta^2\langle G(M)\rangle A_\mu A^\mu = \frac{1}{4}g^2\Theta^2\langle M^2\rangle A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}g\Theta m_\psi A_\mu A^\mu. \tag{4.107}$$

Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß weiterhin ein Chern-Simons-Term in der Wirkung vorkommt, so daß insgesamt die relevanten Terme sind:

$$\frac{1}{2}g\Theta m_\psi A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}g\Theta\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho, \tag{4.108}$$

d.h. mit (4.18) folgt für die Masse des Vektorfeldes: $\frac{g\Theta m_\psi}{g\Theta} = m_\psi$, genau wie in der redualisierten Version.

Es ist möglich, diese Analyse auf eine beliebige Zahl an Vektorfeldern $A_{A\mu}$ zu verallgemeinern. Hierzu werden wir zeigen, daß es genau eine Linearkombination $\hat{A}_\mu$ der Vektorfelder gibt, die die Gravitinomasse annimmt. Wir definieren

$$\hat{A}^\mu := \sum_A \frac{1}{M_A}A_A^\mu. \tag{4.109}$$

Dann läßt sich jedes der Vektorfelder A_A^μ durch eine Linearkombination von $\hat{A}^\mu$ und den übrigen Vektorfeldern ausdrücken:

$$A_A^\mu = M_A\hat{A}^\mu + B_A^\mu, \tag{4.110}$$

wobei

$$B_A^\mu = -\sum_{B\neq A}\frac{M_A}{M_B}A_B^\mu. \tag{4.111}$$

Die Feldstärke $\hat{F}_{\mu\nu}$ dieses Vektorfeldes ist dann gegeben durch

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \sum_A \frac{1}{M_A}F_A^{\mu\nu} - \sum_A \frac{1}{M_A^2}(A_A^\nu\partial^\mu M_A - A_A^\mu\partial^\nu M_A), \tag{4.112}$$

[11] In (4.8) war das relative Vorzeichen zwischen Yang-Mills-Term und Chern-Simons-Term ein anderes, was jedoch nichts an der Masse ändert.

so daß man die Feldstärken $F_A^{\mu\nu}$ durch $\hat{F}^{\mu\nu}$ ausdrücken kann gemäß

$$F_A^{\mu\nu} = M_A \hat{F}^{\mu\nu} - \sum_{B \neq A} \frac{M_A}{M_B} F_B^{\mu\nu} + \sum_B \frac{M_A}{M_B^2} (A_B^\nu \partial^\mu M_B - A_B^\mu \partial^\nu M_B). \tag{4.113}$$

Setzt man (4.110) und (4.113) in den Yang-Mills- und den Chern-Simons-Term der Wirkung (4.38) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} G^{AB} F_A^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} + \frac{1}{4} g \Theta^{AB} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A_A^\mu F_B^{\nu\rho} \\ &\quad = \frac{1}{4} M_A G^{AB} M_B \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g M_A \Theta^{AB} M_B \varepsilon_{\mu\nu\rho} \hat{A}^\mu \hat{F}^{\mu\nu} + ... \end{aligned} \tag{4.114}$$

Hierbei wurden nur die führenden Terme berücksichtigt, da die nachfolgenden keinen Beitrag zur Masse liefern. Mit $T = \frac{1}{4} M_A \Theta^{AB} M_B = \frac{1}{2} g^{-1} m_\psi$ und $M_A G^{AB} M_B = 2$ folgt also wie in (4.105), daß $\hat{A}^\mu$ die Masse m_ψ hat.

Wir behandeln nun die naheliegende Frage, ob es hier ein Goldstoneboson gibt und welche Rolle es spielt. In Abschnitt 4.1.1 hatten wir gesehen, daß auch beim topologischen Higgs-Mechanismus ein Goldstoneboson gegessen wird, so daß das zuvor keine physikalischen Freiheitsgrade tragende Chern-Simons-Feld den einen Freiheitsgrad bekommt, den es als massives Feld haben muß. Hier haben wir jedoch die Situation, daß das Eichfeld aufgrund der speziellen Redualisierung einen zusätzlichen Yang-Mills-Term hat, d.h. selbst im ungebrochenen Fall einen Freiheitsgrad hat. Durch die Brechung erhält das Vektorfeld also keinen zusätzlichen Freiheitsgrad, d.h. es wird massiv, ohne daß ein Goldstoneboson gegessen wird. Das einzige Feld, das als Goldstoneboson in Frage käme, wäre auch das masselose M. Dieses ist jedoch nicht geeicht und kann daher nicht wegtransformiert werden. Das Goldstone-Theorem zeigt jedoch - wenn auch unter gewissen Voraussetzungen -, daß zu jeder gebrochenen Symmetrie ein masseloses bosonisches Feld als Goldstoneboson gehört. Es ist jedoch zu beachten, daß die Eichsymmetrie nur in dem Bild der reinen Chern-Simons-Eichung gebrochen ist, in dem $\hat{\varphi}$ nicht in das Vektorfeld redualisiert wurde, denn nur hier erscheint ein konventioneller Massenterm wie in (4.108). Um das Goldstoneboson zunächst in diesem Bild zu identifizieren, müssen wir die Situation etwas genauer analysieren. Wir zeigen zunächst, daß sich bei Brechung auf $N = 1$ das Goldstoneboson notwendigerweise im selben Multiplett befindet wie das Goldstonefermion [3]. Ein Skalarfeld ϕ sei also im selben Multiplett wie das Goldstonefermion η, d.h. es transformiere sich unter der ungebrochenen Symmetrie ϵ_1 gemäß

$$\delta_{\epsilon_1} \phi \sim \epsilon_1 \eta. \tag{4.115}$$

Da sich das Goldstonefermion aber als solches notwendigerweise mit einer konstanten Verschiebung unter der gebrochenen Symmetrie ϵ_2 transformiert (siehe (4.72)),

$$\delta_{\epsilon_2} \eta \sim m_\psi^2 \epsilon_2, \tag{4.116}$$

ergibt sich der Abschluß der beiden Supersymmetrietransformationen auf ϕ zu

$$[\delta_{\epsilon_2}, \delta_{\epsilon_1}] \phi \sim m_\psi^2 \epsilon_1 \epsilon_2, \tag{4.117}$$

d.h. ϕ transformiert sich auch mit einer konstanten Verschiebung, ist also tatsächlich das Goldstoneboson. In unserem Fall ist das (geeichte) Skalarfeld $\hat{\varphi}$ außer M der einzige bosonische Partner des Goldstonefermions, ist damit also nach unserer obigen Analyse das Goldstoneboson. Da dieses nun aber in das Vektorfeld redualisiert wurde, könnte man sagen, daß es sich bei dem Vektorfeld selbst um das Goldstoneboson handelt - auch angesichts der Tatsache, daß dies in $2 + 1$ Dimensionen kein unbekanntes Phänomen ist [13]. Dies ist aber insofern irreführend als die Eichsymmetrie in diesem Bild überhaupt nicht gebrochen ist, so daß die Existenz eines Goldstonebosons durch nichts gefordert wird. In dem Bild der Yang-Mills-Eichung gibt es schlicht kein Goldstoneboson, das gegessen werden könnte.

Es ergibt sich allgemein folgendes Schema der spontanen Symmetriebrechung bei geeichter Supergravitation in $D = 3$: In der reinen Chern-Simons-Eichung existieren geeichte Skalarfelder, die bei einer spontanen Symmetriebrechung von den Eichvektorfeldern gegessen werden können. Hierbei wird auch die Eichinvarianz gebrochen, denn in der Wirkung stehen dann ein Chern-Simons-Term und ein konventioneller Massenterm. Hierzu äquivalent ist nach [24] eine Yang-Mills-Eichung, bei der unter Ausnutzung der on-shell-Dualität einige Skalarfelder in die Vektorfelder redualisiert werden, so daß letztere propagierend in Form eines Yang-Mills-Terms werden. In diesem Bild kann eine spontane Symmetriebrechung etwa von Supergravitation auch dazu führen, daß die Vektorfelder massiv werden, und zwar ebenso aufgrund eines topologischen Higgs-Mechanismus. Hier werden nun aber keine Goldstonebosonen gegessen, denn andernfalls wäre die Abzählung der Freiheitsgrade nicht konsistent. Damit beide Beschreibungen äquivalent sind, können also nur *genau die* Skalarfelder in die Vektorfelder redualisiert werden, die bei einer spontanen Symmetriebrechung zu Goldstonebosonen werden können. Dies folgt auch aus der allgemeinen Untersuchung dieser Äquivalenz in [24], wo es heißt: " ... that only those scalar fields on which the scalar potential of the gauged theory does not depend can be dualized away and replaced by YM vector fields." Mit anderen Worten, da das skalare Potential nicht von den zu redualisierenden Skalarfeldern abhängt, sind diese bei einer möglichen spontanen Symmetriebrechung masselos und können damit zu Goldstonebosonen werden.

In $D = 3$ hat man also drei Möglichkeiten, ein Vektorfeld massiv zu machen. Man kann erstens eine topologische Variante des "konventionellen" Higgs-Mechanismus ablaufen lassen, bei dem die Vektorfelder dadurch massiv werden, daß sie einige Goldstonebosonen essen. Oder man kann zweitens die möglichen Goldstonebosonen vor der Brechung in die Vektorfelder redualisieren, so daß die Vektorfelder massiv werden ohne Goldstonebosonen zu essen. Schließlich kann man noch einen ganz konventionellen Higgs-Mechanismus ablaufen lassen, bei dem ein Yang-Mills-Feld ein Goldstoneboson ißt und damit insgesamt zwei Freiheitsgrade hat.

