

Klassische Mechanik ¹

Gerhard Mack

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

11. Juli 2001

¹Vorlesung an der Universität Hamburg, SS 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Zahlenmäßige Beschreibung des Ortes von Punkten im Raum	5
3	Grundbegriffe der Mechanik	9
3.1	Trajektorie	9
3.2	Geschwindigkeit	9
3.2.1	Beispiel 1: Gleichförmige Bewegung	10
3.2.2	Beispiel 2: Gleichförmige Kreisbewegung um die z-Achse	11
3.3	Beschleunigung	11
3.3.1	Beispiel 1: Gleichförmige Bewegung	12
3.3.2	Beispiel 2: Gleichförmige Kreisbewegung	12
3.4	Impuls eines Massenpunktes	13
3.5	Drehimpuls eines Massenpunktes	13
3.5.1	Beispiel 1: Gleichförmige Bewegung	14
3.5.2	Beispiel 2: Gleichförmige Kreisbewegung um die z-Achse	15
3.6	Inertialsystem	15
4	Newtons Bewegungsgleichungen und Kraftgesetze	17
4.1	Lorentzkraft	18
4.2	Coulombkraft	18
4.3	Schwerkraft	18
4.4	Drehmoment	19
5	Arbeit, Potential, Energie	21
5.1	Arbeit	21

5.1.1	Beispiel: Verschiebung eines Massenpunktes in radialer Richtung von $\mathbf{r}_a = \mathbf{0}$ zum Punkt $\mathbf{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$	23
5.1.2	Beispiel: Bewegung um einen Kreis des Radius R in der xy -Ebene von $\mathbf{r}_a = (R, 0, 0)$ nach $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_a$ (geschlossener Weg)	23
5.2	Potential	24
5.2.1	Beispiel: 3-dimensionaler harmonischer Oszillator	24
5.2.2	Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials	26
5.2.3	Stokescher Satz	27
5.2.4	Berechnung des Potentials	27
5.3	Energie	29
5.3.1	Energieerhaltung	30
5.3.2	Bemerkung	31
5.4	Überblick über bisher angetroffene Erhaltungssätze für einen Massenpunkt	32
6	Harmonische Schwingungen in 1 Dimension	33
6.1	Lösungsmethoden für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	33
6.1.1	Superpositionsprinzip (mathematischer Satz)	34
6.1.2	Exponentialansatz (mathematischer Satz)	35
6.1.3	3. mathematischer Satz	36
6.2	Freie gedämpfte Schwingungen	36
6.2.1	$\lambda < \omega_0$ (unterkritische Dämpfung)	37
6.2.2	$\lambda > \omega_0$ (überkritische Dämpfung)	37
6.2.3	$\lambda = \omega_0$ (kritische Dämpfung)	37
6.3	Erzwungene Schwingungen	38
6.3.1	Allgemeine Lösung	39
6.3.2	Mathematischer Satz	40
6.3.3	Gedämpfte Schwingungen, Kraft $\propto e^{i\omega t}$	41
6.3.4	Überlagerung von Kräften	42
6.3.5	Superpositionsprinzip für die Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen	43
6.3.6	Der Satz von Fourier	44
6.3.7	Gedämpfte Schwingungen mit beliebiger zeitlich periodischer erzwingender Kraft	45

7 Lösung 1-dimensionaler Probleme mit Hilfe der Energieerhaltung	49
8 Bewegung im Zentralfeld	53
8.1 Allgemeine Theorie	53
8.1.1 Bahnkurve	57
8.1.2 Abzählen der Integrationskonstanten	57
8.2 Das Keplerproblem	58
8.2.1 Die Keplerschen Gesetze	58
8.2.2 Bahnkurven	59
8.2.3 Zeitlicher Ablauf der Bewegung auf Ellipsenbahnen . .	64
8.3 Streuung im Zentralfeld	67
8.3.1 Rutherford'scher Streuquerschnitt	69
8.3.2 Totaler Wirkungsquerschnitt	71
9 Zwangskräfte	73
9.1 Holonome Zwangsbedingungen	73
9.1.1 Bewegung eines Massenpunktes auf einer <i>ruhenden</i> <i>Fläche</i> Σ	73
9.1.2 Massenpunkt auf einer <i>bewegten Fläche</i> $\Sigma(t)$	74
9.1.3 Massenpunkt auf einer <i>ruhenden Kurve</i> Λ	74
9.1.4 Massenpunkt auf einer <i>bewegten Kurve</i> $\Lambda(t)$	75
9.2 Beispiele <i>nicht</i> holonomer Zwangsbedingungen	75
9.3 Reibung	76
10 Lagrange-Gleichungen 1. Art	79
10.0.1 Mathematischer Satz	80
10.0.2 Mathematischer Satz	80
10.0.3 Beispiel: Ebenes Pendel	81
10.1 Virtuelle Verrückungen und d'Alembertsches Prinzip	82
10.1.1 Ausdruck für virtuelle Verrückungen	83
10.2 Generalisierte Koordinaten:	84
10.2.1 Beispiel: Ebenes Pendel	85
10.2.2 Beispiel: Schwungrad, siehe Zeichnung 10.1	86
10.3 Energieerhaltung bei Anwesenheit von Zwangskräften	89
10.4 Die Energieerhaltung erlaubt es, Probleme mit nur einem Freiheitsgrad vollständig zu lösen . .	90

10.4.1	Beispiel: Ebenes Pendel	90
10.5	Diskussion der Bewegungsgleichung des ebenen Pendels	91
10.5.1	Pendelbewegung	92
10.5.2	Kreisbewegung	94
10.6	Zeitabhängige Zwangsbedingungen	95
10.6.1	Beispiel: Karussell, siehe Zeichnung 10.2	96
11	Systeme von Massenpunkten	101
11.1	Das 3. Newtonsche Gesetz	101
11.2	Der Satz vom Schwerpunkt	102
11.3	Impulserhaltung	104
11.4	Drehimpulserhaltung	104
11.5	Energieerhaltung	105
11.6	Der Virialsatz	108
11.6.1	Virialsatz für Kräfte mit homogenen Potentialen	110
11.6.2	Anwendungsbeispiele	112
11.7	Das Zweikörperproblem	113
12	Euler-Lagrange Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip	117
12.1	Verallgemeinerte Koordinaten	117
12.1.1	Beispiel: 1 Massenpunkt, 0 Zwangsbedingungen, Polarkoordinaten	118
12.1.2	Beispiel: 1 Massenpunkt auf der Kugelschale $\mathbf{r}^2 = \mathbf{R}^2$	118
12.1.3	Beispiel: Hantel, 2 Massenpunkte	118
12.2	Lagrangefunktion L	118
12.2.1	Beispiel 1: Lagrange-Funktion für einen Massenpunkt der Masse m , ohne Zwangsbedingungen im Zentralpotential $V(r)$	120
12.2.2	Beispiel 2: Freie Bewegung eines Massenpunktes auf der Kugelschale mit Radius R	120
12.2.3	Beispiel 3: Zweikörperproblem	120
12.2.4	Beispiel 4: Elektrisch geladener Massenpunkt in einem äußeren elektromagnetischen Feld	121
12.3	Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen	122
12.3.1	Beispiel 1: Bewegung eines Massenpunktes im Zentralpotential (Kepler-Problem)	123
12.3.2	Beispiel 2: Elektrisch geladener Massenpunkt im elektromagnetischen Feld	125

12.4	Zyklische Koordinaten	129
12.4.1	Bemerkung	129
12.4.2	Beispiel: Freie Bewegung eines relativistischen Teilchens	129
12.5	Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen aus den Newton- schen Bewegungsgleichungen	130
12.5.1	Vorübung	131
12.5.2	Beliebige Koordinaten q	131
12.5.3	Berücksichtigung von Zwangsbedingungen	133
12.6	Symmetrien und Erhaltungssätze, Noetherscher Satz	133
12.6.1	Beispiel: Massenpunkt im Schwerfeld	134
12.6.2	Zyklische Variablen als Beispiel	136
12.6.3	Homogenität des Raums gibt Impulserhaltung	137
12.6.4	Isotropie des Raums gibt Drehimpulserhaltung	138
12.6.5	Homogenität des Zeit gibt Energieerhaltung	139
12.7	Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Bezugssystem	140
12.8	Hamiltonsches Prinzip	143
13	Kanonischer Formalismus	149
13.1	Hamiltonfunktion und kanonische Gleichungen	149
13.2	Die Legendre Transformation	153
13.3	Phasenraum	157
13.4	Äquivalenz der Hamiltonschen Gleichung zu einem Extremal- prinzip	157
13.5	Poisson-Klammern	158
13.6	Kanonische Transformationen	160
14	Hamilton-Jacobi Theorie	167
14.1	Mechanik als Kontrollproblem	167
14.1.1	Problemstellung A	168
14.1.2	Problemstellung B	168
14.1.3	Mechanik	169
14.2	Die Wirkung als physikalische Größe	170
14.2.1	Ein Freiheitsgrad	170
14.3	Hamilton-Jacobi Differentialgleichung	172
14.3.1	Mehrere Freiheitsgrade	172
14.3.2	Vollständige Lösung	172
14.3.3	Allgemeine Lösung	172
14.3.4	Anfangsbedingungen	173

14.4	Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung durch Separation der Variablen	173
14.5	Zeittranslation als kanonische Transformation	174
14.6	Allgemeine Theorie	175
14.7	Zusammenfassung des Verfahrens zur Lösung der Bewegungsgleichung nach Hamilton-Jacobi	176
14.7.1	Beispiel: Kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes	177
14.8	Ricatti-Lösungsverfahren für die Hamilton-Jacobi Gleichung	178
15	Einige Resultate von Bedeutung für andere Zweige der Physik	181
15.1	Liouvillescher Satz	181
15.2	Kleine Schwingungen	182
15.2.1	Normalkoordinaten	186
15.2.2	Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren	187
15.2.3	Gitterschwingungen	189
15.3	Einige Grundbegriffe der Chaostheorie NOCH NICHT GESCHRIEBEN	192

Kapitel 1

Einleitung

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von Massenpunkten im Raum.

