Protokoll zur 8. Sitzung des Proseminares: Einführung in die Relativitätstheorie

bei Dr. Benjamin Bahr

Thema: Die Einsteinschen Feldgleichungen
Vortragende: Paulina Goedicke, Vincent Bettaque
Datum: 26.09.2018
Protokoll: John Messerschmidt, Malte Holzapfel

Zusammenfassung

In diesem Protokoll wird die Herleitung der einsteinschen Feldgleichungen motiviert, begründet und diskutiert. Weiterhin werden mögliche Lösungen, bzw. die Schwierigkeit mit der Lösungen zu finden sind, kurz angeschnitten. Hierfür werden folgende Konzepte benötigt: die kovariante-Ableitung, Paralleltransport, Metriken.

1 Einführung

Um die Gravitation durch die Krümmung der Raumzeit zu beschreiben, müssen Annahmen postuliert werden, welche diese Gleichungen erfüllen müssen. Als Ausgangspunkt dient das Korrespondenzprinzip, welches besagt, dass die allgemeine Relativitätstheorie in die spezielle Relativitätstheorie übergeht, wenn die Raumzeit nicht gekrümmt ist ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). Die spezielle Relativitätstheorie geht wiederum in die Newton'sche Physik ohne Gravitation über, wenn $v << c$ also $\gamma \approx 1$. Weiterhin besagt das Korrespondenzprinzip, dass die allgemeine Relativitätstheorie für verschwindende Gravitationsfelder in die newtonsche Gravitation übergeht.
Die Feldgleichungen der ART müssen also ein ähnliche Form haben wie die Laplace-Gleichung zum Gravitationspotential:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) \tag{1}$$

wobei Φ das Potential, G die Gravitationskonstante und $\rho(\vec{r})$ die Massendichte in Abhängigkeit von $\vec{r}$ darstellt.

2 Bedingungen für die Einsteinschen Feldgleichungen

Aus dem Korrespondenzprinzip können wir zwei Bedingungen folgern:

1. Die Gleichungen müssen tensoriell sein.
2. Im Grenzfall wird die Gleichung zur newtonschen Feldgleichung (1).

Da die Massendichte in der ART durch den Energie-Impuls-Tensor ($T_{\mu\nu}$) verallgemeinert wird, kann angenommen werden, dass die Gleichung etwa folgende Form hat:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2}$$

Hierbei ist κ eine noch zu bestimmende Konstante. Aus dieser Gleichung können wir folgende Eigenschaften für $G_{\mu\nu}$ folgern:

1. Der Tensor $G_{\mu\nu}$ ist ein (0,2) Tensor
2. $G_{\mu\nu}$ ist symmetrisch
3. $G_{\mu\nu}$ besteht aus Ableitungen des Metriktensors

3 Riemannsche Krümmungstensor

Um die Krümmung auf einer Mannigfaltigkeit zu beschreiben, wird zunächst der Paralleltransport betrachtet. Wie in Abb. 3 zu sehen ist, verändert sich der Tangentialvektor durch den geschlossenen Paralleltransport auf einer gekrümmten Oberfläche. Die Änderung des Tangentialvektors beim Paralleltransport macht also eine Aussage über die Krümmung der Mannigfaltigkeit. Um diese zu bestimmen, wird der Paralleltransport auf einen infinitesimalen Weg betrachtet. Hierzu wird der Kommutator $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ der kovarianten Ableitung eines beliebigen Tangentialvektors V^ρ berechnet.