4.2.4 Effektive $N = 1$ Supermultipletts

Wir werden nun untersuchen, wie die resultierenden $N = 1$ Supermultipletts aussehen und hierzu ausnutzen, daß man weiterhin eine Massenentartung innerhalb der $N = 1$ Multipletts hat. Um die physikalischen Massen der ϕ^a zu bestimmen, gehen wir zunächst davon aus, daß es nur ein komplexes Feld ϕ gibt, so daß wir die Massenmatrizen explizit diagonalisieren können. Zunächst ist mit (4.104)

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \frac{g^2}{2}\langle e^K \overline{W} D^2 W\rangle \\ M_{12}^2 &= \frac{g^2}{4}\langle e^K [h^{-1}\overline{D}^2\overline{W} D^2 W + h|W|^2]\rangle \\ M_2^2 &= \frac{g^2}{2}\langle e^K W \overline{D}^2 \overline{W}\rangle. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Hierbei bezeichnet h die nun skalare Kähler-Metrik $g_{a\bar{b}}$. Man beachte, daß diese Ausdrücke noch nicht in der Masseneigenbasis geschrieben sind. Die Entwicklung des Potentials lautet nämlich

$$V = V_0 + \frac{1}{2}(M_1^2\phi^2 + M_{12}^2\phi\overline{\phi} + M_2^2\overline{\phi\phi}) + ..., \tag{4.119}$$

während Massenterme immer von der Form $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ im Falle eines reellen Feldes oder von der Form $\frac{1}{2}m^2|\phi|^2$ im Falle eines komplexen Feldes sind. Wegen $V \in \mathbb{R}$ ist $M_{12} \in \mathbb{R}$ und mit $M_1^2 = \overline{M_2^2}$ gilt nun für $\phi =: \phi_1 + i\phi_2$

$$\begin{aligned} M_1^2\phi^2 + M_{12}^2\phi\overline{\phi} + M_2^2\overline{\phi\phi} &= M_1^2(\phi_1^2 + 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2) + M_{12}^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) \\ &\quad + M_2^2(\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2) \\ &= (M_{12}^2 + 2\mathrm{Re}M_1^2)\phi_1^2 - 2(2\mathrm{Im}M_1^2)\phi_1\phi_2 \\ &\quad + (M_{12}^2 - 2\mathrm{Re}M_1^2)\phi_2^2. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Diesen Ausdruck kann man als quadratische Form in (ϕ_1, ϕ_2) auffassen. Da diese Matrix reell und symmetrisch ist, kann man immer eine orthogonale Transformation finden, die diese diagonalisiert, so daß deren Eigenwerte die physikalischen Massen ergeben. Ist nämlich

$$\begin{pmatrix} M_{12}^2 + 2\mathrm{Re}M_1^2 & -2\mathrm{Im}M_1^2 \\ -2\mathrm{Im}M_1^2 & M_{12}^2 - 2\mathrm{Re}M_1^2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} S^t, \tag{4.121}$$

so sind die neuen Felder

$$\hat{\phi} := S\phi \tag{4.122}$$

in der Masseneigenbasis mit den physikalischen Massen m_1 und m_2. Man erhält für die Eigenwerte

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} M_{12}^2 + 2\mathrm{Re}M_1^2 - \lambda & -2\mathrm{Im}M_1^2 \\ -2\mathrm{Im}M_1^2 & M_{12}^2 - 2\mathrm{Re}M_1^2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2M_{12}^2\lambda - 4|M_1^2|^2 + (M_{12}^2)^2, \end{aligned} \tag{4.123}$$

also

$$m_{1,2}^2 = \lambda = M_{12}^2 \pm \sqrt{(M_{12}^2)^2 + 4|M_1^2|^2 - (M_{12}^2)^2} = M_{12}^2 \pm 2|M_1^2|. \tag{4.124}$$

A priori gibt es nun zwei Möglichkeiten:
i) $M_1^2 = 0$. In diesem Fall wird das komplexe Feld massiv und erhält die Masse M_{12}^2.
ii) $M_1^2 \neq 0$. In diesem Fall spaltet sich das komplexe Feld in zwei reelle Skalarfelder unterschiedlicher Masse auf. Mit (4.118) sieht man nun: Fall i) impliziert $\langle e^K \overline{W} D^2 W\rangle = 0$, also

$$g^{-2} m_\psi^2 (\langle \partial^2 K\rangle + \langle (\partial K)^2\rangle) = -2\langle e^K \overline{W} \partial K \partial W\rangle - \langle e^K \overline{W} \partial^2 W\rangle. \tag{4.125}$$

Diese Gleichung stellt eine starke Restriktion an das Kählerpotential und damit an die Geometrie der Skalarmannigfaltigkeit dar. Daß das komplexe Skalarfeld selbst massiv wird, daß also Real- und Imaginärteil dieselbe Masse erhalten, kommt also nur in sehr speziellen Situationen vor, in denen man das Kählerpotential und auch die Form des Superpotentials per Hand gerade so zu wählen hat, daß (4.125) erfüllt ist. Im allgemeinen wird also $M_1^2 \neq 0$ sein, d.h. die Skalarfelder spalten zu Feldern unterschiedlicher Masse auf und gehören damit notwendigerweise zu unterschiedlichen Supermultipletts. Dies ist auch in der Struktur der $N = 1$ Supermultipletts begründet. Denn diese sind nach Kap. 2 von der Form $(0, \frac{1}{2})$, so daß es zu einem Skalarfeld genau einen fermionischen Spin-$\frac{1}{2}$ Partner mit einem fermionischen Freiheitsgrad gibt. Entsprechend hat auch das Skalarfeld genau einen bosonischen Freiheitsgrad.[12] Da komplexe Skalarfelder jedoch zwei Freiheitsgrade haben, können diese nicht zu einem $N = 1$ Supermultiplett gehören, d.h. die Supersymmetrie erzwingt keine Massenentartung zwischen Real- und Imaginärteil. Analog sieht man, daß die Skalarfelder ϕ^a i.a. nicht die Gravitinomasse annehmen, sich also nicht mit dem Gravitino in einem Multiplett befinden. Dies hieße nämlich wegen $m_\psi^2 = g^2\langle e^K |W|^2\rangle$ mit der Normierung $h = 1$[13]

$$\begin{aligned} g^2\langle e^K |W|^2\rangle &= \frac{g^2}{4}\langle e^K [\overline{D}^2 \overline{W} D^2 W + |W|^2]\rangle \pm g^2 \langle e^K |\overline{W} D^2 W|\rangle, \text{ also} \\ 3\langle |W|^2\rangle &= \langle \overline{D}^2 \overline{W} D^2 W \pm 4|\overline{W} D^2 W|\rangle. \end{aligned} \tag{4.126}$$

Diese Relation kann offenbar nur für eine spezielle Wahl des Superpotentials W und des Kählerpotentials erfüllt werden.

Um die allgemeine Reorganisation der Multipletts zu verstehen, muß ein bosonischer Partner identifiziert werden, der die Gravitinomasse hat und demzufolge zu demselben Multiplett gehört wie das massive Gravitino. Wir haben jedoch soeben festgestellt, daß keines der Skalarfelder diese Eigenschaft hat, sondern daß diese

[12] Wir wir in Kap. 2 gesehen haben, kann man Majoranaspinoren in $D = 3$ als Real- und Imaginärteil von Weylspinoren in $D = 4$ auffassen. Da letztere zwei propagierende fermionische Freiheitsgrade haben, haben Majoranaspinoren in $D = 3$ entsprechend genau einen.

[13] Diese liefert wegen (4.39) und unseren Überlegungen im vorigen Abschnitt nur dann die physikalische Masse, falls $g_{aA} = 0$, was wir der Einfachheit halber für unsere Betrachtung annehmen können.

nur unter sehr speziellen geometrischen Bedingungen die Gravitinomasse annehmen. Andererseits kennen wir aus Kap. 2 die allgemeine Form der massiven Multipletts, insbesondere für $N = 1$: $(j, j + \frac{1}{2})$. Da das massive Gravitino ein Spin-$\frac{3}{2}$-Feld ist, muß der bosonische Partner also ein massives Spin-1-Feld sein. Ein solches ist nach dem in Anhang A ausgeführten auch in $D = 3$ ein Vektorfeld. Wir erwarten also ein massives Vektorfeld, das die Gravitinomasse annimmt. Und in der Tat haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, daß durch einen topologischen Higgs-Mechanismus das Vektorfeld diese Masse erhält. Die masselosen $N = 2$ Multipletts

$$N = 2, \text{ masselos: } (e_\mu^a, \psi_\mu^1, \psi_\mu^2) + (A_\mu, \eta, \lambda, M) + (\phi^1, \chi^1, \phi^2, \chi^2), \tag{4.127}$$

spalten also in die folgenden masselosen und massiven $N = 1$ Multipletts auf. (Der Index kennzeichnet jeweils die Masse.)

$$N = 1\text{: } (e_\mu^a, \psi_\mu^1)_0 + (\psi_\mu^2, A_\mu)_{m_\psi} + (M, \lambda)_0 + (\phi^1, \chi^1)_{m_1} + (\phi^2, \chi^2)_{m_2}, \tag{4.128}$$

wobei m_1 und m_2 die in (4.124) berechneten Massen von ϕ^1 und ϕ^2 sind. (Für den allgemeineren Fall einer beliebigen Zahl an Skalarfeldern ϕ^a kann man die Massen immer für eine gegebene Geometrie der Skalarmannigfaltigkeit durch Diagonalisierung von (4.104) bestimmen.) Zusammenfassend haben wir folgenden Ablauf der spontanen Symmetriebrechung gefunden: Das zuvor nichtpropagierende Gravitino ψ_μ^2 wird massiv und erhält dadurch einen fermionischen Freiheitsgrad.[14] Es läuft also ein Super-Higgs-Mechanismus ab, bei dem ein Goldstonefermion gegessen wird, d.h. seinen propagierenden Freiheitsgrad an das Gravitino abgibt. In der obigen Darstellung ist dieses etwa η. Ferner bleibt M masselos und die komplexen Skalarfelder ϕ werden massiv und spalten dabei in ihre reellen Anteile auf. Das Vektorfeld wird ebenso massiv, jedoch nicht durch einen gewöhnlichen Higgs-Mechanismus, sondern durch einen topologischen. Es wird hierbei auch kein Goldstoneboson gegessen. Der allgemeinere Fall einer beliebigen Zahl an Vektorfeldern $A_{A\mu}$ ist vollkommen analog.