Nach Kant ist der Raum eine a priori Form der Anschauung. Diese Vorstellung hat sich gehalten, bis Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie schuf. Hier beschäftigen wir uns mit nichtrelativistischer Mechanik. Dort werden gewisse Eigenschaften des Raumes als a priori Eigenschaften, d.h. nicht weiter zu begründend angenommen. Diese Eigenschaften können in der Aussage zusammengefaßt werden, daß der Raum eine Euklidische Geometrie hat. Es ist instruktiv, die damit gemeinten Eigenschaften aufzuteilen.

1 Es sind Nachbarschaftsbeziehungen definiert, d.h. man kann sagen, wenn zwei Punkte des Raumes nahe beieinander sind. Mathematiker sagen deshalb, der Raum habe eine 'Topologie'. Damit ist ein Begriff der Stetigkeit erklärt, und der Begriff einer Kurve als stetige Abbildung von \mathbb{R} in den Raum ist ebenfalls erklärt.

2 Es ist erklärt, wann ein infinitesimales Kurvenstück gerade ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Begriff einer glatten Kurve definiert ist. Eine glatte Kurve ist im infinitesimal Kleinen gerade. Mathematiker sagen, der Raum habe eine 'differenzierbare Struktur'.

3 Es ist erklärt, wann zwei infinitesimale gerade Kurvenstücke, die sich irgendwo im Raum befinden, parallel sind. Damit sind Geraden als Kurven, deren infinitesimale Teile alle zueinander parallel sind, definiert.

4 Es ist ein Abstand zweier Punkte definiert. Er ist positiv semi-definit (≥ 0) und erfüllt die Dreiecksungleichung. Zwei Punkte sind nahe beieinander, wenn ihr Abstand klein ist. Mathematiker nennen den Abstand 'Metrik'.

5 Durch zwei verschiedene Punkte kann man genau eine Gerade legen.

Zwei Geraden sind entweder parallel, dann schneiden sie sich nicht, oder sie schneiden sich genau einmal. Nimmt man den Punkt ∞ hinzu, so kann man auch sagen zwei Geraden schneiden sich genau einmal, parallele Geraden schneiden sich bei ∞ .

6 Der Raum ist 3-dimensional (s.u.). Der Abstand ist nicht dimensionslos. Man kann aber eine Einheit der Länge durch Bau eines Maßstabes definieren. Diesen Maßstab kann man überall hin transportieren und damit Längenmessungen durchführen. Ein idealer Transport ist definiert, bei dem sich der Maßstab nicht verändert: Bringt man ihn von A nach B und auf einem anderen Weg zurück nach A, so zeigt er danach dieselbe Länge an.

Die historische Entwicklung der Physik war so, daß man gewisse Dinge, an die man aus dem täglichen Leben gewöhnt war, für selbstverständlich nahm, und den nichtselbstverständlichen Rest als Konsequenz von Naturgesetzen zu verstehen versuchte. Zu den 'Selbstverständlichkeiten' gehörten die Eigenschaften des Raumes. Heute versucht man, möglichst fundamentale Theorien zu machen, die mit möglichst wenigen a priori, d.h. nicht weiter begründbaren, Annahmen auskommen, und die auch das scheinbar Selbstverständliche zu erklären versuchen. Dies ist Einsteins Erbe. Zuweilen findet man dann Abweichungen vom für selbstverständlich gehaltenen. Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt beispielsweise, daß die Euklidische Geometrie des Raumes auch hier auf der Erde nicht exakt ist. Die Abweichungen sind aber extrem klein.

In der Speziellen Relativitätstheorie behält der Raum die oben genannten Eigenschaften. Er tritt lediglich mit der Zeit in engere Beziehung. Die 4-dimensionale Raum-Zeit hat eine ähnliche Geometrie wie der 3-dimensionale Raum. Die oben erwähnten Eigenschaften gelten, mit Ausnahme der Tatsache, daß die Metrik nicht positiv definit ist, und aus kleinem 'Abstand' nicht Nähe folgt.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie werden die Eigenschaften 1 und 2 immer noch als nicht weiter begründete a priori Eigenschaften beibehalten, die anderen Eigenschaften gelten nicht mehr in derselben Form. In jüngster Zeit versuchte man, die Allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik in Einklang zu bringen. Dazu scheint es notwendig, auch die Eigenschaften 1 und 2 des Raumes noch aufzugeben. Was an ihre Stelle treten soll, kann hier nicht erklärt werden.

NB: Der entscheidende Punkt bei der Allgemeinen Relativitätstheorie ist nicht so sehr, daß die Raum-Zeit gekrümmt ist, sondern daß sie weniger a priori Struktur (Eigenschaften) hat.

Kapitel 2

Zahlenmäßige Beschreibung des Ortes von Punkten im Raum

Um den Ort eines Punktes im Raum durch Zahlen angeben zu können, muß man ein Koordinatensystem wählen. Dazu wählt man willkürlich einen Punkt \mathbf{O} im Raum als Ursprung und legt, wiederum willkürlich drei zueinander senkrechte Geraden durch \mathbf{O} (sie werde x , y , und z -Achse genannt). Da man mit Zirkel und Lineal ein Lot fällen kann, ist erklärt, was senkrecht ist (nachdem der Abstand eingeführt ist). (Ein Zirkel zieht eine Linie, die überall den gleichen Abstand von einem Punkt hat.) Die 3-Dimensionalität des Raumes besagt gerade, daß man 3 zueinander senkrechte Linien ziehen kann, aber nicht 4. Ist eine Einheit als Länge gegeben, so kann man auf den Koordinatenachsen Markierungen anbringen. Man kann nun von einem Punkt des Raumes Lote auf die z -Achse und auf die xy -Ebene fällen und vom Durchstoßpunkt durch die xy -Ebene Lote auf die x - und die y -Achse. Die Abstände der resultierenden Punkte auf den Achsen zum Ursprung nennt man die Koordinaten x, y, z des Punktes. Sie bestimmen den Punkt eindeutig. Die Verbindungslinie von \mathbf{O} zum Ort nennt man den Ortsvektor \mathbf{r} , und x, y, z seine Komponenten. Man schreibt:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \tag{2.1}$$

Führt man die drei zu den Achsen parallelen Vektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ und \mathbf{e}_z der Länge 1 ein (vgl. Zeichnung 3.1)

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_y &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1)\end{aligned}\tag{2.2}$$

so kann man auch schreiben

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z\tag{2.3}$$

denn Vektoren werden komponentenweise addiert und mit reellen Zahlen multipliziert.

Es ist nun noch interessant zu untersuchen, wie sich die Koordinaten eines Punktes ändern, wenn man zu einem anderen Koordinatensystem übergeht. Wir betrachten zunächst nur Koordinatensysteme, deren Achsen zueinander parallel sind.

Seien Σ und Σ' zwei solche Koordinatensysteme. Der Ursprung $\mathbf{0}'$ von Σ' habe den Ortsvektor \mathbf{b} bezüglich des Koordinatensystems Σ , siehe Figur 2.1. Dann besteht zwischen den Ortsvektoren \mathbf{r}' und \mathbf{r} eines Punktes im Raum folgende Beziehung

$$\mathbf{r}' + \mathbf{b} = \mathbf{r}\tag{2.4}$$

Sei

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)\tag{2.5}$$

und

$$\mathbf{r}' = (x', y', z')\tag{2.6}$$

so lautet diese Gleichung in Komponenten

$$\begin{aligned}x' + b_x &= x \\ y' + b_y &= y \\ z' + b_z &= z\end{aligned}\tag{2.7}$$

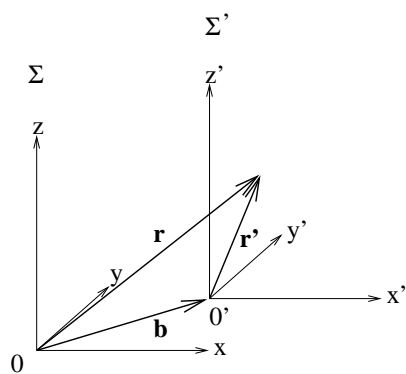


Abbildung 2.1: Zwei um einen konstanten Vektor verschobene Koordinatensysteme

Kapitel 3

Grundbegriffe der Mechanik

3.1 Trajektorie

Materielle Körper befinden sich irgendwo im Raum. In der Mechanik idealisiert man oft materielle Körper, wie zum Beispiel Planeten, als punktförmig. Man nennt solche idealisierten Körper Massenpunkte. Sie befinden sich zu jedem Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort. Den zugehörigen Ortsvektor bezeichnen wir mit $\mathbf{r}(t)$. Das Argument t gibt an, daß es sich um den Ort handeln soll, an dem sich der Massenpunkt zur Zeit t aufhält. Der Massenpunkt kann sich bewegen und zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten aufhalten. Die Abbildung

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in R \quad (3.1)$$

nennt man die Trajektorie des Massenpunktes, oder auch die durch die Zeit parametrisierte Bahnkurve.

3.2 Geschwindigkeit

Man definiert den Vektor der Geschwindigkeit als zeitliche Ableitung des Ortsvektors

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right). \quad (3.2)$$

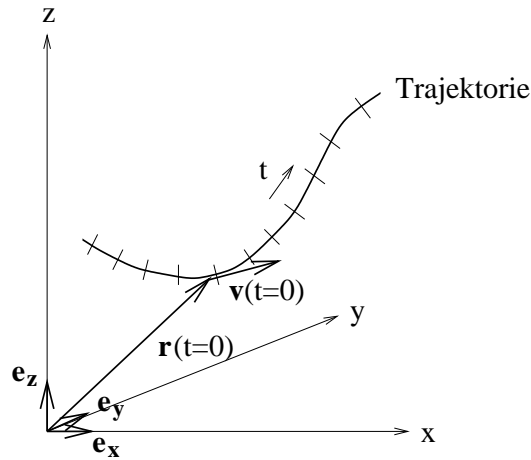


Abbildung 3.1: Trajektorie eines Massenpunktes

Notation: Die Ableitung nach der Zeit wird oft mit einem Punkt über der abzuleitenden Größe bezeichnet, also $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$.

Die Ableitung kann man entweder, wie hier geschehen, über die Ableitungen der Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ definieren, oder als Differentialquotient.