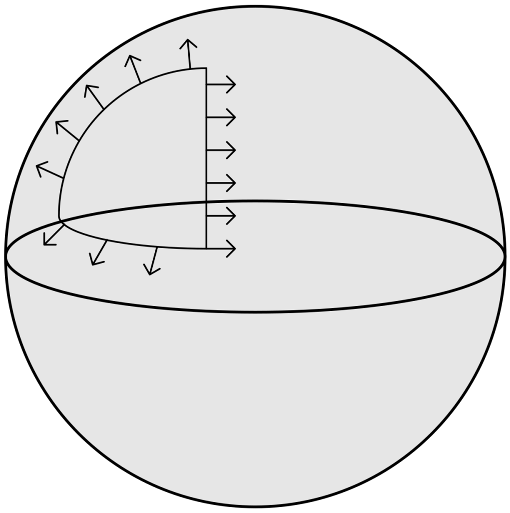

Abbildung 1: Röntgenspektrometer

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma})V^\sigma - \underbrace{(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})\nabla_\lambda V^\rho}_{T_\mu{}^\rho{}_\nu} \tag{3}$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen, da der Torsionstensor ($T_\mu{}^\rho{}_\nu$) in dieser Gleichung enthalten ist. Dieser verschwindet ($T_\mu{}^\rho{}_\nu = 0$), wenn ein torsionsfreier Zusammenhang vorliegt, was in der ART der Fall ist. Die durch den Kommutator beschriebene Krümmung nennen wir den Riemannschen Krümmungstensor:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{4}$$

Da bei einer flachen Metrik (SRT) die Christoffelsymbole verschwinden, verschwindet in diesen Fall auch der Riemannsche Krümmungstensor ($R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$). Um den Krümmungstensor vollkommen kovariant zu schreiben, wird der Metriktensor $g_{\rho\lambda}$ benutzt.

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} \tag{5}$$

Hierfür gelten folgende Symmetrien und Antisymmetrien:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \tag{6}$$
$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} \tag{7}$$
$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{8}$$

Aus diesen Beziehungen können durch Permutation der Indizes die Bianchi-Identitäten hergeleitet werden:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \tag{9}$$
$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \tag{10}$$

Wie oben bereits erwähnt wurde, wird für die Einsteinschen Feldgleichungen ein (0,2)-Tensor benötigt. Hierzu wird der Riemannschen Krümmungstensors kontrahiert:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \tag{11}$$

Dieser Tensor wird auch Ricci Tensor genannt. Aus (8) folgt dessen Symmetrie. Durch den Ricci-Tensor kann auch die Skalarkrümmung definiert werden:

$$R = g^{ab} R_{ab} \tag{12}$$

4 Einstein-Tensor

Mit dem Ricci-Tensor ist ein Tensor gegeben, der sowohl die Symmetrieeigenschaft erfüllt, als auch ein (0,2)-Tensor ist. Es könnt also angenommen werden, dass die gesuchte Feldgleichung folgende Form hat:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{13}$$

Aus der Energieerhaltung folgt jedoch:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{14}$$

Es müsste also folgen:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \tag{15}$$

Dass dies jedoch nicht im Allgemeinen gilt, folgt jedoch aus der zweiten Bianchi-Identität:

$$0 = \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} \tag{16}$$
$$\Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R \tag{17}$$

Es kann (13) kontrahiert werden zu: $R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T$, woraus wegen (15) folgt:

$$0 = \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R = \frac{1}{2} \kappa \nabla_\nu T \tag{18}$$

Hieraus würde jedoch folgen:

$$\nabla_\nu T = 0 \tag{19}$$

Da die kovariante Ableitung eines Skalaren sich aber auf eine einfache partielle Differentialgleichung reduziert, würde daraus folgen, dass T überall in der Raumzeit konstant ist. Dies kann jedoch nicht der Fall sein, da $T = 0$ im Vakuum gilt, in Materie jedoch nicht.

Wir können nun den Einstein-Tensor definieren:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{20}$$

Aus 17 folgt, dass $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ für diesen Tensor überall gilt. Für die Feldgleichungen kann also angenommen werden:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{21}$$

Die Proportionalitätskonstante κ muss noch bestimmt werden.

5 Näherung für schwache Felder

Um κ zu bestimmen, wird auf die anfangs gestellte Forderung zurückgegriffen, dass im Grenzfall schwacher Felder die Gleichungen der Relativitätstheorie in die Poisson-Gleichung der Newtonschen Gravitation übergehen. Es werden also folgende Annahmen getroffen:

1. Es wird von „Staub"-Teilchen ausgegangen, welche sich viel langsamer als die Lichtgeschwindigkeit bewegen.
2. Gravitationsfelder sind statisch.
3. Das Feld ist so schwach, dass sie als Störung der Raumzeit betrachtet werden können.