4.3 Die Effektive $N = 1$ Wirkung

Nachdem wir also die effektiven $N = 1$ Multipletts bestimmt haben, gilt es als nächstes, die effektive $N = 1$ Wirkung zu berechnen, die die Dynamik in guter Näherung bei im Vergleich zur Brechungsskala kleinen Energien beschreibt. Die Brechungsskala ist durch die Gravitinomasse m_ψ gegeben, so daß man die effektive Wirkung durch "Ausintegration" des massiven Gravitinos erhält. Gemeint ist damit folgendes. Zunächst führen wir eine typische Energie-/Impulsskala p ein, die deutlich kleiner ist als die Brechungsskala: $p \ll m_\psi$. In den Bewegungsgleichungen

[14] Daß ein massives Gravitino in $D = 3$ genau einen fermionischen Freiheitsgrad haben muß, kann man auch durch dimensionale Reduktion begründen. Ein massives Gravitino hat in $D = 4$ vier Freiheitsgrade und zerlegt sich wie folgt: $\psi_{m\alpha} = (\psi_{\mu\alpha}, \psi_{2\alpha}) = (\psi_{\mu\alpha}^1 + i\psi_{\mu\alpha}^2, \psi_{2\alpha}^1 + i\psi_{2\alpha}^2)$. Da ein massives Majoranafermion wie $\psi_{2\alpha}^{1,2}$ in $D = 3$ einen Freiheitsgrad hat, müssen auch die $\psi_{\mu\alpha}^{1,2}$ jeweils einen Freiheitsgrad haben.

führen wir dann eine Entwicklung in $\frac{p}{m_\psi}$ bis zur ersten Ordnung durch und setzen das Resultat wieder in die Wirkung ein. Die resultierende Wirkung liefert dann die bei der Skala p gültigen Bewegungsgleichungen. Nimmt man etwa die Bewegungsgleichung des massiven Gravitinos ψ_μ^2 in einer Impulsraumdarstellung, so erhält man

$$0 = (p^2 + m_\psi^2)\psi_\mu^2(p) = m_\psi^2 \left(1 + (\frac{p}{m_\psi})^2\right) \psi_\mu^2(p) \cong m_\psi^2 \psi_\mu^2(p). \tag{4.129}$$

Nach einer Entwicklung bis zur ersten Ordnung erhält man also als Bewegungsgleichung $\psi_\mu^2 = 0$, d.h. in der Wirkung muß das massive Gravitino gleich Null gesetzt werden. Wir nehmen an, daß die massiven Skalarfelder, also die ϕ^a und gegebenenfalls einige der M_A, eine Masse annehmen, die von derselben Ordnung ist, so daß diese Felder sowie ihre fermionischen Partner in der Wirkung also ebenfalls gleich Null zu setzen sind. Soweit ist die Analyse vollkommen analog zu der entsprechenden für eine $N = 2 \to N = 1$ Brechung in $D = 4$ [38, 39]. Bei der Behandlung eines massiven Vektorfeldes ergibt sich in $D = 4$ jedoch folgende Schwierigkeit. Aufgrund der Ankopplung der masselosen Goldstonebosonen an die Vektorfelder in Form der kovarianten Ableitung, ergibt sich in der Wirkung der folgende Kopplungsterm [39]:

$$\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + m A_\mu \partial^\mu f(\phi), \tag{4.130}$$

wobei die genaue Form von f für unsere Überlegung nicht von Bedeutung ist. Da der Ableitungsterm hier nur von 1. Ordnung ist, kann dieser nicht gegen den Massenterm vernachlässigt werden. Für die Bewegungsgleichung von A_μ folgt

$$A_\mu = -\frac{1}{m} \partial_\mu f(\phi). \tag{4.131}$$

Setzt man diese nun wieder in die Wirkung (4.130) ein, so erhält man

$$-\frac{1}{2} \partial_\mu f(\phi) \partial^\mu f(\phi) = -\frac{1}{2} (f'(\phi))^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \tag{4.132}$$

d.h. einen kinetischen Term für die Skalarfelder. Diese werden aber für nicht-lineare Sigmamodelle durch die Kählermetrik bestimmt. Diese, d.h. die Geometrie der Skalarmannigfaltigkeit, erfährt also eine nichttriviale Korrektur beim Übergang zur effektiven Wirkung, worin die ganze Schwierigkeit ihrer Berechnung besteht. In der hier untersuchten Brechung in $D = 3$ taucht dieses Problem jedoch nicht auf. Dies ist einfach darin begründet, daß in dem redualisierten Bild keine Goldstonebosonen vorhanden sind und diese somit auch nicht mehr an die Vektorfelder koppeln. Die Kopplungsterme in (4.38), die die Feldstärke bzw. die Vektorfelder enthalten, sind von Ordnung p^2 oder von der Form $m_\psi p$ für den Chern-Simons-Term. In diesem Fall sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen für die massiven Vektorfelder bis zur ersten Ordnung $A_\mu(p) = 0$, sind also in der Wirkung auch einfach gleich Null zu setzen. Insgesamt ergibt sich die effektive $N = 1$ Wirkung also dadurch, daß man alle massiven Felder gleich Null setzt, insbesondere erfährt auch die Geometrie der Skalarmannigfaltigkeit keine Modifikation.

4.4 $N = 1$ Anti-deSitter Hintergrund

Wir werden abschließend die allgemeinen Aspekte einer möglichen $N = 2 \to N = 1$ Brechung mit Anti-deSitter Vakuum behandeln. In 4.2.2 hatten wir die Bedingungen für supersymmetrische Grundzustände zunächst im allgemeinen AdS-Fall untersucht und dabei Folgendes gefunden: Jeder Eigenwert von A_1 im Grundzustand, der gleich dem inversen AdS-Radius ist, entspricht einer erhaltenden Supersymmetrie. Im Fall nichtverschwindender kosmologischer Konstante wird also auch der zur ungebrochenen Symmetrie korrespondierende Eigenwert von A_1 von Null verschieden sein. Da A_1 aber die Bedeutung einer Gravitinomassenmatrix hat, hieße das also, daß selbst im $N = 1$ Grundzustand *beide* Gravitinos massiv sind. Insbesondere das Gravitino im Gravitonmultiplett müßte also massiv sein, d.h. das Graviton selbst auch. Im ungebrochenen Fall stellt sich die Situation ähnlich dar. Beide Eigenwerte von A_1 wären gleich dem inversen AdS-Radius, d.h. beide Gravitinos im Gravitonmultiplett wären massiv; ebenso müßte dies für das Graviton gelten, das dann also zwei bosonische Freiheitsgrade hätte. Obwohl es in $D = 3$ topologische Modelle für massive Gravitation gibt [26, 32], wollen wir zunächst davon ausgehen, daß diese auch im AdS-Fall masselos bleibt. Der scheinbare Widerspruch zu unseren vorangegangenen Überlegungen liegt darin verborgen, daß im AdS-Fall die Masse nicht so einfach vom Massenterm abgelesen werden kann. Daß sich die physikalische Masse als Eigenwert des Casimiroperators P^2 der Poincaregruppe aus der Klein-Gordon-Gleichung ergibt, gilt nämlich nur für den Minkowski-Fall, in welchem die Isometriegruppe gerade die Poincaregruppe $ISO(1, 2)$ ist. Die Isometriegruppe der AdS-Raumzeit ist jedoch $SO(2, 2)$, so daß zunächst nicht klar ist, was hier die Rolle von P^2 spielt, wie also insbesondere die physikalische Masse zu bestimmen ist. Es gibt nun zwei mögliche Vorgehensweisen:
1.) Man untersucht die Darstellungstheorie der AdS-Gruppe, wozu man ausnutzen kann, daß

$$SO(2, 2) = SO(1, 2) \times SO(1, 2) \tag{4.133}$$

gilt. Da die Lie-Algebra also in die direkte Summe $so(1, 2) \oplus so(1, 2)$ zerfällt, kann man sofort die möglichen Casimiroperatoren identifizieren und fragen, welche Kombination derselben im Minkowski-Limes zu P^2 wird.
2.) Man berechnet die Einträge der (vermeintlichen) Massenmatrix A_1 der Gravitinos im ungebrochenen Fall, und bestimmt aus der Annahme, daß die Gravitinos hier masselos sind, durch Vergleich der Einträge die Massen im gebrochenen Fall.

Wir wollen die letztere Herangehensweise benutzen. Es ergibt sich dabei nun aber folgendes Problem. In 4.2.2 hatten wir mit (4.59) gesehen, daß im Fall ungebrochener Supersymmetrie das Potential am Grundzustand automatisch verschwindet, d.h. es ergibt sich notwendigerweise ein Minkowski-Vakuum. Mit anderen Worten: Es gibt überhaupt keinen ungebrochenen AdS-Grundzustand. Dies ist nicht etwa eine generische Eigenschaft von Supergravitationstheorien in $D = 3$, für die es sehrwohl Theorien mit AdS-Grundzustand gibt,[15] sondern liegt vielmehr an dem speziellen

[15] Vergleicht man dies mit der Literatur speziell zu AdS-Supergravitation in $D = 3$ (siehe etwa:

Modell, in dem nur die PQ-Isometrien geeicht werden [42]. Um auch einen ungebrochenen AdS-Fall zu realisieren, müssen wir ein allgemeineres Modell angeben und für dieses prüfen, ob sich die Bedingung (4.52) erfüllen läßt. (Diese wurde auf vollkommen modellunabhängige Weise gefunden.)

Daß zumindest ein $N = 2$ AdS Grundzustand existiert, kann man sehr schnell einsehen, wenn man den einfachsten Fall behandelt, daß keine Isometrien geeicht sind, daß also $T = 0$ gilt. (Die Relation (3.40) ist dann trivial erfüllt.) In diesem reduziert sich das Potential (4.40) auf

$$V = \frac{g^2}{4} e^K \left(g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W} - 4|W|^2 \right). \tag{4.134}$$

Wählt man $\langle D_i W \rangle = 0$ als Grundzustandsbedingung (was sich erfüllen läßt, sofern man verlangt, daß die partielle Ableitung von W am Grundzustand nicht verschwindet), so folgt für den Wert des Potentials am Grundzustand

$$V_0 = -g^2 e^K |W|^2. \tag{4.135}$$

Andererseits sind für $T = 0$ die Eigenwerte von A_1 wegen (4.55) gegeben durch $\pm e^{K/2}|W|$, so daß sich die Bedingung $g|\lambda| = \sqrt{-V_0}$ für ungebrochene Supersymmetrie auf (4.135) reduziert und damit erfüllt ist. Es gibt also einen $N = 2$ AdS-Grundzustand. An diesem Beispiel sieht man jedoch noch mehr. Um partielle Brechung zu ermöglichen, müssen geeichte Isometrien vorhanden sein, denn nur für nichtverschwindendes T können die Eigenwerte betragsmäßig verschiedene Werte annehmen und so zu einer partiellen Brechung führen.

[40, 41]), so stellt man fest, daß dort (p, q)-artige Supergravitation, wobei $N = p + q$, untersucht wird. p und q beziehen sich hierbei auf die beiden Faktoren (4.133) von $SO(2, 2)$, die supersymmetrisiert werden, und im Minkowski-Fall kann man $N = p + q$ Supergravitation nicht für verschiedene p und q unterscheiden. Es befinden sich ebenfall eine von p und q abhängige Zahl an Vektorfeldern im Gravitonmultiplett, so daß man den Eindruck haben könnte, die hier beschriebenen Supergravitationstheorien seien nicht die allgemeinst-möglichen. Dies ist jedoch nicht der Fall [42], was direkt mit dem nichtpropagierenden Charakter des Gravitonmultipletts zusammenhängt. Vgl. die Diskussion in 3.3.2.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit war die Behandlung von lokaler Supersymmetrie in 2+1 Dimensionen. Wir haben die Details einer spontanen Symmetriebrechung von $N = 2$ nach $N = 1$ untersucht, d.h. insbesondere das Massenspektrum berechnet, die Reorganisation der Supermultipletts in $N = 1$ Multipletts gefunden und ferner die Eigenschaften der effektiven Wirkung bestimmt. Von besonderer Bedeutung war hier die Existenz eines nur in $D = 3$ möglichen topologischen Effekts, durch den die Eichfelder massiv werden. Weiterhin haben wir die Beziehung dieses topologischen Effekts zum drei-dimensionalen Analogon des wohlbekannten Super-Higgs-Mechanismus untersucht und dabei eine nicht nur oberflächliche Analogie gefunden.