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \epsilon) - \mathbf{r}(t)}{\epsilon} \quad (3.3)$$

Der zugrundeliegende Konvergenzbegriff ist hier, daß die Glieder einer Folge $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{0}$ wenn die Länge $|\mathbf{r}_n| \rightarrow 0$. Beide Definitionen sind äquivalent. Die Länge $|\mathbf{r}|$ eines Vektors $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ist definiert durch

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.4)$$

Man schreibt auch $\|\mathbf{r}\|$ oder einfach r statt $\|\mathbf{r}\|$, ebenso bei \mathbf{v} .

Die Geschwindigkeit ist nach Definition tangential zur Bahnkurve. (Tangentenvektoren werden in der Mathematik als Ableitungen von Kurven definiert.)

3.2.1 Beispiel 1: Gleichförmige Bewegung

Es sei

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (3.5)$$

$\mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0$ sind konstante Vektoren. In Komponenten:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t + x_0 \\y(t) &= v_{0y}t + y_0 \\z(t) &= v_{0z}t + z_0\end{aligned}\tag{3.6}$$

Man kann ein Polynom in t mit konstanten Vektoren als Koeffizienten genauso differenzieren, als wären die Koeffizienten Zahlen. Also ist

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0\tag{3.7}$$

Differenzieren der Formeln für die Komponenten liefert stattdessen

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x} \quad \frac{dy}{dt} = v_{0y} \quad \frac{dz}{dt} = v_{0z}\tag{3.8}$$

Da $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ stimmen beide Resultate überein.

3.2.2 Beispiel 2: Gleichförmige Kreisbewegung um die z-Achse

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), h)\tag{3.9}$$

Umlaufzeit: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ denn $\mathbf{r}(t + T) = \mathbf{r}(t)$

Geschwindigkeit durch komponentenweises Differenzieren

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), 0)\tag{3.10}$$

NB: In der Physik meint man mit Geschwindigkeit immer den *Vektor* \mathbf{v} . Er hat eine Richtung $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ und einen Betrag $\|\mathbf{v}\|$.

3.3 Beschleunigung

Die Beschleunigung gibt die Änderung des Geschwindigkeits-Vektors pro Zeiteinheit an.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}\tag{3.11}$$

Der Buchstabe \mathbf{a} steht für engl. "acceleration".

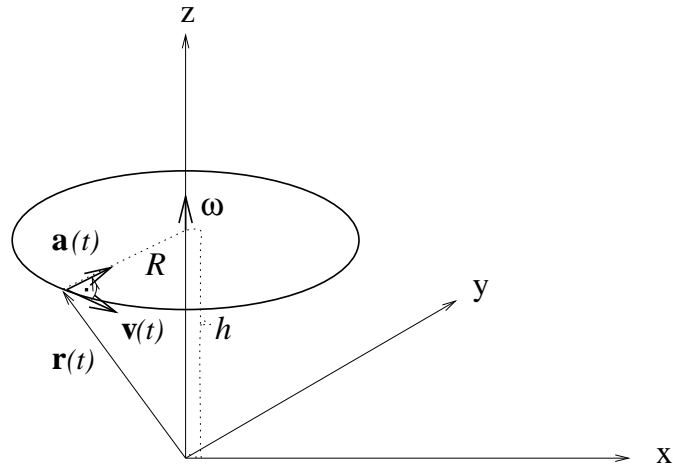


Abbildung 3.2: Gleichförmige Kreisbewegung um die z-Achse in Höhe h

3.3.1 Beispiel 1: Gleichförmige Bewegung

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$ gibt:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (3.12)$$

3.3.2 Beispiel 2: Gleichförmige Kreisbewegung

Die obige Formel

$$\mathbf{v}(t) = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), 0) \quad (3.13)$$

gibt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t), 0) \quad (3.14)$$

Im Spezialfall $h=0$ (gleichförmige Kreisbewegung in der xy-Ebene) ist

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (3.15)$$

wie man durch Vergleich sieht.

3.4 Impuls eines Massenpunktes

In der nichtrelativistischen Mechanik ist der Impuls durch

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t) \quad (3.16)$$

definiert, mit m =Masse des Massenpunktes. In der Speziellen Relativitätstheorie gilt die gleiche Formel mit $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ m_0 =Ruhemasse. In der nichtrelativistischen Physik ist $v \ll c$ und $m = m_0$ =Ruhemasse. Die Einheit der Masse ist 1kg.

3.5 Drehimpuls eines Massenpunktes

Der Drehimpuls \mathbf{L} eines Massenpunktes wird mit Hilfe des Vektorproduktes 3-dimensionaler Vektoren definiert. $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, genauer $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$. Da $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ ist die Reihenfolge der Faktoren wichtig. Gemäß der Definition des Vektorproduktes lautet die Definition in Komponenten

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad (3.17)$$

Empfehlung: Man merkt sich die Formel für die z-Komponente eines Vektorproduktes, und erschließt die Formel für die x- und y-Komponente durch zyklische Vertauschung:

$z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ Es sei an die Eigenschaften des Vektorproduktes erinnert.

Bilinearität: Sei $\alpha \in R$

$$\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}) \quad (3.18)$$

und

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} \quad (3.19)$$

Vertauschen der Faktoren:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (3.20)$$

daher insbesondere

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0 \quad (3.21)$$

Produktregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)) = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt} \quad (3.22)$$

Der Drehimpuls hängt von der Wahl des Ursprungs $\mathbf{0}$ ab, der in die Definition des Ortsvektors \mathbf{r} eingeht. Betrachten wir den Ursprung $\mathbf{0}'$ eines um einen konstanten Vektor verschobenen Koordinatensystems, so daß

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b} \quad (3.23)$$

Daraus folgt $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}'$, daher ist der Impuls $\mathbf{p}' = m\dot{\mathbf{r}}'$ bezüglich des verschobenen Koordinatensystems

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \quad (3.24)$$

Damit ergibt sich schließlich die Beziehung zwischen den Drehimpulsen \mathbf{L} und \mathbf{L}' bezüglich $\mathbf{0}$ und $\mathbf{0}'$.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{r}' + \mathbf{b}) \times \mathbf{p}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}' + \mathbf{b} \times \mathbf{p}' \quad (3.25)$$

Also

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{b} \times \mathbf{p}' \quad (\text{Steinerscher Satz}) \quad (3.26)$$

Zur Übung berechnen wir den Drehimpuls und seine zeitliche Ableitung für die zwei schon früher betrachteten speziellen Bewegungen. Ist $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, so sagt man der Drehimpuls sei erhalten. Hinreichende Bedingungen hierfür werden wir später kennenlernen.

3.5.1 Beispiel 1: Gleichförmige Bewegung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t \quad (3.27)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0 \quad (3.29)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad (3.30)$$

denn der zweite Term $\mathbf{v}_0 t \times m\mathbf{v}_0$ verschwindet.

3.5.2 Beispiel 2: Gleichförmige Kreisbewegung um die z-Achse

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), h) \quad (3.31)$$

$$\mathbf{p}(t) = m(-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), 0) \quad (3.32)$$

Also

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y = -hmR\omega \cos(\omega t) \\ L_y &= zp_x - xp_z = -hmR\omega \sin(\omega t) \\ L_z &= xp_y - yp_x = mR^2\omega \cos^2(\omega t) + mR^2\omega \sin^2(\omega t) = mR^2\omega \end{aligned} \quad (3.33)$$

Im allgemeinen ist \mathbf{L} hier zeitabhängig. Im Spezialfall der Bewegung in der xy-Ebene ist jedoch $h=0$, daher

$$\mathbf{L} = (0, 0, mR^2\omega) \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (3.34)$$

für $h=0$.

3.6 Inertialsystem

Die Wahl von Koordinatenachsen definiert ein Bezugssystem. Man unterscheidet nicht zwischen Bezugssystemen, die durch konstante Verschiebung des Ursprungs auseinander hervorgehen. Ein Bezugssystem heißt Inertialsystem, wenn es sich relativ zum Fixsternhimmel gleichförmig bewegt. Alle Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander gleichförmig. Ein rotierendes Bezugssystem ist kein Inertialsystem. Insbesondere legen auf der Erde feststehende Koordinatensysteme kein Inertialsystem fest, weil die Erde rotiert. Oft kann man dies allerdings vernachlässigen.

Ein weiterer Grundbegriff der Mechanik ist die *Kraft*. Wir werden sie unten im Zusammenhang mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen diskutieren.

Kapitel 4

Newton's

Bewegungsgleichungen und Kraftgesetze

Das 1. Newtonsche Gesetz besagt, daß ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, seinen Bewegungszustand nicht ändert. Wie sich der Bewegungszustand eines Körpers ändert, wenn Kräfte auf ihn wirken, ist Gegenstand des nun folgenden 2. Newtonschen Gesetzes, die Bewegung eines Massenpunktes in einem Inertialsystem genügt der Newtonschen Bewegungsgleichung.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

Man kann dies als Definition der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft \mathbf{F} auffassen. Man benutzt dieselbe Definitionsgleichung manchmal auch in Nichtinertialsystemen. In diesem Fall enthält jedoch \mathbf{F} auch Anteile, die im Inertialsystem nicht auftreten. Man nennt sie Scheinkräfte oder Trägheitskräfte. Ein Beispiel ist die Corioliskraft. Wir kommen in Kapitel 12.7 darauf zurück.

Eine wirkliche Aussage über die Bewegung eines Massenpunktes erhält man aus der Newtonschen Bewegungsgleichung erst, wenn man die Kraftgesetze kennt, die die Kraft \mathbf{F} auf den Massenpunkt bestimmen, wenn man den Ort \mathbf{r} und nötigenfalls die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ des Massenpunktes kennt. In manchen Fällen hängt \mathbf{F} auch noch explizit von der Zeit ab. Physiker schreiben etwas schlampig

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (4.2)$$

Die drei wichtigsten Beispiele werden im Folgenden vorgestellt.

4.1 Lorentzkraft

Die Kraft auf ein geladenes Teilchen mit Ladung q in einem elektromagnetischen Feld. Seien $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ das elektrische und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ das magnetische Feld am Ort \mathbf{r} des Teilchens, so ist

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (4.3)$$

4.2 Coulombkraft

Ein am Ort $\mathbf{0}$ in Ruhe befindlicher Massenpunkt mit elektrischer Ladung Q erzeugt ein elektrisches Feld, das gemäß der Gleichung für die Lorentzkraft eine Kraft auf ein Teilchen der Ladung q am Ort \mathbf{r} ausübt. Die resultierende Kraft ist

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.4)$$

mit $r = |\mathbf{r}|$. Die Gleichung gilt in einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem, wenn \mathbf{r} als Differenz der Ortsvektoren der beiden Teilchen interpretiert wird.