Die Annahmen können wie folgt in Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\frac{dx}{d\tau} << \frac{dt}{d\tau} \tag{22}$$

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \tag{23}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{24}$$

Die bereits bekannte Geodätengleichung lautet:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \tag{25}$$

Die Gleichung vereinfacht sich sich mit (22) zu:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{26}$$

Das Christoffelsymbol ist hier wegen (23):

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00} \tag{27}$$

Da wir schwache Felder angenommen haben kann der Metriktensor ausgedrückt werden durch:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma \Rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{28}$$

mit dem Störterm $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ und $\eta = diag(-1,1,1,1)$. Für das Christoffelsymbol gilt nun:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00} \tag{29}$$

Die Geodätengleichung lautet also nun:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{30}$$

Für die zeitliche Komponente des Störterm gilt: $\partial_0 h_{00} = 0$, weshalb:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \tag{31}$$

gilt, woraus $\frac{dt}{d\tau} = const.$ folgt. Nun werden die räumlichen Komponente der Geodätengleichung betrachtet:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\underbrace{\eta^{ii}}_{=1}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\partial_i h_{00} \tag{32}$$

Das Teilen auf beiden Seiten durch $\frac{d^2t}{d\tau^2}$ führt zu:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \tag{33}$$

Damit diese Gleichung in die Newtonsche Bewegungsgleichung erfüllt, muss $h_{00} = -2\phi$ gesetzt werden, mit $\phi = \frac{GM}{r}$.

6 Die Einsteingleichung für schwache Felder

Bei der Betrachtung eines „Staub"-Partikels ist der Energie-Impuls-Tensor: $T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$, mit der Viergeschwindigkeit, welche gesetzt wird zu:

$$U^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_\mu = \begin{pmatrix} \text{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich gilt: $T_{00} = \rho$. Der Energie-Impulstensor lautet also:

$$T = g^{00} T_{00} = -T_{00} = -\rho \tag{34}$$

Dies wird in (13) eingesetzt, woraus:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho \tag{35}$$

folgt. In dieser Gleichung wird der der Energie-Impuls-Tensor in Relation zu den Ableitung der Metrik gesetzt. Es muss also der Ricci-Tensor ausgewertet werden: $R_{00} = R^\lambda_{0\lambda 0}$, wobei wegen $R^0_{000} = 0$ nur die räumlichen Komponente betrachtet werden müssen:

$$R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \underbrace{\partial_0 \Gamma^i_{j0}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^i_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^i_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{j0}}_{=0} \tag{36}$$

Da nur der letzte Term nicht verschwindet genügt es diesen umzuformen:

$$R_{00} = R^i_{0i0} = \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\underbrace{\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda}}_{=0} - \partial_\lambda g_{00}) \right] = \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} = \left(-\frac{1}{2}\right)\Delta h_{00} \tag{37}$$

Nach (35) gilt also:

$$\Delta h_{00} = \kappa\rho \tag{38}$$

Da $h_{00} = -2\frac{GM}{r}$, als Newtonscher Grenzfall, bereits hergeleitet wurde folgt:

$$\kappa = 8\pi G \tag{39}$$

Dies und (20) wird nun in (21) eingesetzt, um die vollständige Einsteinsche Feldgleichungen zu erhalten.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \pm \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{40}$$

Für unterschiedliche Vorzeichenkonventionen ändert sich das Vorzeichen der Gleichung deshalb ist dies die allgemeine Form, hergeleitet wurde nur die Gleichung für das positive Vorzeichen.

Die Einsteinschen Feldgleichungen sind ein System aus 10 gekoppelten, nicht lineare Differentialgleichungen, weshalb die Lösung derselbigen sehr schwierig ist. Die bisher bekannten Lösungen beruhen auf Symmetriebedingungen. Um etwa die Schwarzschildlösung zu erhalten, welche die Schwarzschild - Metrik beinhaltet, die zur Beschreibung schwarzer Löcher dient, wird die Kugelsymmetrie genutzt, sowie die Vakuum-Feldgleichungen für den materiefreien Raum, bei denen der Energie-Impuls-Tensor verschwindet ($T_{\mu\nu} = 0$) und damit auch der Einstein-Tensor ($G_{\mu\nu} = 0$).