Die Arbeit kann in folgende Richtungen fortgesetzt werden. Zunächst war die Untersuchung nur auf den Minkowski-Fall beschränkt, und es gilt, diese auf den AdS-Fall zu verallgemeinern. Dies ist unter Umständen nur möglich, wenn man ein völlig neues Modell entwickelt. (Vgl. die Diskussion in Abschnitt 4.4.) Ferner existiert eine topologisch massive und damit dynamische Erweiterung von reiner Supergravitation in $D = 3$ [29], und man könnte für diese dieselben Verallgemeinerungen durchführen, wie sie in [9, 23] für reine Supergravitation behandelt wurden: Ankopplung an nicht-lineare Sigmamodelle und eventuell Eichung der Isometrien. Im Zusammenhang mit einer partiellen Brechung im AdS Hintergrund könnte dies auch von weitergehendem Interesse sein. Denn hier hatten wir argumentiert, daß die Gravitinos einen Massenterm erhalten. Daß diese auch eine physikalische Masse implizieren, ist nicht wie in $D = 4$ von vornherein ausgeschlossen. In $D = 4$ ist nämlich keine massive Gravitation möglich, so daß die $N = 1$ Multipletts auch keine massiven Gravitinos enthalten können, während aufgrund der Möglichkeit topologisch massiver Gravitation und Supergravitation in $D = 3$ genau dies nicht ausgeschlossen ist. Es wäre interessant zu untersuchen, ob diese Möglichkeit in irgendeiner Form realisiert werden kann.

Eine spekulative Überlegung sei an dieser Stelle noch erlaubt. Wir hatten gefunden, daß die spontane Brechung von *Supergravitation* zu einem topologisch massiven

Eichfeld führt, ohne daß bei diesem die Eichinvarianz gebrochen ist. Könnte es umgekehrt auch möglich sein, daß die spontane Brechung der *Eichsymmetrie* im Falle geeichter Supergravitation zu einer topologisch massiven Supergravitation führt, ohne daß die Supersymmetrie gebrochen ist? Es ist zu vermuten, daß dies nur möglich ist für - noch zu konstruierende - an nicht-lineare Sigmamodelle gekoppelte Modelle topologisch massiver Supergravitation, bei denen einige Isometrien geeicht sind.

Anhang A

Die Lorentzgruppe in $D = 3$ und ihre Spinordarstellungen

A.1 Die Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe in drei Dimensionen ist die Gruppe $O(1,2)$ aller linearen Transformationen $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, die die quadratische Form $\eta(x,y) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ auf dem $\mathbb{R}^{1,2}$ invariant lassen. Hierbei ist die Metrik bezüglich der kanonischen Basis gegeben durch

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1). \tag{A.1}$$

Damit die Invarianz erfüllt ist, muß also gelten:

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma. \tag{A.2}$$

Da dies für beliebige x gelten muß, folgt

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \text{ bzw. in Matrixschreibweise } \Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \tag{A.3}$$

Hieraus folgt also mit dem Determinantenmultiplikationstheorem

$$(\det(\Lambda))^2 = 1 \text{ und damit } \det(\Lambda) = \pm 1. \tag{A.4}$$

Wie im vierdimensionalen Fall unterscheidet man hiermit zwischen eigentlichen und uneigentlichen Lorentztransformationen. Ferner gilt

$$\eta_{00} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00} \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 + \eta_{ii} \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - [(\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2] = 1, \tag{A.5}$$

also

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + [(\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2] \geq 1. \tag{A.6}$$

$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ definiert orthochore, $\Lambda^0{}_0 \leq 1$ definiert nichtorthochore Lorentztransformationen.

Da det eine stetige Funktion ist und sich das Vorzeichen von $\Lambda^0{}_0$ wegen (A.6) nicht auf stetige Weise ändern läßt, zerfällt die Lorentzgruppe also wie $O(1,3)$ topologisch in vier Zusammenhangskomponenten. Im folgenden betrachten wir in der Regel die Anteile:

$$SO(1,2) := \{\Lambda \in O(1,2) | \det(\Lambda) = 1\}, \text{ bzw.} \tag{A.7}$$

$$SO^{\uparrow}(1,2) := \{\Lambda \in O(1,2) | \det(\Lambda) = 1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\} \tag{A.8}$$

In vier Dimensionen hat man die Situation, daß die nicht einfach zusammenhängende Lorentzgruppe lokal zur einfach zusammenhängenden Gruppe $SL(2,\mathbb{C}) := \{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) | \det(M) = 1\}$ isomorph ist. Genauer gilt: Die sogenannte quantenmechanische Lorentzgruppe $SL(2,\mathbb{C})$ ist die zweifache und universelle Überlagerung der eingeschränkten Lorentzgruppe. Dies zeigt man üblicherweise dadurch, daß man ein Element aus $SL(2,\mathbb{C})$ durch Konjunktion auf eine zu einem Vierervektor korrespondierende hermitesche Matrix wirken läßt:

$$P \longrightarrow P' = MPM^{\dagger}. \tag{A.9}$$

Letztere erhält man durch Kontraktion eines Vierervektors mit den Sigmamatrizen $\sigma^{\mu} := (-1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, wobei das Viererquadrat sich gerade als Determinante ergibt, so daß manifest wird, daß jedes Element aus $SL(2,\mathbb{C})$ eine Lorentztransformation liefert. Ein analoges Resultat gilt in drei Dimensionen: Die Lorentzgruppe ist nicht einfach zusammenhängend, wird aber durch $SL(2,\mathbb{R})$ zweifach überlagert, das heißt, die beiden Gruppen sind lokal isomorph und haben insbesondere dieselbe Lie-Algebra. Im Unterschied zum vierdimensionalen Fall ist $SL(2,\mathbb{R})$ selbst jedoch nicht einfach zusammenhängend. Dies sieht man wie folgt ein: Nach der reellen Version des Polarzerlegungstheorems gilt für jede nichtsinguläre, reelle Matrix M

$$M = ue^h, \tag{A.10}$$

wobei u orthogonal und h symmetrisch ist. Für $\det(M) = 1$ ist $u \in SO(2) \cong U(1) \cong S^1$ und h wegen $1 = \det(e^h) = e^{\mathrm{Tr}(h)}$ spurfrei. Solche Matrizen sind von der Form

$$h = \begin{pmatrix} c & a \\ a & -c \end{pmatrix}, \tag{A.11}$$

also ist die Menge dieser Matrizen isomorph zu $\mathbb{R}^2$. Topologisch ist $SL(2,\mathbb{R})$ also $S^1 \times \mathbb{R}^2$, d.h. nicht einfach zusammenhängend, denn die 1. Fundamentalgruppe ist $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Die lokale Isomorphie $SO^{\uparrow}(1,2) \cong SL(2,\mathbb{R})$ läßt sich nun auf verschiedene Weisen realisieren, von denen einige alternative noch in späteren Abschnitten behandelt werden. Setzt man in Analogie zum vierdimensionalen Fall $\sigma^{\mu} := (-1, \sigma^1, \sigma^3)$, $\mu = 0, 1, 2$, so ist

$$\begin{aligned} P := \sigma^{\mu} P_{\mu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P_0 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P_2 \\ &= \begin{pmatrix} -P_0 + P_2 & P_1 \\ P_1 & -P_0 - P_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{A.12}$$

also $\det(P) = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 = P^\mu P_\mu$ und $\det(P') := \det(MPM^t) = \det(P)$ für $M \in SL(2,\mathbb{R})$. Die so gewonnene Identifikation mit Lorentztransformationen ist überdies ein Gruppenhomomorphismus, denn sei $M \in SL(2,\mathbb{R})$ und $\Lambda(M)$ die dazugehörige Lorentztransformation, dann gilt:

$$MX_\mu \sigma^\mu M^t = X'_\mu \sigma^\mu = \Lambda(M)_\mu{}^\nu X_\nu \sigma^\mu. \tag{A.13}$$

Wendet man nun hierauf eine weiter Transformation $N \in SL(2,\mathbb{R})$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} NX'_\mu \sigma^\mu N^t &= NMX_\mu \sigma^\mu M^t N^t = \Lambda(NM)_\alpha{}^\nu X_\nu \sigma^\alpha \\ &= \Lambda_\alpha^{\ \beta}(N) X'_\beta \sigma^\alpha = \Lambda_\alpha^{\ \beta}(N) \Lambda_\beta^{\ \nu}(M) X_\nu \sigma^\alpha \end{aligned} \tag{A.14}$$

Es gilt also $\Lambda(NM) = \Lambda(N)\Lambda(M)$. Da nun genau $\pm M$ dieselbe Lorentztransformation liefern, hat man die zweifache Überlagerung von $SO^\uparrow(1,2)$. Außerdem ist $\dim SL(2,\mathbb{R}) = 3$, d.h., man hat einen lokalen Isomorphismus.