4.3 Schwerkraft

Ein am Ort $\mathbf{0}$ in Ruhe befindlicher Massenpunkt mit Masse M erzeugt ein Schwerfeld, das auf einen bei \mathbf{r} befindlichen Massenpunkt der Masse m die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.5)$$

ausübt. G ist die Gravitationskonstante. Im Falle kugelsymmetrischer Massenverteilung in einem Körper kann man sich seine Masse M im Schwerpunkt vereinigt denken (dies ist eine Entdeckung Newtons). Betrachtet man die Erde als hinreichend genau kugelsymmetrisch, so kann man die Formel auf

einen Massenpunkt im Schwerfeld der Erde anwenden. Man erhält auf der Oberfläche der Erde die *Gewichtskraft*

$$\mathbf{F} = -g m \mathbf{e}_z \quad (4.6)$$

wo \mathbf{e}_z der vom Erdmittelpunkt weggerichtete Einheitsvektor ist. Dabei ist g die sogenannte Erdbeschleunigung:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (4.7)$$

M =Erdmasse, R =Erdradius.

Die Einheit der Kraft ist 1 Newton = 1 kgms⁻².

Kräfte kann man auf verschiedene Weisen messen. Einmal durch Messung der durch die Kraft der Newtonschen Bewegungsgleichung bewirkten Beschleunigung (genau gibt das Kraft/Masse). Zum Anderen kann man eine unbekannte Kraft gegen eine bekannte Kraft - beispielsweise Coulombkraft - bilanzieren, sodaß die resultierende Kraft 0 ist, also keine Beschleunigung bewirkt. Auf diese Weise kann man sowohl Meßvorschriften für die Kraft als auch für die Masse angeben. Das Genauere lernt man in der Experimentalphysik.

4.4 Drehmoment

Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung folgt auch eine Formel für die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines Massenpunktes. Nach der Produktregel ist

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (4.8)$$

Nun ist aber $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Damit ist der erste Term gleich $m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$. Wir definieren das Drehmoment \mathbf{N} einer Kraft \mathbf{F} durch

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.9)$$

Setzen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \mathbf{N}(t) \quad (4.10)$$

Wir werden später den Drehimpuls als einen verallgemeinerten Impuls, und das Drehmoment als eine verallgemeinerte Kraft interpretieren. Die Gleichung ist Beispiel der Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung auf verallgemeinerte Impulse (und Koordinaten).

Ein wichtiger Spezialfall tritt auf, wenn \mathbf{r} und \mathbf{F} stets parallel sind. Dann ist $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, daher $\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = 0$ (Drehimpulserhaltung). Mit parallel ist gemeint: bis auf einen reellen Faktor gleich. Der Faktor kann auch negativ sein. Antiparallel ist also zugelassen. Ist $\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = 0$, so sagt man, der Drehimpuls sei *erhalten*.

Kapitel 5

Arbeit, Potential, Energie

5.1 Arbeit

Wir betrachten einen Massenpunkt, den wir von einem Anfangsort \mathbf{r}_a um eine infinitesimale Strecke $\Delta\mathbf{r}$ zum Endort $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_a + \Delta\mathbf{r}$ verschieben. Der Massenpunkt befindet sich dabei unter dem Einfluß der Kraft \mathbf{F} . Die Größe

$$\Delta A = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} \quad (5.1)$$

nennt man die bei der infinitesimalen Verschiebung *vom System geleistete Arbeit*. Mit System ist hier der Massenpunkt gemeint. Das Negative davon ist die am System geleistete Arbeit.

Wir betrachten als nächstes endliche Verschiebungen. Wir nehmen an, die Kraft sei geschwindigkeitsunabhängig. Sie kann vom Ort des Teilchens abhängen. Während der oben betrachteten infinitesimalen Verschiebung ist der Ort praktisch konstant, mithin auch die Kraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_e) \quad (5.2)$$

Eine endliche Verschiebung von $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_n$ längs einer gewissen Kurve C denken wir uns aus n kleinen Stücken zusammengesetzt. Im i -ten Schritt ($i = 1 \dots n$) verschieben wir von \mathbf{r}_{i-1} nach \mathbf{r}_i um

$$\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} \quad (5.3)$$

Im Grenzfall großer n soll $\Delta\mathbf{r}_i$ infinitesimal klein werden. Die Arbeit ergibt sich als

$$A_{a \rightarrow e} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \Delta\mathbf{r}_i \quad (5.4)$$

Wir fassen dies als die Riemann-Summen-Näherung für ein Integral auf. Wir parametrisieren die Kurve C durch einen reellen Parameter $s = s_a \dots s_e$. Jedem Wert des Parameters s ist ein Punkt $\mathbf{r}(s)$ auf der Kurve zugeordnet. Die Kurve wird damit eine Abbildung des Intervalls in den Raum.

$$C : s \rightarrow \mathbf{r}(s) \quad (5.5)$$

Den oben ausgewählten Punkten \mathbf{r}_i entsprechen dann gewisse Parameterwerte s_i .

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(s_i) \quad \Delta \mathbf{r}_i \equiv \Delta \mathbf{r}(s_i) = \mathbf{r}(s_i) - \mathbf{r}(s_{i-1}) \quad \Delta s_i = s_i - s_{i-1} \quad (5.6)$$

Die Formel für die Arbeit kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$A_{a \rightarrow e} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(s_i)) \frac{\Delta \mathbf{r}(s_i)}{\Delta s_i} \Delta s_i \quad (5.7)$$

Dies ist die Riemann-Summe für das folgende Integral:

$$A_{a \rightarrow e} = \int_{s_a}^{s_e} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}) ds \quad (5.8)$$

Dies ist ein gewöhnliches Integral der Form $\int_{s_a}^{s_e} f(s) ds$, wobei die reelle Funktion $f(s)$ in spezieller Weise als Skalarprodukt der Vektorfunktion $\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))$ und der Vektorfunktion $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ gebildet wird. Die folgende Abkürzung ist üblich.

$$A_{a \rightarrow e} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.9)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist durch den Ausdruck (5.8) definiert. Man kann zeigen, daß der Ausdruck von der Wahl der Parametrisierung des Weges C unabhängig ist. Man nennt solche Ausdrücke *Linienintegrale*. Sie treten an vielen Stellen in der Physik auf (Mechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik). Es ist deshalb wichtig, sich damit (durch Übung an Beispielen) vertraut zu machen.

Im Folgenden sei die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r} \quad (5.10)$$

(z.B. rücktreibende Kraft einer Feder).

5.1.1 Beispiel: Verschiebung eines Massenpunktes in radialer Richtung von $\mathbf{r}_a = \mathbf{0}$ zum Punkt $\mathbf{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$

Wir parametrisieren die Gerade von $\mathbf{0}$ nach \mathbf{r}_e durch $s=0\dots 1$

$$\mathbf{r}(s) = (sx_e, sy_e, sz_e) \quad (5.11)$$

Damit

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (x_e, y_e, z_e) \quad (5.12)$$

und

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -k\mathbf{r}(s) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -ks(x_e^2 + y_e^2 + z_e^2) \quad (5.13)$$

Das Integral wird

$$A_{a \rightarrow e} = -k \int_0^1 ds s (x_e^2 + y_e^2 + z_e^2) \quad (5.14)$$

Der Faktor $(x_e^2 + y_e^2 + z_e^2) = \mathbf{r}_e^2$ ist konstant und kann vor das Integral gezogen werden. Da $\int_0^1 ds s = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$A_{a \rightarrow e} = -\frac{k}{2} \mathbf{r}_e^2 \quad (5.15)$$

5.1.2 Beispiel: Bewegung um einen Kreis des Radius R in der xy -Ebene von $\mathbf{r}_a = (R, 0, 0)$ nach $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_a$ (geschlossener Weg)

Der Kreis kann durch den Winkel $\phi = 0\dots 2\pi$ parametrisiert werden.

$$\mathbf{r}(\phi) = (R \cos(\phi), R \sin(\phi), 0) \quad (5.16)$$

Damit

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\phi} = (-R \sin(\phi), R \cos(\phi), 0) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi)) \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} = -k\mathbf{r}(\phi) \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} = -kR^2(-\cos(\phi)\sin(\phi) + \sin(\phi)\cos(\phi)) = (5.18)$$

Da der Integrand verschwindet ist auch

$$A_{a \rightarrow e=a} = 0 \quad (5.19)$$

Wir werden sehen, daß der Fall häufiger auftritt, daß die Arbeit beim Umlauf um einen geschlossenen Weg verschwindet.

5.2 Potential

Eine geschwindigkeitsunabhängige Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ hat das Potential $V(\mathbf{r})$ falls

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (5.20)$$

Wir benutzen hier den ∇ -Operator. Dies ist ein Differentialoperator, der skalare Funktionen in vektorwertige Funktionen abbildet. (Wirkungen auf Vektorfunktionen werden wir später betrachten.)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.21)$$

Auch eine zeitabhängige Kraft kann ein Potential haben. Die Gleichung lautet dann in Komponenten:

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z, t) \\ F_y(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z, t) \\ F_z(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dabei ist $V(x, y, z, t)$ für $V(\mathbf{r}, t)$ geschrieben, um die Abhängigkeit von den Variablen, nach der differenziert wird explizit zu machen.

5.2.1 Beispiel: 3-dimensionaler harmonischer Oszillator

Sei $V(\mathbf{r}) = -\frac{k}{2}r^2 = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ Dann ist

$$F_x = -kx, \quad F_y = -ky, \quad F_z = -kz \quad (5.23)$$

also in Vektorschreibweise $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$. Dies ist die rücktreibende Kraft eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit der Federkonstante k . Wir haben damit das Potential dieser Kraft gefunden.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall von Potentialen mit Kugelsymmetrie. Dann hängt das Potential nur vom Abstand r ab. Wir schreiben kurz $V(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Wir berechnen die zugehörige Kraft.

$$F_x = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (5.24)$$

usw. Wir berechnen

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{r} \quad (5.25)$$

Genauso findet man $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ und $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$. Insgesamt

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.26)$$

Die Kraft ist also parallel (oder antiparallel) zum Ortsvektor, und ihr Betrag hängt nur vom Abstand r zum Nullpunkt ab. Jede Kraft mit dieser Eigenschaft hat ein Potential. Denn ist $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, so können wir $f(r) = -V'(r)$ schreiben, hier bedeutet ' Ableitung nach dem Argument (hier r). V ist also das Negative der Stammfunktion von f . Nach obigem Resultat ist V ein Potential zu \mathbf{F} .

Das Potential einer Kraft ist nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt.

Wir können nach dem eben Gesagten sofort das Potential für die Coulombkraft und für die Schwerkraft, die von einem Massenpunkt bei $\mathbf{0}$ ausgeht, angeben.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.27)$$

hat das Potential

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} \quad (5.28)$$

5.2.2 Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials

Es sei ein auf dem ganzen Raum oder auf einem einfach zusammenhängenden Teil davon definiertes Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ gegeben.

Behauptung: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es ein Potential besitzt, ist

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.29)$$

In Komponenten ist

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right) \quad (5.30)$$

Man nennt dies die Rotation und schreibt auch

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot} \mathbf{F} \quad (5.31)$$

Die englische Bezeichnung für *rot* ist *curl*.

Die Notwendigkeit der Bedingung ist leicht zu sehen. Ist $\mathbf{F} = -\nabla V$, so ist

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla V \quad (5.32)$$

In Komponenten ergibt sich aus $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$:

$$(\nabla \times \nabla) |_z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.33)$$

Dies verschwindet weil die partiellen Ableitungen miteinander kommutieren. Ebenso verschwinden die anderen Komponenten. Daher ist $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ wenn \mathbf{F} ein Potential hat.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials kann noch in einer anderen äquivalenten Form geschrieben werden. Sei C ein beliebiger geschlossener Weg im Definitionsgebiet von \mathbf{F} . Für Linienintegrale entlang geschlossener Wege schreibt man \oint_C . Die äquivalente Bedingung lautet

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (5.34)$$

für jeden geschlossenen Weg C . Die Äquivalenz ergibt sich aus dem folgenden mathematischen Satz.

5.2.3 Stokescher Satz

Sei D eine in den Raum eingebettete berandete Fläche mit Rand ∂D . Dann ist

$$\int_D \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (5.35)$$

Der Rand der Fläche ist eine geschlossene Kurve. Das vektorielle Flächenelement ist

$$d\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) df(\mathbf{r}) \quad (5.36)$$

wo \mathbf{n} die Normale auf der Fläche ist, und df das skalare Flächenelement.

Anwendung: Ist C ein geschlossener Weg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, so ist C Rand einer Fläche D . Die Fläche ist nicht eindeutig bestimmt. Wir wählen eine beliebige Fläche D mit $C = \partial D$ aus. Ist $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, so folgt aus dem Stokeschen Satz, daß $\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$. Ist also die ursprüngliche Bedingung erfüllt, so auch die Alternative. Um den Schluß in die umgekehrte Richtung zu führen, wählen wir ein infinitesimales Flächenstück D an einem beliebig vorgegebenen Punkt \mathbf{r} mit beliebig vorgegebener Normalen \mathbf{n} . Dann ist

$$\int_D \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) | \text{Fläche von } D |) \quad (5.37)$$

Aus der alternativen Bedingung und dem Stokeschen Satz folgt, daß dies für beliebiges \mathbf{r} und \mathbf{n} verschwinden muß. Also ist $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Damit ist die Äquivalenz der Bedingung gezeigt. Daß sie hinreichend ist, wird im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

5.2.4 Berechnung des Potentials

Ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials erfüllt, so kann man das Potential mit Hilfe der folgenden Vorschrift durch Auswertung von Linienintegralen berechnen. Es wird gezeigt werden, daß die Vorschrift sinnvoll ist, und daß der negative Gradient $-\nabla V$ des so bestimmten Potentials gleich der vorgegebenen Kraft ist. Damit ist dann auch gezeigt, daß die oben angegebene Bedingung für die Existenz eines Potentials hinreichend ist. Die Rechenvorschrift lautet wie folgt.

Wähle einen beliebigen Punkt \mathbf{r}_0 und verfüge über die willkürliche Konstante

im Potential durch Wahl von $V(\mathbf{r}_0)$. Zu jedem \mathbf{r} wähle einen Weg C von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} und setze

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{C:\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (5.38)$$

Ich schreibe $C : \mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}$, um anzugeben, daß der Weg von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} laufen soll.

Würde \mathbf{F} keinerlei Einschränkung unterliegen, so wäre die rechte Seite dieser Gleichung (bei gegebenem \mathbf{r}_0 und $V(\mathbf{r}_0)$) nicht nur von \mathbf{r} abhängig, sondern auch von der Wahl des Wegs von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} . Sie wäre dann keine Funktion von \mathbf{r} alleine.

Die Bedingung für die Existenz eines Potentials sorgt nun gerade dafür, daß eine solche Abhängigkeit vom Weg nicht auftritt. Seien C und C' zwei verschiedene Wege von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} . Sei $-C$ der rückwärts durchlaufene Weg C . Es ist

$$\int_{-C} \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (5.39)$$

Dies entspricht dem Vertauschen der Grenzen bei 1-dimensionalen Integralen. Aus C' und C können wir einen geschlossenen Weg von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r}_0 zusammensetzen. Er werde mit $-CC'$ bezeichnet. Linienintegrale addieren sich, wenn man Wege zusammensetzt. Daher ist

$$\oint_{-CC'} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F} d\mathbf{r} - \oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (5.40)$$

Verschwundet also $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r}$ für jeden geschlossenen Weg, so sind die Linienintegrale von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} von der Wahl des Wegs unabhängig.

Es muß schließlich noch gezeigt werden, daß man aus V die richtige Kraft $\mathbf{F} = -\nabla V$ bekommt.

Es genügt, für beliebige infinitesimale Vektoren $\Delta\mathbf{r}$ zu zeigen, daß

$$\Delta\mathbf{r}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\Delta\mathbf{r}\nabla V(\mathbf{r}) \quad (5.41)$$

Durch Taylor-Entwicklung von $V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ in den Komponenten von $\Delta\mathbf{r}$ bis zu den Gliedern erster Ordnung sieht man, daß

$$V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \Delta\mathbf{r}\nabla V(\mathbf{r}) \quad (5.42)$$

Terme höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung, die auf der rechten Seite hinzukommen würden, sind vernachlässigbar, weil $\Delta\mathbf{r}$ sehr klein ist. Aus der

Wegunabhängigkeit von $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$ kann man schließen, daß die Formel (5.38) für jeden Wert von \mathbf{r}_0 gilt. Wir nehmen dies an und kommen gleich darauf zurück. Dann folgt

$$V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) - \int_{C_\Delta: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (5.43)$$

für einen beliebigen Weg C_Δ von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Es ist aus der Formel mit \mathbf{r}_0 und aus den obigen Betrachtungen zur Zusammensetzung von Wegen unmittelbar klar, daß die Formel gilt, wenn C_Δ aus einem rückwärts durchlaufenen Weg von \mathbf{r}_0 nach $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ zusammengesetzt ist. Da das Integral aber von der Wahl des Weges C_Δ von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ unabhängig ist, gilt die Aussage für jeden solchen Weg C_Δ . Wir wählen die gerade Linie. Sie ist infinitesimal kurz. Daher gilt:

$$\int_{C_\Delta} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \Delta\mathbf{r} \quad (5.44)$$

Also ist

$$V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \Delta\mathbf{r} \quad (5.45)$$

Mit Formel (5.42) bekommen wir damit die Behauptung (5.41).

5.3 Energie

Eine Kraft heißt konservativ, wenn sie nicht explizit zeitabhängig ist und ein Potential besitzt. Das Potential kann dann zeitunabhängig gewählt werden.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (5.46)$$

Besitzt eine Kraft ein Potential, sei es zeitunabhängig oder auch nicht, so kann man die Energie definieren durch

$$E(t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(t) + V(\mathbf{r}(t)) \equiv T + V \quad (5.47)$$

$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ heißt kinetische Energie, V potentielle Energie. Bewegt sich ein Teilchen längs einer Trajektorie $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$, so ist $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ einzusetzen. Wir betrachten physikalisch mögliche Bewegungen, so daß $\mathbf{r}(t)$ der Newtonschen Bewegungsgleichung genügt. Ist V nicht explizit t -abhängig, so gilt

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}(t)) \quad (5.48)$$

andernfalls hätte V noch ein zusätzliches Argument.

5.3.1 Energieerhaltung

Ist die Kraft konservativ, so ist die Energie erhalten, d.h. E ist t -unabhängig.

Direkter Beweis: Multipliziere (5.48) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}(t)$

$$m\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\dot{\mathbf{r}}(t)\nabla V(\mathbf{r}(t)) \quad (5.49)$$

Beide Seiten können umgeformt werden

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = m \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \quad (5.50)$$

nach der Produktregel der Differentiation, die bekanntlich auch für Skalar- (und Vektor-) produkte von Vektorfunktionen gilt. Die rechte Seite wird

$$-\frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t)) = -\dot{\mathbf{r}}(t)\nabla V(\mathbf{r}(t)) \quad (5.51)$$

Ausführlicher in Komponenten

$$-\frac{d}{dt} V(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} V + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} V + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} V \quad (5.52)$$

Nach der Umformung lautet die Gleichung $-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = -\frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t))$ oder

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}(t)) \right) = 0 \quad \text{q.e.d} \quad (5.53)$$

2. Beweis: Betrachte die vom System geleistete Arbeit bei der Bewegung längs der physikalischen Trajektorie von $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}(t_a)$ nach $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}(t_e)$. Wir parametrisieren die Bahnkurve durch die Zeit. Dann ist

$$A_{a \rightarrow e} = \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt \quad (5.54)$$

Nach der Newtonschen Bewegungsgleichung ist $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$. Also

$$\begin{aligned} A_{a \rightarrow e} &= \int_{t_a}^{t_e} m\ddot{\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_{t_a}^{t_e} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(t_e) - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2(t_a) = T(t_e) - T(t_a) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Die vom System geleistete Arbeit ist gleich der Änderung der kinetischen Energie. Dies gilt allgemein, gleichgültig ob die Kraft ein Potential hat und ob sie zeitunabhängig ist. Hat die Kraft ein Potential $V(\mathbf{r}, t)$, so ist nach (5.38) das Linienintegral der Kraft gerade gleich der Änderung der potentiellen Energie.

$$-A_{a \rightarrow e} = V(\mathbf{r}_e) - V(\mathbf{r}_a) \quad (5.56)$$

falls das Potential t -unabhängig ist (sonst stünden in den beiden Ausdrücken auf der rechten Seite noch zusätzliche Argumente t_e und t_a .) Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $A_{a \rightarrow e}$ liefert

$$T(t_a) + V(t_a) = T(t_e) + V(t_e) \quad (5.57)$$

also die Erhaltung der Energie.