A.1.1 Die Lie-Algebra der $SO(1,2)$

Faßt man wie oben geschehen die Lorentzgruppe als Matrixgruppe der $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ auf, so bildet sie eine Lie-Gruppe, deren Lie-Algebra - interpretiert als Tangentialraum an der Identität - ebenfalls eine Matrixalgebra ist. Diese sei bezeichnet als $so(1,2)$. Es gilt

$$so(1,2) = \{\mathfrak{a} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \mathfrak{a}^t = -\eta \mathfrak{a} \eta\}. \tag{A.15}$$

Zum Beweis sei $\Lambda \in SO(1,2)$, dann ist $\Lambda(t) = \exp(t\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a} \in so(1,2)$. Aus $\Lambda^t(t)\eta\Lambda(t) = \eta$ folgt $[\exp(t\mathfrak{a})]^t \eta [\exp(t\mathfrak{a})] = \eta$, also

$$\frac{d}{dt}\{[\exp(t\mathfrak{a})]^t \eta [\exp(t\mathfrak{a})]\} \mid_{t=0} = 0, \tag{A.16}$$

was wegen $T_{id}SO(1,2) = so(1,2)$ eine Bedingung an die Elemente von $so(1,2)$ liefert:

$$0 = \frac{d}{dt}[\exp(t\mathfrak{a})]^t \eta \exp(t\mathfrak{a}) \mid_{t=0} + [\exp(t\mathfrak{a})]^t \eta \frac{d}{dt}[\exp(t\mathfrak{a})] \mid_{t=0}. \tag{A.17}$$

Es folgt

$$\mathfrak{a}^t \eta + \eta \mathfrak{a} = 0 \text{ und damit } \mathfrak{a}^t = -\eta \mathfrak{a} \eta. \tag{A.18}$$

Hieraus kann man nun die Form der Generatoren explizit bestimmen, und man findet:

$$so(1,2) = \left\{ \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & -a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 0 \end{pmatrix} \mid a_{01}, a_{02}, a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \tag{A.19}$$

Eine naheliegende Wahl für die Generatoren, d.h. für die Basis der Lie-Algebra, ist die folgende:

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

Die Lorentzgruppe in $D = 3$ ist also dreidimensional, und dies entspricht gerade Drehungen um eine Achse sowie Boosts in zwei unabhängige Raumrichtungen. Hiermit lassen sich nun explizit die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra berechnen:

$$\begin{aligned}
[N_1, N_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -M, \\
[N_1, M] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -N_2, \\
[N_2, M] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_1.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Insgesamt ist die Lie-Algebra also

$$[N_i, N_j] = -\varepsilon_{ij} M, \; [N_i, M] = -\varepsilon_{ij} N_j, \tag{A.22}$$

wobei ε_{ij} der total antisymmetrische Tensor 2. Stufe mit $\varepsilon_{12} = +1$ ist.

Möchte man eine Lorentztransformation als $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = [\exp(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma})]^{\mu}{}_{\nu}$ schreiben, wobei eine infinitesimale Transformation der Raumzeit gleichzeitig gegeben ist durch $x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, so empfiehlt es sich, die folgenden hermiteschen und antihermiteschen Generatoren einzuführen: $K_l := iN_l$, d.h. $K_l^{\dagger} = -K_l$ und $J := iM$, d.h. $J^{\dagger} = J$. Die Vertauschungsrelationen ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned}
[J, K_l] &= -[M, N_l] = -\varepsilon_{lk} N_k = i\varepsilon_{lk} K_k \\
[K_i, K_j] &= -[N_i, N_i] = \varepsilon_{ij} M = -i\varepsilon_{ij} J
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Die neue Basis $M_{\mu\nu}$ der Lie-Algebra ergibt sich formal als eine folgendermaßen definierte 3×3-Matrix:

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ij} M_{ij} := J \text{ für } i, j = 1, 2 \text{ und } M_{0i} := -K_i, i = 1, 2, \text{ d.h.} \tag{A.24}$$

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 \\ K_1 & 0 & J \\ K_2 & -J & 0 \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

Diese $M_{\mu\nu}$ haben die oben geforderte Eigenschft, was man folgendermaßen einsieht: Die Komponenten der matrixwertigen Einträge von $M_{\mu\nu}$ sind gegeben durch

$$(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = i(\eta_{\sigma\nu}\delta^{\mu}_{\rho} - \eta_{\rho\nu}\delta^{\mu}_{\sigma}), \tag{A.26}$$

wie man direkt durch Vergleich der entsprechenden Komponenten verifiziert. Betrachtet man nun andererseits eine infinitesimale Lorentztransformation der Form $x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, wobei die $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ antisymmetrisch sind, so muß bis zur 1.

Ordnung gelten: $\omega^\mu{}_\nu = -\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$. Diese Gleichung wird durch die Darstellung (A.26) der $M_{\mu\nu}$ gelöst:

$$-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\eta_{\sigma\nu}\delta^\mu_\rho - \eta_{\rho\nu}\delta^\mu_\sigma) = \frac{1}{2}(\omega^\mu{}_\nu - \omega_\nu{}^\mu) = \omega^\mu{}_\nu. \tag{A.27}$$

Diese Generatoren $M_{\mu\nu}$ der Lie-Algebra erfüllen nun die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{A.28}$$

Dies verifiziert man direkt durch Einsetzen von (A.26) in vollkommener Analogie zum vierdimensionalen Fall. (Explizit ausgeführt findet man die Rechnung etwa in [7]).

A.1.2 Spinordarstellung der Lorentzgruppe

Gesucht wird zunächst eine Matrixdarstellung der Cliffordalgebra $C(1,2)$, d.h. der Cliffordalgebra relativ zur quadratischen Form $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1)$. Diese wird erzeugt durch die Gammamatrizen Γ^0, Γ^1, Γ^2, die die Algebra

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{A.29}$$

erfüllen. Für die Pauli-Matrizen gilt jedoch bekanntlich die Relation

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}. \tag{A.30}$$

Man erhält hiermit sofort eine Darstellung von (A.29):

$$\gamma^0 = -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \gamma^2 = -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.31}$$

Die Darstellung ist also zweidimensional, und in der Tat gibt es zu einer Cliffordalgebra mit $2n+1$ Gammamatrizen genau zwei durch $\pm\gamma^\mu$ gegebene inäquivalente Darstellungen der Dimension 2^n (Siehe hierzu [43]). Im Fall $D=3$ gibt es also eine zu (A.31) inäquivalente Darstellung. Die Kommutatoren $M_{\mu\nu} := \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ bilden dann eine Darstellung der Lorentzalgebra, wie man durch wiederholtes Ausnutzen von (A.29) verifiziert. Objekte, die sich in der hieraus resultierenden Darstellung der Lorentzgruppe transformieren, nennt man Diracspinoren. Diese sind in $2+1$ Dimensionen also 2-komponentige Größen. Nach [43] kann man an die Gammamatrizen Realitätsbedingungen stellen, d.h. man kann diese reell wählen oder genauer: reinimaginär, so daß etwa die Dirac-Gleichung reell wird. Man sieht, daß unsere Wahl (A.31) diese Bedingung erfüllt. Die aus dieser Darstellung gewonnene Darstellung der Lorentzgruppe ist nun reell, d.h. später noch zu diskutierende Realitätsbedingungen an die Diracspinoren werden eine manifest lorentzinvariante Bedeutung haben.

A.1.3 Lorentzinvariante Bilinearformen

In der Wirkung für das Diracfeld kommen Ausdrücke der Form $i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ vor, von denen wir Lorentzinvarianz verlangen. Es stellt sich also die Frage, was die Bedeutung des Querstriches ist. Wie nicht anders zu erwarten, ist wie im vierdimensionalen Fall $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, was man ganz ähnlich zeigt: Für $\mu, \nu = 1, 2$ gilt $[M^{\mu\nu}, \gamma^0] = 0$, denn in der Spinordarstellung ist

$$\begin{aligned}[M^{\mu\nu}, \gamma^0] &= \frac{i}{4}[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^0] = \frac{i}{4}([\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^0] - [\gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^0]) \\ &= \frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0 - \gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^0 + \gamma^0\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= \frac{i}{4}(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^0\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^0\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= 0,\end{aligned} \tag{A.32}$$

wobei die vorletzte Gleichung mit der Antivertauschbarkeit der Gammamatrizen folgt. Ist ferner $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ und $\mu \neq \nu$, dann ist $\{M^{\mu\nu}, \gamma^0\} = 0$ (für $\mu = \nu$ ist $M_{\mu\nu} = 0$ und dies gilt trivialerweise). Der Beweis erfolgt weitgehend analog zum obigen, nur mit dem Unterschied, daß $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu$, so daß sich hier im Antikommutator alle Terme wegheben. Betrachtet man nun eine Lorentztransformation $1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$, so gilt:

$$\psi^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi} \longrightarrow [(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\psi]^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^\dagger)\gamma^0. \tag{A.33}$$

In der obigen Bestimmung der $M_{\mu\nu}$ war J hermitesch und die K_i sind antihermitesch[1]. Für den Rotationsanteil, d.h. $\mu, \nu = 1, 2$, gilt also $(M_{\mu\nu})^\dagger = M_{\mu\nu}$, so daß wegen (A.32) folgt:

$$\psi^\dagger(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^\dagger)\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) = \psi^\dagger\gamma^0\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}, \tag{A.34}$$

wobei $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ die Lorentztransformation in Spinordarstellung bezeichnet. Entsprechend gilt im Boostanteil, also für $\mu = 0$ oder $\nu = 0$, $(M_{\mu\nu})^\dagger = -M_{\mu\nu}$ und damit wegen $\{M_{\mu\nu}, \gamma^0\} = 0$:

$$\psi^\dagger(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^\dagger)\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) = \psi^\dagger\gamma^0\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}. \tag{A.35}$$

Insgesamt gilt also:

$$\overline{\psi}\psi \longrightarrow \overline{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi = \overline{\psi}\psi, \tag{A.36}$$

d.h. $\overline{\psi}\psi$ ist eine Lorentzinvariante.

[1] Daß dies auch in Spinordarstellung erfüllt ist, kann man nachrechnen; so gilt etwa $M^{01} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. diese ist antihermitesch.

A.1.4 Majoranaspinoren

Wie bereits erwähnt, kann man in $2+1$ Dimensionen gewisse Realitätsbedingungen an die Diracspinoren stellen. Genauer heißt dies, daß es Majoranaspinoren gibt, d.h. Spinoren, die gleich ihrem Ladungskonjugierten sind. Dabei ist die Ladungskonjugation gegeben durch

$$\psi^c = C\overline{\psi}^t, \tag{A.37}$$

wobei C die Ladungskonjugationsmatrix bezeichnet, die durch die Bedingung

$$C(\gamma^\mu)^t C^{-1} = -\gamma^\mu \tag{A.38}$$

bestimmt ist.[2] In der obigen rein-imaginären Darstellung der Cliffordalgebra durch die γ^μ ist eine Darstellung von C einfach gegeben durch $C = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Man rechnet unmittelbar nach, daß die definierende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
C(\gamma^0)^t C^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^0 \\
C(\gamma^1)^t C^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -\gamma^1 \\
C(\gamma^2)^t C^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^2
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Es ist nützlich, die Ladungskonjugationsmatrix in äquivalenten Darstellungen bestimmen zu können. Hierzu seien Γ^μ und γ^μ äquivalente Darstellungen, d.h. es gelte $\gamma^\mu = S\Gamma^\mu S^{-1}$ für ein geeignetes S. Gesucht ist nun also eine Matrix C' mit der Eigenschaft $C'(\gamma^\mu)^t(C')^{-1} = -\gamma^\mu$. Es muß also gelten:

$$\begin{aligned}
C'(S\Gamma^\mu S^{-1})^t(C')^{-1} &= -S\Gamma^\mu S^{-1} \\
\Longleftrightarrow S^{-1}C'(S^{-1})^t(\Gamma^\mu)^t S^t(C')^{-1}S &= -\Gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Diese Gleichung kann man offensichtlich erfüllen, indem man $C := S^{-1}C'(S^{-1})^t$ und damit $C^{-1} = S^t(C')^{-1}S$ setzt. Es ist dann

$$C' := SCS^t. \tag{A.41}$$

Man kann jetzt die Existenz von Majoranaspinoren beweisen, denn für diese muß nach Definition gelten:

$$\begin{aligned}
\psi^c = C\overline{\psi}^t &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}(\gamma^0)^t\psi^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

[2] Diese Bedingung erhält man aus der Forderung, daß die Ladungskonjugierte ψ^c bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes die Dirac-Gleichung $(i\gamma^\mu\partial_\mu + eA_\mu\gamma^\mu - m)\psi^c = 0$ lösen muß, wenn ψ die Gleichung $(i\gamma^\mu\partial_\mu - eA_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0$ erfüllt.