5.3.2 Bemerkung

Die *Energieerhaltung* gilt auch dann noch, wenn zusätzlich zu einer Kraft, die ein Potential besitzt, noch die *Lorentzkraft* $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v}$ auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld tritt. Dies liegt daran, daß die von einem Magnetfeld ausgeübte Kraft bei der Bewegung längs einer physikalischen Trajektorie um

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v} dt \quad (5.58)$$

keine Arbeit leistet. Es ist

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v} dt = 0 \quad (5.59)$$

weil $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ auf \mathbf{v} senkrecht steht. Schreiben wir die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (5.60)$$

und multiplizieren skalar mit $\dot{\mathbf{r}}(t)$, so trägt der letzte Term nichts bei, und wir können fortfahren wie im ersten Beweis.

5.4 Überblick über bisher angetroffene Erhaltungssätze für einen Massenpunkt

<i>Bedingung</i>	<i>erhalteneGröße</i>	<i>Grund</i>
$\mathbf{F} = 0$	<i>Impuls</i> \mathbf{p}	<i>Newton</i> $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$
$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$	<i>Drehimpuls</i> $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
<i>(hinr. : kugelsym. Potential)</i>		
<i>konservative Kraft</i>	<i>Energie</i> $E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r})$	<i>s.Text</i>

Versucht man die Bewegungsgleichungen für verschiedene mechanische Probleme zu lösen, so schaut man als erstes, ob es nicht Erhaltungssätze gibt. Mit ihrer Hilfe kann man Bewegungsgleichungen vereinfachen, indem man alle oder einen Teil der Gleichungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführt. Man spricht deshalb von ‘ersten Integralen’ der Bewegungsgleichungen. Im Folgenden werden wir zwei wichtige Beispiele für dieses Verfahren kennenlernen; in Kapitel 8 das Keplerproblem und in Kapitel 7 die Lösung 1-dimensionaler Probleme (mit zeitunabhängiger Kraft) mit Hilfe der Energieerhaltung. Es gibt aber natürlich auch Probleme ohne Erhaltungssätze, z.B. erzwungene Schwingungen eines harmonischen Oszillators.

Kapitel 6

Harmonische Schwingungen in 1 Dimension

6.1 Lösungsmethoden für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst *freie ungedämpfte Schwingungen*. ‘Frei’ bedeutet ohne äußere Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -kx \quad (6.1)$$

oder

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.2)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Dies ist eine *lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung*. Die Terminologie soll erklärt werden. ‘Gewöhnlich’ bedeutet, daß keine partiellen Ableitungen auftreten, im Unterschied zu partiellen Differentialgleichungen (Beispiel: Schrödingergleichung in 3 Raumdimensionen). t heißt die unabhängige Variable, x die abhängige Variable. ‘Linear’ bedeutet, daß nur 1. Potenzen von x, \dot{x}, \ddot{x} auftreten. ‘Homogen’ bedeutet, daß kein x -unabhängiger Term auftritt (wenn ein solcher Term vorhanden ist, schreibt man ihn gewöhnlich auf die rechte Seite der Gleichung). ‘Konstante Koeffizienten’ bedeutet, daß die Koeffizienten 1,0 und ω_0^2 von \ddot{x}, \dot{x} und von $x(t)$ unabhängig sind. ‘2. Ordnung’ bedeutet, daß \ddot{x} vorkommt, aber keine höheren Ableitungen.

In Kapitel 7 wird gezeigt werden, wie die allgemeine Lösung mit Hilfe der Energieerhaltung gefunden werden kann. Es soll hier nur noch eine andere Methode vorgeführt werden, die allgemein für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen anwendbar ist.

Man löst die Gleichung mit Hilfe eines Ansatzes. Versuchen wir, Lösungen der Form

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (6.3)$$

zu finden. Wir werden gleich sehen, daß dies die Gleichung für beliebige a, b löst, vorausgesetzt $\omega = \omega_0$. Denn

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \\ \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x \end{aligned} \quad (6.4)$$

Der Ansatz enthielt schon die zwei willkürlichen Konstanten a und b , die in die allgemeine Lösung eingehen. Es genügt aber tatsächlich, per Ansatz zwei linear unabhängige spezielle Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zu finden. Der folgende allgemeine Satz über homogene lineare Gleichungen erlaubt dann, die allgemeine Lösung zu finden.

6.1.1 Superpositionsprinzip (mathematischer Satz)

Sind x_1 und x_2 zwei Lösungen einer homogenen linearen Gleichung für x , so ist auch

$$x = ax_1 + bx_2 \quad (6.5)$$

für beliebige Konstanten a, b eine Lösung.

Der Satz gilt nicht nur für gewöhnliche Differentialgleichungen, sondern auch für beliebige homogene lineare Gleichungen, insbesondere auch für die Schrödinger-Gleichung. Der Satz ist als Superpositionsprinzip bekannt. Es spielt in der Quantenmechanik eine entscheidende Rolle.

Für unser Problem ist der Satz leicht einzusehen. Gilt $\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1$ und $\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2$, so auch

$$\frac{d^2}{dt^2}(ax_1(t) + bx_2(t)) = -\omega_0^2(ax_1(t) + bx_2(t)) \quad (6.6)$$

für konstante a, b . Aus Lösungen $x_1(t) = \cos \omega_0 t$ und $x_2(t) = \sin \omega_0 t$ bekommt man so die allgemeine Lösung.

Man kann sich das Leben noch weiter vereinfachen, indem man zunächst komplexe Lösungen $x(t)$ bestimmt und mit den komplexen Superpositionen $ax_1(t) + bx_2(t)$ zwei solcher Lösungen mit $a, b \in C$ die reellen Lösungen ausdrückt.

6.1.2 Exponentialansatz (mathematischer Satz)

Homogene gewöhnliche Differentialgleichungen können durch einen Ansatz der Form $x(t) = e^{st}$ mit $s \in C$ gelöst werden.

Dies funktioniert immer, beispielsweise auch für freie Schwingungen mit Dämpfung, wo ein reeller Ansatz weniger leicht zu finden wäre. Aus dem Ansatz ergibt sich

$$\dot{x} = se^{st} \quad \ddot{x} = s^2 e^{st} \quad (6.7)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$(s^2 + \omega_0^2)e^{st} = 0 \quad (6.8)$$

Dies ist erfüllt, wenn $s^2 = -\omega_0^2$. Es gibt zwei Lösungen dieser Gleichung

$$s_1 = i\omega_0 \quad s_2 = -i\omega_0 \quad (6.9)$$

Die allgemeine komplexe Lösung lautet

$$x(t) = ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t} \quad a, b \in C \quad (6.10)$$

Man sieht sofort, daß die Lösung reell ist, wenn $b = \bar{a}$ (komplex konjugiert), da dann der zweite Term das konjugiert komplexe des ersten ist. Schreibt man $a = Ae^{i\phi}$ mit $A = |a| \in R$, so erhält man

$$x(t) = 2A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (6.11)$$

Mit Hilfe des Additionstheorems für trigonometrische Funktionen nimmt dies folgende Form an.

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad \text{mit} \quad a = A \cos \phi \quad \text{und} \quad b = A \sin \phi \quad (6.12)$$

Alternativ dazu kann man $e^{\pm i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm i \sin \omega_0 t$ einsetzen und erhält die allgemeine komplexe Lösung in der Form $a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ mit $a, b \in C$. Die Lösung ist reell, wenn $a, b \in R$.

Schließlich gibt es noch eine dritte Methode um zur reellen Lösung zu kommen.

6.1.3 3. mathematischer Satz

Sind die konstanten Koeffizienten in der Differentialgleichung reell, so ist mit $x(t)$ auch das konjugiert komplexe $\bar{x}(t)$ eine Lösung. Daher sind $\Re x(t)$ und $\Im x(t)$ reelle Lösungen.

Dies gibt nicht notwendig zwei linear unabhängige Lösungen. Lösungen x_1 und x_2 heißen linear unabhängig, wenn es *nicht* zwei Konstanten a, b gibt, die nicht beide verschwinden, und die Gleichung $ax_1(t) + bx_2(t) = 0$ für alle t erfüllen. Dieser 3. mathematische Satz ist unmittelbar einsichtig.

6.2 Freie gedämpfte Schwingungen

Neben der Rückstellkraft $-kx$ gibt es hier noch eine Reibungskraft $-\alpha\dot{x}$. Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (6.13)$$

oder

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.14)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$. Der Ansatz $x = e^{st}$, $\dot{x} = se^{st}$ und $\ddot{x} = s^2e^{st}$ wird eingesetzt und führt auf die Gleichung

$$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0 \quad (6.15)$$

Diese Gleichung hat im allgemeinen zwei Lösungen

$$s_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad s_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad (6.16)$$

Die Lösungen sind verschieden, falls $\lambda \neq \omega_0$. Der Fall $\lambda = \omega_0$ wird als kritische Dämpfung bezeichnet. Er wird einer besonderen Betrachtung bedürfen. Für nichtkritische Dämpfung lautet die allgemeine komplexe Lösung

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}. \quad (6.17)$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

6.2.1 $\lambda < \omega_0$ (unterkritische Dämpfung)

Dann ist die Wurzel imaginär, und man hat zwei Lösungen

$$s_1 = -\lambda + i\omega_R \quad \text{und} \quad s_2 = -\lambda - i\omega_R \quad (6.18)$$

mit $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = e^{-\lambda t}(a_1 e^{i\omega_R t} + a_2 e^{-i\omega_R t}) = e^{-\lambda t}(A \cos \omega_R t + B \sin \omega_R t) \quad (6.19)$$

Die Lösung ist reell, wenn A und B reell sind, oder äquivalent dazu, wenn $a_2 = \bar{a}_1$ (konjugiert komplex). Das ist eine gedämpfte Schwingung.

6.2.2 $\lambda > \omega_0$ (überkritische Dämpfung)

In diesem Fall ist die Wurzel $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ reell und wir haben zwei verschiedene reelle Zerfallsraten $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\lambda_1 = -s_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \lambda_2 = -s_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad (6.20)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \quad (6.21)$$

Die Lösung ist reell wenn A und B reell sind. Das ist der Kriechfall.

6.2.3 $\lambda = \omega_0$ (kritische Dämpfung)

In diesem Fall liefert der Ansatz nur eine linear unabhängige Lösung $x_1 = e^{-\lambda t}$. Eine zweite linear unabhängige Lösung kann man durch Grenzwertbetrachtung $\lambda \rightarrow \omega_0$ erhalten. Hierzu bestimmen wir diejenige Lösung, die den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1 \quad (6.22)$$

genügt. Da für die schon gefundene Lösung $x_1 \neq 0$ ist, sind sie beiden Lösungen linear unanständig. Für $\lambda < \omega_0$ lautet die gesuchte Lösung

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega_R} \sin \omega_R t e^{-\lambda t} \quad (6.23)$$

Im Grenzfall $\lambda \rightarrow \omega_0$ geht $\omega_R \rightarrow 0$ und die Lösung wird

$$x_2(t) = te^{-\lambda t} \quad (6.24)$$

Für unterkritische Dämpfung λ ist die Zerfallsrate gleich λ . Sie wächst also mit steigendem λ bis zum Grenzwert $\lambda = \omega_0$. Bei überkritischer Dämpfung dominiert bei großen Zeiten der erste Term $\propto e^{-\lambda_1 t}$. Da stets $\lambda_1 < \omega_0$ ist die größtmögliche Zerfallsrate $\lambda = \omega_0$. Sie wird bei kritischer Dämpfung erreicht.

6.3 Erzwungene Schwingungen

Wir betrachten die Schwingungen eines ungedämpften oder gedämpften harmonischen Oszillators unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $F_{ext}(t)$. Eine solche Kraft hat ein Potential

$$V_{ext}(x, t) = -x F_{ext}(t) \quad (6.25)$$

Da das Potential zeitabhängig ist, ist die Kraft nicht konservativ, und die Energie daher i.a. nicht erhalten. Die Bewegungsgleichung lautet nach Division durch m

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_{ext}(t)}{m} \quad (6.26)$$

Dies ist eine inhomogene gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Es gibt eine allgemeine Theorie, mit deren Hilfe man solche Gleichungen (für hinreichend 'gute' Funktionen $F_{ext}(t)$) immer lösen kann. Bevor wir in deren Diskussion eintreten, sei als Einführungsbeispiel die *ungedämpfte Schwingung mit periodischer äußerer Kraft* betrachtet. Die Kraft sei $F_{ext} = A \cos \omega t$, die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{A}{m} \cos \omega t \quad (6.27)$$

Durch Ansatz werden wir eine spezielle Lösung finden. Aus historischen Gründen spricht man von 'partikulären Lösungen', um sie von der allgemeinen Lösung, die von zwei freien Konstanten abhängen würde, zu unterscheiden. Beachte, daß A als Teil der Problemstellung gegeben ist. Es ist *keine* freie Konstante in der Lösung. Wir machen den Ansatz

$$x(t) = B \cos \omega t \quad (6.28)$$

Dies hat dieselbe Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ wie die äußere Kraft. Es ist $\ddot{x} = -\omega^2 B \cos \omega t$. Einsetzen ergibt

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)B \cos \omega t = \frac{A}{m} \cos \omega t \quad (6.29)$$

Die Gleichung ist gelöst, wenn $B = \frac{A}{m}(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$. Die gesuchte partikuläre Lösung lautet also

$$x(t) = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (6.30)$$

Die Lösung ist nur für $\omega \neq \omega_0$ wohldefiniert. Es handelt sich um eine Schwingung der Frequenz ω mit einer Amplitude $|B|$, die von ω abhängt, und bei $\omega \rightarrow \omega_0$ unbeschränkt wächst. Das Vorzeichen von B ist positiv für $\omega < \omega_0$. Die Schwingung ist dann in Phase mit der erzwingenden Kraft. Für $\omega > \omega_0$ ist $B < 0$, hier ist die Schwingung um π phasenverschoben (gegenläufig) zur erzwingenden Kraft (man erinnere, daß $-\cos \omega t = \cos(\omega t - \pi)$).

6.3.1 Allgemeine Lösung

Es stellt sich zunächst die Frage, wie man, von einer partikulären Lösung ausgehend, die allgemeine Lösung findet. Wir diskutieren dies gleich für die allgemeine Gleichung (6.26). Angenommen, wir haben eine partikuläre Lösung x_1 der Gleichung

$$\ddot{x}_1 + 2\lambda\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_{ext}}{m} \quad (6.31)$$

Es sei weiter x_h eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\ddot{x}_h + 2\lambda\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (6.32)$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so sehen wir, daß

$$x(t) = x_1(t) + x_h(t) \quad (6.33)$$

ebenfalls Lösung der Gl (6.26) ist. Da die allgemeine Lösung x_n der homogenen Gleichung von zwei freien Konstanten abhängt, haben wir damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Gl (6.26) gefunden. Dies illustriert der folgende mathematische Satz.

6.3.2 Mathematischer Satz

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen gewöhnlichen linearen Differentialgleichung ergibt sich als Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Für die ungedämpfte Schwingung mit äußerer Kraft $A \cos \omega t$ ergibt sich damit die allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad (6.34)$$

mit zwei freien Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

Aus diesem Resultat können wir außerdem durch Grenzübergang eine partikuläre Lösung für den Fall $\omega = \omega_0$ bestimmen (und aus dieser mit Hilfe des Satzes wiederum die allgemeine Lösung für $\omega = \omega_0$). Der Leser sollte aus dem Versagen des Ansatzes auf keinen Fall schließen, daß es für $\omega = \omega_0$ keine Lösung gäbe!

Um die Existenz des Grenzwertes sicherzustellen, betrachten wir den Grenzwert einer Lösung, die definierten Anfangsbedingungen genügt, z.B. $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Die freien Konstanten bestimmen sich hieraus zu

$$a = -\frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad b = 0 \quad (6.35)$$

Also ist

$$x(t) = \frac{A}{m(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (6.36)$$

Es ist

$$\cos \omega t - \cos \omega_0 t = 2 \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \quad (6.37)$$

Durch Taylor-Entwicklung $\sin x = x + \dots$ sieht man, daß $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$. Daher ist $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2}{\omega_0 - \omega} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t = t$, und die obige Lösung nimmt im Grenzfall $\omega \rightarrow \omega_0$ die Form an

$$x(t) = \frac{A}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (6.38)$$

Die Amplitude steigt linear mit der Zeit an. Dies ist natürlich eine Idealisierung. Real existierende harmonische Oszillatoren erlauben keine beliebig großen Auslenkungen. Was dann passiert, nennt man die Resonanzkatastrophe.

6.3.3 Gedämpfte Schwingungen, Kraft $\propto e^{i\omega t}$

Der Ansatz $x(t) = A \cos \omega t$ würde in dieser einfachen Form bei gedämpften Schwingungen nicht funktionieren. Man kann sich jedoch die Lösung des Problems erleichtern, indem man zunächst komplexe Lösungen und auch komplexe Kräfte zuläßt. Wie man daraus Lösungen für Gleichungen mit reellen Kräften bestimmt werden wir sehen. Die Betrachtung komplexer Lösungen ist wieder dadurch motiviert, daß man mit e-Funktionen leichter rechnet als mit trigonometrischen Funktionen. Betrachten wir also komplexe Lösungen $x(t) \in C$ der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{A}{2m} e^{i\omega t} \quad (6.39)$$

Wir machen den folgenden Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

$$x(t) = B e^{i\omega t} \quad B \in C \quad (6.40)$$

Die Lösung hat wieder dieselbe Periodizität wie die erzwingende Kraft. Es ist

$$\dot{x} = i\omega B e^{i\omega t} \quad \ddot{x} = -\omega^2 B e^{i\omega t} \quad (6.41)$$

Einsetzen liefert die Bestimmungsgleichung für B.

$$(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2) B e^{i\omega t} = \frac{A}{2m} e^{i\omega t} \quad (6.42)$$

Daraus

$$B = \frac{A}{2m} (-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2)^{-1} \quad (6.43)$$

Wir zerlegen den Vorfaktor in Betrag und Phase

$$z \equiv -\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2 = \rho e^{i\psi} \quad (6.44)$$

Dabei ist

$$\rho^2 = [(\Re z)^2 + (\Im z)^2] = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2] \quad (6.45)$$

$$\tan \psi = \frac{\Im z}{\Re z} = \frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.46)$$

Die Lösung selbst ist also

$$x(t) = \frac{A}{2m} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}} e^{i(\omega t - \psi)} = \frac{A\rho^{-1}}{2m} e^{i(\omega t - \psi)} \quad (6.47)$$

mit ψ aus der obigen Gleichung.

Die Amplitude der Schwingung ist maximal bei dem Wert $\omega = \omega_m$ wo der Ausdruck für ρ^2 in Klammer [] sein Minimum annimmt. Dies führt auf die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2} \rho^2 \Big|_{\omega=\omega_m} = 0 \quad (6.48)$$

oder

$$-2(\omega_0^2 - \omega_m^2) + 4\lambda^2 = 0 \quad (6.49)$$

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2 \quad (6.50)$$

sofern die Dämpfung hinreichend klein ist (sonst gibt es kein Maximum). Für $\omega \rightarrow 0$ bleibt ρ^{-1} endlich, für $\omega \rightarrow \infty$ geht es wie ω^{-2} gegen Null.

Für $\omega \rightarrow 0$ ist z positiv reell, also $\psi = 0$ (modulo π). Für $\omega \rightarrow \infty$ ist z negativ reell, also ebenfalls $\psi = 0$ (modulo π). Für $\omega = \omega_0$ muß $\tan \psi = \infty$ sein, also $\psi = \frac{\pi}{2}$ (modulo π). Für ω zwischen 0 und ω_0 und zwischen ω_0 und ∞ bleibt $\tan \psi$ endlich, ψ kann also dort nicht durch $\frac{\pi}{2}$ (modulo π) gehen. Außerdem wächst $\tan \psi$, und damit ψ zwischen 0 und ω_0 monoton an. Daraus ersieht man das qualitative Verhalten von Amplitude $\frac{A}{2m}\rho^{-1}$ und Phase ψ . In bildlicher Darstellung in Zeichnung 6.1.