Die Majoranaspinoren sind also genau die reellen Diracspinoren. Wie schon angemerkt impliziert die Tatsache, daß die Lorentztransformationen reell sind, daß Majoranaspinoren in einem Bezugssystem auch solche in einem anderen sind.

A.2 Die Beziehung zwischen $SL(2,\mathbb{R})$ und $SO^{\uparrow}(1,2)$

Wie schon in A.1 erläutert ist $SL(2,\mathbb{R})$ die zweifache Überlagerung von $SO^{\uparrow}(1,2)$. Eine Möglichkeit dies einzusehen wurde bereits angegeben. Interessant ist nun, daß es neben dieser Realisierung noch einige alternative gibt, so daß die Frage zu klären ist, welcher von diesen Isomorphismen in dem Sinne ausgezeichnet ist, daß er gleichzeitig die Transformationen der Spinoren liefert. Gemeint ist damit folgendes: Betrachtet man statt der üblichen Kontraktion eines Dreiervektors mit den Sigmamatrizen etwa die Kontraktion mit den Gammamatrizen - die in $D = 3$ ja ebenfalls 2×2-Matrizen sind -, so erhält man:

$$\begin{aligned} P := \gamma^\mu P_\mu &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} P_0 + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} P_2 \\ &= \begin{pmatrix} iP_1 & i(P_0 - P_2) \\ -i(P_0 + P_2) & -iP_1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{A.43}$$

Es gilt also ebenso $\det(\gamma^\mu P_\mu) = -P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 = -P_\mu P^\mu$, d.h. man kann Elemente aus $SL(2,\mathbb{R})$ genauso auf die so gewonnene Matrix wirken lassen und erhält damit eine Lorentztransformation.[3] Eine weitere Realisierung dieser Äquivalenz erhält man, wenn man die Kombination $\widetilde{\sigma}^\mu := \gamma^\mu C$, die im nächsten Kapitel eine Rolle spielen wird, betrachtet. Für diese gilt

$$\widetilde{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \widetilde{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.44}$$

und damit

$$\widetilde{\sigma}^\mu P_\mu = \begin{pmatrix} -P_0 + P_2 & P_1 \\ P_1 & -P_0 - P_2 \end{pmatrix} . \tag{A.45}$$

Wieder gilt also $\det(\widetilde{\sigma}^\mu P_\mu) = P^\mu P_\mu$. Man beachte, daß wir die Spinordarstellung gerade so gewählt haben, daß sich für $\tilde{\sigma}^\mu$ die reellen Sigmamatrizen ergeben. Die hierdurch gegebene Korrespondenz zwischen Dreiervektoren und Matrizen hat den Vorteil, daß letztere symmetrisch und reell sind, so daß man wie im vierdimensionalen Fall eine hermitesche Matrix hat. Aufgrunddessen werden wir im folgenden diesen Isomorphismus verwenden. Andererseits sind unter all diesen Realisierungen, von denen sich noch weitere finden lassen[4], diejenigen ausgezeichnet, die ebenfalls die Transformation der Spinoren liefern: Ist nämlich eine Lorentztransformation

[3] Da die Matrizen aus $SL(2,\mathbb{R})$ reell sind, können sie sowohl auf die in 1.1 konstruierte reelle Matrix wirken als auch auf die hier angegebene rein-imaginäre.

[4] Siehe etwa [45].

$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$ gegeben, so ist die korrespondierende Matrix $M \in SL(2,\mathbb{R})$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt, ebenso wie die Lorentztransformation in Spinordarstellung. Nun gilt zwar $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]) \in SL(2,\mathbb{R})^5$, jedoch ist a priori natürlich nicht klar, daß dieses dasselbe $M \in SL(2,\mathbb{R})$ ist. Im infinitesimalen, d.h. für die Lorentztransformation $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, ist der über die $\widetilde{\sigma}^\mu$ gewonnene Isomorphismus jedoch ein solcher. Dies rechnet man einfach nach: Es gilt

$$X' = X'_\mu \widetilde{\sigma}^\mu = (X_\mu + \omega_\mu{}^\nu X_\nu)\widetilde{\sigma}^\mu = X + \omega_{\mu\nu} X^\nu \widetilde{\sigma}^\mu, \tag{A.46}$$

während diese Transformation andererseits gegeben sein muß durch

$$\begin{aligned} X' = MXM^t &= (1 + \frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu])X_\mu\widetilde{\sigma}^\mu(1 + \frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^t) \\ &= X_\mu\widetilde{\sigma}^\mu + \frac{1}{8}(\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]X_\mu\widetilde{\sigma}^\mu + X_\mu\widetilde{\sigma}^\mu\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^t). \end{aligned} \tag{A.47}$$

Insgesamt muß also gelten

$$\omega_{\mu\nu} X^\nu \widetilde{\sigma}^\mu = \frac{1}{8}\omega_{\rho\sigma}([\gamma^\rho,\gamma^\sigma](X_\mu\widetilde{\sigma}^\mu) + (X_\mu\widetilde{\sigma}^\mu)[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]^t). \tag{A.48}$$

Daß diese Relation erfüllt ist, rechnet man unmittelbar in der verwendeten Darstellung nach.

Es folgen noch einige Bemerkungen zum Hoch- und Runterziehen von Indizes. Wie eben festgestellt transformiert sich ein Diracspinor unter $SL(2,\mathbb{R})$, d.h.

$$\psi^\alpha \longrightarrow \psi^{\alpha\prime} = M^\alpha_{\ \beta}\psi^\beta \text{ für } M^\alpha_{\ \beta} \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{A.49}$$

Möchte man nun Lorentzinvarianten durch Kontraktion bilden, d.h durch $\psi^\alpha\psi_\alpha$, so muß sich ein Spinor mit unterem Index gemäß

$$\psi_\alpha \longrightarrow \psi'_\alpha = (M^{-1})^\beta{}_\alpha \psi_\beta \tag{A.50}$$

transformieren. Gesucht ist nun eine Matrix $\iota^{\alpha\beta}$, die Spinorindizes hochzieht bzw. deren Inverses $\iota_{\alpha\beta}$ Indizes herunterzieht. Es muß also gelten:

$$\psi'^\alpha = \iota^{\alpha\beta}\psi'_\beta = \iota^{\alpha\beta}(M^{-1})^\gamma{}_\beta\psi_\gamma = M^\alpha_{\ \beta}\psi^\beta = M^\alpha_{\ \beta}\iota^{\beta\gamma}\psi_\gamma. \tag{A.51}$$

Da dies für beliebige ψ_γ gelten soll, folgt $\iota^{\alpha\beta}(M^{-1})^\gamma{}_\beta = M^\alpha_{\ \beta}\iota^{\beta\gamma}$, d.h. in Matrixschreibweise $\iota(M^{-1})^t = M\iota$ bzw. $\iota = M\iota M^t$, also

$$\iota^{\alpha\beta} = \iota^{\gamma\delta} M^\alpha_{\ \gamma} M^\beta_{\ \delta}. \tag{A.52}$$

Dies wird bekanntlich durch $\epsilon^{\alpha\beta}$ erfüllt [8], da ein invarianter Tensor bezüglich $SL(2,\mathbb{C})$ auch einer bezüglich der Untergruppe $SL(2,\mathbb{R})$ ist. Wir wählen für diese Matrix $\iota^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\iota_{\alpha\beta} = (\gamma^0)_{\alpha\beta}$, wie sie etwa in [12] benutzt wird.

[5] Dies kann man direkt verifizieren: $\mathrm{Tr}(\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]) = \omega_{\mu\nu}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) - \omega_{\mu\nu}\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu) = 0$, d.h. wegen $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$ ist $\det(\Lambda_{\frac{1}{2}}) = \exp(\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu])) = 1$.

Letztere hat nämlich den Vorteil, die Äquivalenz zur anderen Lorentzinvarianten $\overline{\psi}\psi$ herzustellen. Diese war für Majoranaspinoren gegeben durch

$$\overline{\psi}\psi = \psi^t\gamma^0\psi = \psi^\alpha(\gamma^0)_{\alpha\beta}\psi^\beta = -\psi^\alpha\psi^\beta(\gamma^0)_{\beta\alpha} = \psi^\alpha\psi^\beta\iota_{\beta\alpha} = \psi^\alpha\psi_\alpha, \tag{A.53}$$

d.h. die beiden Lorentzinvarianten sind letztlich dieselben. Unsere Konvention ist hier so, daß $\iota^{\alpha\beta}\iota_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma$.

A.3 Darstellungstheorie von $SO^\uparrow(1,2)$

Wir werden nun diejenigen Aspekte der Darstellungstheorie von $SO^\uparrow(1,2)$ behandeln, die für uns physikalisch aus folgendem Grund bedeutsam sind. Zum eigentlichen Verständnis von Supersymmetrie gilt es nämlich die Frage zu klären, ob der Begriff des Spins ein dreidimensionales Analogon besitzt. Grob stellt sich die Situation in $D = 4$ wie folgt dar. Die irreduziblen Darstellungen der eingeschränkten Poincaregruppe werden durch zwei Zahlen klassifiziert: Positiven reellen Zahlen, die der Masse eines Feldes oder Zustandes entsprechen und Elementen aus $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, die den Spin des Zustandes angeben. Beide ergeben sich als Eigenwerte der Casimiroperatoren der Poincaregruppe, die in irreduziblen Darstellungen proportional zur Eins sind: Die ersteren als Eigenwert des Poincare-Casimiroperators $P^\mu P_\mu = P^2$, die letzteren als Eigenwerte von $W^\mu W_\mu$, wobei $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ der Pauli-Ljubanski-Vektor ist. Direkter sieht man dem Spin seine Eigenschaft, die Darstellungen zu klassifizieren, wie folgt an. Für jedes $A \in SL(2,\mathbb{C})$ ist die Darstellung $D^{(\frac{j}{2},\frac{k}{2})}$, definiert auf symmetrischen $\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_j,\dot\beta_1\ldots\dot\beta_k}$ durch

$$\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_j,\dot\beta_1\ldots\dot\beta_k} \longmapsto A_{\alpha_1}^{\;\rho_1}\ldots A_{\alpha_j}^{\rho_j}\overline{A}_{\dot\beta_1}^{\;\dot\sigma_1}\ldots\overline{A}_{\dot\beta_k}^{\;\dot\sigma_k}\xi_{\rho_1\ldots\rho_j,\dot\sigma_1\ldots\dot\sigma_k}, \tag{A.54}$$

eine irreduzible, und in der Tat sind alle solchen von dieser Form [44]. Daß ein Zustand den Spin s hat, heißt nun nichts anderes, als daß er sich etwa unter $D^{(\frac{s}{2},0)}$ transformiert.

Wir werden nun [45] folgen und die unitären, irreduziblen Darstellungen (UID) von $SO^\uparrow(1,2)$ untersuchen.[6] Hierzu betrachten wir zunächst die Poincaregruppe $ISO^\uparrow(1,2)$[7], für deren Untergruppe der Translationen T die unitären Darstellungen von der Form

$$T \ni a \longmapsto e^{ip\cdot a} \tag{A.55}$$

sind. Da T die Struktur eines Vektorraums trägt, kann man p als Element des Dualraums $\tilde{T}$ von T auffassen. Die Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen werden also durch die Elemente von $\tilde{T}$ klassifiziert. Ferner operieren die Lorentztransformationen kanonisch auch auf $\tilde{T}$, und wir können zu gegebenem $p \in \tilde{T}$ den Orbit

$$O_p := \{\Lambda p \mid \Lambda \in SO^\uparrow(1,2)\} \tag{A.56}$$

[6]Physikalische Felder transformieren unter einer endlich-dimensionalen und nicht irreduziblen Darstellung, da ihre zusätzlichen Freiheitsgrade durch Feldgleichungen reduziert werden.

[7]Die Poincaregruppe ist wie zu erwarten das semi-direkte Produkt der Lorentzgruppe mit den Translationen in die drei unabhängigen Raumzeitrichtungen.

definieren. Die Konstruktion der UID wird nun wie folgt durchgeführt. Jede UID wird durch eine UID der Stabilisatorgruppe eines gewissen Orbits induziert [45], d.h. man kann die UID dadurch identifizieren, daß man zunächst alle möglichen Orbits klassifiziert, aus jedem dieser Orbits einen Repräsentanten auswählt und dann für dessen Stabilisatorgruppe die UID bestimmt. Anstatt alle Orbits zu untersuchen, werden hier nur die physikalisch interessanten behandeln:

$$O_m^+ = \{p \in \tilde{T} \mid p^2 = m^2, p_0 > 0\} \tag{A.57}$$

$$O_0^+ = \{p \in \tilde{T} \mid p^2 = 0, p_0 > 0\}. \tag{A.58}$$

Zunächst betrachten wir den massiven Fall (A.57), für welchen wir in das Ruhesystem transformieren, d.h. innerhalb des Orbits den Punkt $(m, 0, 0)$ auswählen. Zur Bestimmung der Stabilisatorgruppe werden wir die Äquivalenz zu $SL(2,\mathbb{R})$ ausnutzen, denn die Stabilisatorgruppe korrespondiert gerade zu der Untergruppe von $SL(2,\mathbb{R})$ mit

$$\Omega P \Omega^t = \Omega \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \Omega^t = \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}. \tag{A.59}$$

Die Bedingung lautet also $\Omega \cdot \Omega^t = \mathbf{1}$, d.h. die Stabilisatorgruppe zu O_m^+ ist $SO(2)$. Da $SO(2) \cong U(1)$ nicht einfach zusammenhängend ist, gehen wir zur universellen und ∞-fachen Überlagerung über, die in diesem Fall vermöge der Projektion

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{it} \in U(1) \tag{A.60}$$

die additive Gruppe $\mathbb{R}$ ist.[8] Die UID von $\mathbb{R}$ sind von der Form

$$D^j \colon \theta \longmapsto e^{ij\theta},\ j \in \mathbb{R}. \tag{A.61}$$

Die UID zu O_m^+ werden also durch $m \in \mathbb{R}^+$ und $j \in \mathbb{R}$ klassifiziert. Während m die Masse einer Darstellung kennzeichnet, stellt j also das drei-dimensionale Analogon des Spins dar, d.h. in $D = 3$ kann der Spin im massiven Fall beliebige reelle Werte annehmen. Zustände, die sich in einer Darstellung transformieren, die nicht zu ganz- oder halbzahligem Spin gehören, nennt man anyonisch ("any spin").

Wir kommen nun zum masselosen Fall (A.58). Hierzu wählen wir ein Bezugssystem, in dem $P^\mu = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, also $P_\mu = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ gilt. Für $\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lautet die Bedingung an die Elemente der Stabilisatorgruppe dann wegen (A.45)

$$\widetilde{\sigma}^\mu P_\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega^t = \begin{pmatrix} -a^2 & -ac \\ -ac & -c^2 \end{pmatrix}, \tag{A.62}$$

d.h. es gilt $c = 0$, $a = \pm 1$ und wegen $\det\Omega = 1$ auch $d = \pm 1$. Die Elemente der Stabilisatorgruppe von O_0^+ sind also von der Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} =: (a, \pm 1),\ a \in \mathbb{R}. \tag{A.63}$$

[8] Man vergleiche dies mit dem vierdimensionalen Fall, wo man anstatt der Drehgruppe $SO(3)$ die zweifache und universelle Überlagerung $SU(2)$ betrachtet.

Man sieht, daß diese Gruppe isomorph ist zum semi-direkten Produkt $\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{Z}_2$ die multiplikative Gruppe bestehend aus $\{\pm 1\}$ ist und $\mathbb{R}$ wieder als additive Gruppe verstanden wird. Die UID von $\mathbb{R}$ sind uns schon aus (A.61) bekannt, es verbleiben also nur noch die UID von $\mathbb{Z}_2$. Bis auf Äquivalenz gibt es aber außer der trivialen Darstellung $D^0(\pm 1) = 1$ nur die Darstellung

$$D^1(\pm 1) = \pm 1. \tag{A.64}$$

Die UID sind damit von der Form

$$D^{\epsilon,t} = D^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2} \ltimes D^t_{\mathbb{R}}, \tag{A.65}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ und $\epsilon = 0, 1$, je nachdem, welche der beiden UID von $\mathbb{Z}_2$ gemeint sind. Die Darstellungen zu $t \neq 0$ sind "unphysikalisch", da für diese vermutlich keine lokale Feldtheorie existiert [45]. Man erhält also einen diskreten "Spin" für $t = 0$, der aber nur zwei mögliche "Werte" annehmen kann: $\epsilon = 0, 1$. In diesem Sinne gibt es keinen adäquaten Spinbegriff im masselosen Fall.

A.4 Die Dualität von Vektoren und Skalaren in $D = 3$

Vektoren und Skalare stellen unterschiedliche Darstellungen der Lorentzgruppe dar, die sich entweder unter der Vektordarstellung, d.h. unter der Fundamentaldarstellung von $SO(1, 2)$, oder unter der trivialen Darstellung transformieren. In drei Dimensionen hat man jedoch eine on-shell-Dualität zwischen masselosen Eichvektorfeldern und masselosen Skalarfeldern. Genauer gilt: Jedes masselose Eichvektorfeld kann in ein Skalarfeld dualisiert werden; umgekehrt ist dies nicht immer möglich. Da diese Identifikation nur auf der Massenschale gültig ist, hängt die Dualitätsrelation von der Wirkung ab, und wir werden dies an einem Beispiel erläutern: Aus einem Vektorfeld erhält man bei Anwesenheit einer Metrik eine 1-Form $A = A_\mu dx^\mu$ und aus diesem durch Bildung der Feldstärke eine 2-Form $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Das Hodge-Dual hierzu ist in $D = 3$ eine 1-Form B, die aus folgenden Gründen als Differential eines Skalars aufgefaßt werden kann. Lokal gilt $B = d\phi$ nach dem Poincareschen Lemma genau dann, wenn $dB = 0$ ist. Daß das Hodge-Dual einer Feldstärke geschlossen ist, ist aber nichts anderes als die Bewegungsgleichung zur Yang-Mills-Wirkung. Die Yang-Mills-Wirkung

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right), \tag{A.66}$$

hat nämlich die Bewegungsgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, die in Differentialformen zu $d \star F = 0$ äquivalent ist, während die Bianchi-Identität $\partial_\mu \star F^\mu = 0$ zu $dF = 0$ korrespondiert. (sic!) Die Dualitätsrelation lautet explizit

$$B_\mu = (\star F)_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} = \partial_\mu \phi \tag{A.67}$$

bzw.

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\phi. \tag{A.68}$$

Man kann nun die Dualitätsrelation (A.68) in die Yang-Mills-Wirkung (A.66) einsetzen, um die Wirkung für die Skalarfelder zu finden. Wegen (A.80) erhält man

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho\phi\varepsilon^{\mu\nu\sigma}\partial_\sigma\phi = -\frac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi. \tag{A.69}$$

Es ergibt sich also die Wirkung eines freien, masselosen Skalarfeldes. Die Wirkung gestattet es also einerseits, eine explizite Dualität zwischen Vektorfeldern und Skalaren herzustellen und etabliert andererseits eine Freiheit hinsichtlich der Wahl der dynamischen Freiheitsgrade, nämlich des Vektorfeldes oder des Skalars. Bei einer komplizierteren Wirkung ändert sich entsprechend der Zusammenhang zwischen Vektoren und Skalaren. Je nach dem, welches Feld man als das propagierende auffaßt, hat man eine Bewegungsgleichung oder eine identisch erfüllte Integrabilitätsrelation: Formuliert man die Theorie etwa durch Vektorfelder, so ist die Bianchi-Identität $\partial_\mu B^\mu = 0$ identisch erfüllt, nicht nur dann, falls das Vektorfeld die Bewegungsgleichung löst. Im dualisierten Bild wird die Bianchi-Identität wegen (A.67) aber zu $\partial_\mu\partial^\mu\phi = \Box\phi = 0$, d.h. zur Bewegungsgleichung des freien Skalarfeldes. Umgekehrt wird diese Bewegungsgleichung zur Bianchi-Identität des redualisierten Vektorfeldes. In der Tat haben masselose Vektorfelder und masselose Skalare auch denselben Spin - in der abgeschwächten Bedeutung des Spinbegriffs von A.3 -, sind also beides Spin-0-Objekte, während massive Vektorfelder tatsächlich Spin 1 haben [45].

A.5 Nützliche Identitäten

Aus der Cliffordalgebra bzw. der expliziten Form der Gammamatrizen verifiziert man leicht folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu}\gamma_\nu &= i\gamma^\mu \text{ und } \gamma_\mu\gamma^{\mu\nu} = i\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu\gamma_\mu &= 3 \text{ und } \gamma_\mu\gamma^{\mu\nu}\gamma_\nu = 3i, \\ \gamma_{\mu\sigma}\gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\eta^\nu_\sigma + \gamma_\sigma\gamma^\nu). \end{aligned} \tag{A.70}$$

Haben die Spinoren ferner antikommutierende Komponenten, was wir im folgenden wie üblich annehmen wollen, so gilt für Majoranaspinoren:

$$\overline{\chi}\gamma^\mu\psi = -\overline{\psi}\gamma^\mu\chi. \tag{A.71}$$

Aus der expliziten Form der Gammamatrizen folgt außerdem:

$$(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu \text{ sowie } (\gamma_\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma_\mu. \tag{A.72}$$

Hiermit zeigt man nun

$$\overline{a\gamma_\mu\chi} = a^*(\gamma_\mu\chi)^\dagger\gamma^0 = a^*\chi^\dagger\gamma^0\gamma_\mu = a^*\overline{\chi}\gamma_\mu. \tag{A.73}$$

(A.71) hat damit folgende Verallgemeinerung für Gravitinofelder:

$$\overline{\chi}_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_\nu = \overline{\gamma^\nu \psi_\nu} \gamma^\mu \chi_\mu = \psi_\nu^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \chi_\mu = \overline{\psi}_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \chi_\nu, \tag{A.74}$$

bzw. für die Lorentzgeneratoren:

$$\overline{\chi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu = \overline{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \chi_\nu. \tag{A.75}$$

Ferner ist

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma, \tag{A.76}$$

so daß für die Lorentzgeneratoren in Spinordarstellung folgt:

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma}\gamma_\sigma. \tag{A.77}$$

Für die Sigammatrizen gelten außerdem die Identitäten

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \sigma_2)(\sigma_3 - i\sigma_1) &= 2(\sigma_3 - i\sigma_1), \\ (\sigma_3 + i\sigma_1)(\mathbf{1} - \sigma_2) &= 2(\sigma_3 + i\sigma_1), \end{aligned} \tag{A.78}$$

sowie

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \sigma_2)^2 = \mathbf{1} - 2\sigma_2 + \sigma_2^2 &= 2(\mathbf{1} - \sigma_2), \\ (\sigma_3 + i\sigma_1)(\sigma_3 - i\sigma_1) = 2 - i[\sigma_3, \sigma_1] &= 2(\mathbf{1} + \sigma_2). \end{aligned} \tag{A.79}$$

Der ε-Tensor bzw. die Volumenform in $D = 3$ erfüllt die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho} &= \delta_\nu^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\nu^\beta, \\ \varepsilon^{\mu\nu\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho} &= 2\delta_\rho^\sigma. \end{aligned} \tag{A.80}$$

Literaturverzeichnis

[1] A. Einstein, *Physik und Wirklichkeit*, in: A. Einstein, *Aus meinen späten Jahren*, Deutsche Verlags-Anstalt (1953).

[2] P. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press (1986).

[3] J. Bagger und R. Altendorfer, *New Supersymmetry Algebras from Partial Supersymmetry Breaking*, hep-th/9809171 (25 Sep 1998).

[4] R. Kallosh, *Supergravity, M theory and Cosmology*, hep-th/0205315 (2003).

[5] M. Haack und J. Louis, *M Theory Compactified on Calabi-Yau Fourfolds with Background Flux*, Phys. Lett. B507: 296-304, hep-th/0103068 (2001).

[6] M. Berg, M. Haack und H. Samtleben, *Calabi-Yau Fourfolds with Flux and Supersymmetry Breaking*, JHEP 04, hep-th/0212255 (2003).

[7] H.J.W. Müller-Kirsten und A. Wiedemann, *Supersymmetry - An Introduction with Conceptual and Calculational Details*, World Scientific (1987).

[8] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, (2 ed.), Princeton University Press (1992).

[9] B. de Wit, A.K. Tollsten und H. Nicolai, *Locally Supersymmetric $D = 3$ Non-Linear Sigma Models*, Nucl. Phys. B392: 3-38, hep-th/9208074 (1993).

[10] S. Okubo, *Real Representations of Finite Clifford Algebras. I. Classification*, J. Math. Phys. 32: 1657-1668 (1991).

[11] H. Nicolai, *Supersymmetry, Kähler Geometry and Beyond*, erschienen in: R. Berndt, O. Riemenschneider, *Erich Kähler: Mathematische Werke/ Mathematical Works*, De Gruyter, in Vorbereitung.

[12] S.J. Gates, M.T. Grisaru, M. Rocek und W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1983).

[13] I. Affleck, J. Harvey und E. Witten, *Instantons and (Super-) Symmetry Breaking in* $(2+1)$ *Dimensions*, Nucl. Phys. B206: 413-439 (1982).

[14] H. Nishino, S. Gates, *Chern-Simons Theories with Supersymmetries in Three-Dimensions*, Int. J. Mod. Phys. A8: 3371-3422 (1993).

[15] J. Richard Gott, III und Mark Alpert, *General Relativity in a* 2+1-*Dimensional Space-Time*, Gen. Rel. Grav. 16: 243-247 (1984).

[16] S. Deser, R. Jackiw und G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*, Ann. Phys. 152: 220 (1984).

[17] E. Witten, *Is Supersymmetry Really Broken?*, Int. J. Mod. Phys. A10: 1247-1248, hep-th/9409111 (1995).

[18] E. Witten, *Strong Coupling And The Cosmological Constant*, Mod. Phys. Lett. A10: 2153-2156, hep-th/9506101 (1995).

[19] K. Becker, M. Becker und A. Strominger, *Three-dimensional Supergravity And The Cosmological Constant*, Phys. Rev. D51: 6603, hep-th/9502107 (1995).

[20] G. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields - Interactions*, Springer (2000).

[21] E. Witten, *2+1 Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, Nucl. Phys. B311: 46-78 (1988/89).

[22] M. Hayashi, *Classification of* $2+1$ *Dimensional Chern-Simons Supergravity Theories*, Prog. Theor. Phys., 88: 403-430 (1992).

[23] B. de Wit, I. Herger und H. Samtleben, *Gauged Locally Supersymmetric* $D=3$ *Nonlinear Sigma Models*, hep-th/0307006 (1 Jul 2003).

[24] H. Nicolai und H. Samtleben, *Chern-Simons vs. Yang-Mills gaugings in three dimensions*, Nucl. Phys. B668: 167-178, hep-th/0303213 (2003).

[25] J. Schonfeld, *A Mass Term for Three-dimensional Gauge Fields*, Nucl. Phys. B185: 157 (1981).

[26] S. Deser, R. Jackiw und S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Ann. of Phys. 140: 372-411 (1982).

[27] I. Oda und S. Yahikozawa, *The Role of Mass Term in the Three Dimensional and the Generalized Chern-Simons Theories*, Prog. Theor. Phys. 83: 845-849 (1990).

[28] S. Deser und R. Jackiw, *"Self-Duality" of Topological Massive Gauge Theories*, Phys. Lett. B139: 371-373 (1984).

[29] S. Deser und J.H. Kay, *Topologically Massive Supergravity*, Phys. Lett. B120: 97-100 (1983).

[30] S. Deser, *Massive Spin 3/2 Theories in 3 Dimensions*, Phys. Lett. B140: 321-323 (1984).

[31] S. Deser und Z. Yang, *A Remark on the Higgs Effect in Presence of Chern-Simons Terms*, Mod. Phys. Lett. A4: 2123-2124 (1989).

[32] S. Deser, R. Jackiw und S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. 48: 975-978 (1982).

[33] S. Cecotti, L. Girardello und M. Porrati, *Two into One Won't Go*, Phys. Lett. B145: 61 (1984).

[34] S. Ferrara, L. Girardello und M. Porrati, *Spontaneous Breaking of N=2 to N=1 in Rigid and Local Supersymmetric Theories*, Phys. Lett. B376: 275-281, hep-th/9512180 (1996).

[35] H. Nicolai und H. Samtleben, *Compact and Noncompact Gauged Maximal Supergravities in Three Dimensions*, JHEP, Vol. 04, hep-th/0103032 (2001).

[36] T. Fischbacher, H. Nicolai und H. Samtleben, *Vacua of Maximal Gauged* $D = 3$ *Supergravities*, Class. Quant. Grav. 19: 5279-5334, hep-th/0207206 (2002).

[37] H. Nicolai und H. Samtleben, *Maximal gauged supergravity in three dimensions*, Phys. Rev. Lett. 86: 1686-1689, hep-th/0010076 (2001).

[38] J. Louis, *Aspects of Spontaneous* $N = 2 \rightarrow N = 1$ *Breaking in Supergravity*, hep-th/0203138 (15 Mär 2002).

[39] B. Gunara, *Spontaneous N=2 to N=1 Supersymmetry Breaking and the Super-Higgs Effect in Supergravity*, Dissertation, Universität Halle (2003).

[40] A. Achucarro und P.K. Townsend, *A Chern-Simons Action for Three-dimensional Anti-deSitter Supergravity Theories*, Phys. Lett. B180: 89 (1986).

[41] J.M. Izquierdo und P.K. Townsend, *Supersymmetric spacetimes in (2+1) adS-supergravity models*, Class. Quant. Grav. 12: 895-924, gr-qc/9501018 (1995).

[42] H. Samtleben, Persönliche Mitteilung.

[43] P. Breitenlohner, *Supergravitation*, http://www.physik.uni-leipzig.de/TET/combo/ws96/ws96.shtml

[44] R.F. Streater und A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Addison-Wesley Publishing Company (1980).

[45] B. Binegar, *Relativistic field theories in three dimensions*, J. Math. Phys. 23(8) (1982).

Danksagung

Hiermit möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Prof. Jan Louis für die interessante Aufgabenstellung und die außerordentlich engagierte Betreuung bedanken. Großen Dank schulde ich ferner Henning Samtleben dafür, daß er mir vor der Veröffentlichung [23] zur Verfügung gestellt hat und außerdem für viele hilfreiche Erklärungen.

Ich bedanke mich bei Thomas Grimm, Hans Jockers, Anke Knauf und Andrei Micu dafür, daß ich in ihrem Büro stets willkommen war.

Für zahllose faszinierende Gespräche danke ich Falk Neugebohrn und Thorsten Prüstel.

Ferner bedanke ich mich bei meinen Eltern für ihre Unterstützung.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt und nur die aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 12. 9. 2003 Olaf Hohm