6.3.4 Überlagerung von Kräften

Eine reelle Kraft der Form $F_{ext}(t) = A \cos \omega t$ läßt sich als Überlagerung von Kräften der Form $e^{i\omega t}$ schreiben.

$$F_{ext}(t) = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t} \quad (6.51)$$

Sei nun $x_\omega(t)$ eine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}_\omega + 2\lambda\dot{x}_\omega + \omega_0^2 x_\omega = \frac{F_\omega(t)}{m} \quad (6.52)$$

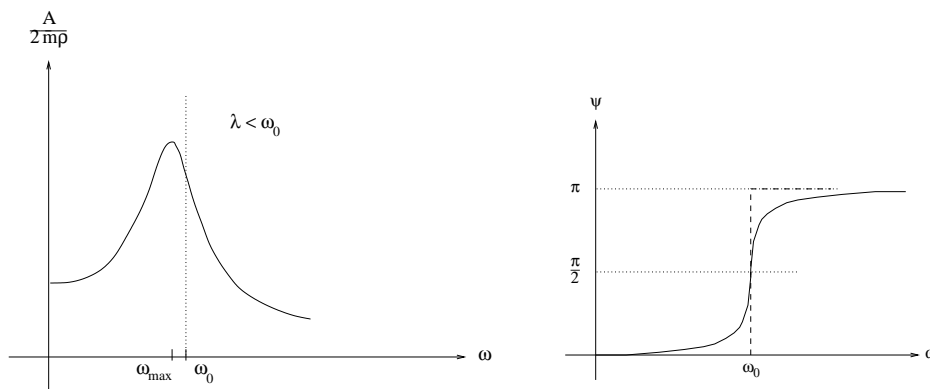


Abbildung 6.1: Amplitude und Phase in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz

und $F_{ext}(t)$ lasse sich als Summe von Kräften F_ω mit ω aus einer zunächst endlichen Menge I darstellen.

$$F_{ext}(t) = \sum_{\omega \in I} F_\omega(t) \quad (6.53)$$

Durch Addition der Gleichungen sieht man, daß dann

$$x(t) = \sum_{\omega \in I} x_\omega(t) \quad (6.54)$$

eine Lösung der ursprünglichen Gleichung $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_{ext}}{m}$ ist. Dies ist ebenfalls ein *mathematischer Satz*. Ich bezeichne ihn als

6.3.5 Superpositionsprinzip für die Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen

Zerlegt sich der inhomogene Term einer solchen Gleichung in eine Summe $\frac{F}{m} = \frac{1}{m} \sum_\omega F_\omega$, und sind x_ω Lösungen zu einzelnen inhomogenen Termen, so ist $\sum_\omega x_\omega$ eine Lösung zu $\frac{F}{m}$.

Unter geeigneten Voraussetzungen, die die Konvergenz der Reihe garantieren, gilt der Satz auch für unendliche Reihen, und sogar für Integrale, $F(t) = \int d\omega F_\omega(t)$ und $x(t) = \int d\omega x_\omega(t)$.

Kehren wir zur gedämpften Schwingung mit erzwingender Kraft $A \cos \omega t$ zurück. Wir kennen die Lösung zur Kraft $\frac{A}{2} e^{i\omega t}$. Unter $\omega \rightarrow -\omega$ bleibt ρ

invariant und ψ ändert das Vorzeichen (modulo Addition von π). Also liefert das Superpositionsprinzip die folgende Lösung

$$x(t) = \frac{A}{2m} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}} (e^{i(\omega t - \psi)} + e^{-i(\omega t - \psi)}) \quad (6.55)$$

$$= \frac{A}{m} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \psi) \quad (6.56)$$

ψ hängt in der oben bestimmten Weise von ω ab. Diese partikuläre Lösung ist reell. Die allgemeine Lösung erhält man durch Hinzufügen der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, die schon früher bestimmt wurde.

6.3.6 Der Satz von Fourier

Die weitreichende Bedeutung des Superpositionsprinzips für inhomogene lineare Differentialgleichungen ergibt sich aus der Möglichkeit der Fourier-Entwicklung von beliebigen, hinreichend ‘guten’ Funktionen von t und der Existenz von Lösungen für alle Kräfte $\propto e^{i\omega t}$.

Sei $F(t)$ eine periodische Funktion der Periode T , d.h. $F(t+T) = F(t)$. Dann läßt F eine Zerlegung der Form

$$F(t) = \sum_{\omega \in \omega_1 Z} A_\omega e^{i\omega t} \quad (6.57)$$

zu. Dabei ist $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, und $\omega_1 Z$ ist die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von ω_1 . Man bezeichnet manchmal ω_1 als Grundfrequenz der periodischen Funktion und Beiträge von $\pm n\omega_1$, $n > 1$ als Oberwellen. Für die Koeffizienten gilt die Umkehrformel

$$A_\omega = \frac{1}{T} \int_0^T dt F(t) e^{-i\omega t} \quad (\omega \in \omega_1 Z) \quad (6.58)$$

Die genaue Art der Konvergenz der Summe (6.57) hängt davon ab, in welchem Sinn $F(t)$ eine ‘gute Funktion’ ist. Ist F stückweise stetig, so konvergiert die Reihe für jedes t gegen $F(t)$, außer an den Sprungstellen; dort konvergiert sie gegen den Mittelwert.

Es gibt auch eine entsprechende Formel für nicht periodische aber quadratintegrale Funktionen $F(t)$, $-\infty < t < \infty$. Sie lautet

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_\omega e^{i\omega t} \quad (6.59)$$

$$A_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) e^{-i\omega t} \quad (6.60)$$

Quadratintegrierbarkeit verlangt $\int_{-\infty}^{\infty} dt |F(t)|^2 < \infty$. Für Näheres hierzu sei auf die Mathematik verwiesen. Ich werde hier nur periodische Funktionen betrachten. Das Schlußresultat wird sich für beliebige Kräfte als richtig erweisen (vgl. Übungen).

6.3.7 Gedämpfte Schwingungen mit beliebiger zeitlich periodischer erzwingender Kraft

Die Periode sei T , und $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Dann läßt die Kraft eine Entwicklung in eine Fourier-Reihe zu

$$F(t) = \sum_{\omega \in \omega_1 Z} F_\omega(t) \quad \text{mit} \quad F_\omega(t) = A_\omega e^{i\omega t} \quad (6.61)$$

Eine partikuläre Lösung zur Kraft F_ω ist, wie wir schon wissen

$$x_\omega(t) = \frac{A_\omega}{m} [-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2]^{-1} e^{i\omega t} \quad (6.62)$$

Eine partikuläre Lösung zur Kraft F ist also

$$x(t) = \sum_{\omega \in \omega_1 Z} \frac{A_\omega}{m} [-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2]^{-1} e^{i\omega t} \quad (6.63)$$

Die Koeffizienten A_ω hängen von F ab.

Wir sehen, daß $x(t)$ die inverse Fouriertransformierte gemäß Gl. (6.57) zu Koeffizienten S'_ω ist, die ein Produkt von zwei Faktoren $\frac{A_\omega}{m}$ und $[-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2]^{-1}$ sind. Es gibt in der Theorie der Fouriertransformation spezielle Methoden um solche Fourier-Reihen zu berechnen, wenn man die Fourier-Reihen mit den individuellen Faktoren als Koeffizienten kennt. Es würde uns hier aber zu weit führen, diese Theorie zu rekapitulieren.

Stattdessen wende ich, um die Summe auszuführen, eine Fußgängermethode an, die sehr häufig hilfreich ist, wenn man Summen oder Integrale nicht auswerten kann. Unser Ziel ist es, eine Formel zu gewinnen, die F explizit enthält, statt implizit über A_ω .

Man stelle sich vor, der Faktor $[-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2]^{-1}$ wäre abwesend. Dann könnte man die Summe mit Hilfe von Gl (6.57) sofort ausführen, das Resultat wäre F .

Der Trick ist nun, den Faktor mit Hilfe einer Integraldarstellung ‘wegzuzaubern’. Die Integraldarstellung wird die folgende Form haben

$$[-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2]^{-1} = \sum_i \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{-\alpha_i \tau - i\omega\tau} \quad (6.64)$$

mit von ω unabhängigen Koeffizienten $\alpha_i \in C$. Es muß $\Re\alpha_i > 0$ sein, damit das Integral konvergiert. Die Summe über i wird in unserer Anwendung nur zwei Terme $i=1,2$ haben. Eine Darstellung dieser Form werden wir sehr leicht gewinnen können mit Hilfe von Partialbruchzerlegung und nachfolgender Benutzung der Formel

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty d\tau e^{-A\tau} \quad (6.65)$$

Diese Formel gilt für alle $A \in C$ mit $\Re A > 0$.

Haben wir die Integraldarstellung (6.64) so kann sie in die auszuwertende Summe über ω eingesetzt werden. Danach vertauscht man Summe über ω und Integral über τ .

Im Einzelnen: Seien z_1, z_2 die beiden Nullstellen des Polynoms $z^2 - 2i\lambda z - \omega_0^2$,

$$z_1 = i\lambda_1 + \omega_R, \quad z_2 = i\lambda_1 - \omega_R, \quad (6.66)$$

so ist

$$-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2 = -(\omega - z_1)(\omega - z_2),$$

und $\Re i(\omega - z_1) = \Re i(\omega - z_2) = \lambda > 0$.

Wir machen eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2} = \frac{-i}{z_1 - z_2} \left[\frac{1}{i(\omega - z_1)} - \frac{1}{i(\omega - z_2)} \right].$$

Der Vorfaktor ist gleich $1/2i\omega_R$. Die Faktoren i wurden so verteilt, dass die beiden Größen $A = i(\omega - z_1) = \lambda + i(\omega - \omega_R)$ und $A = i(\omega - z_2) = \lambda + i(\omega + \omega_R)$ positive Realteile haben. Nun können wir die Integraldarstellung (6.65) für die beiden Summanden innerhalb der Klammer [...] einsetzen und erhalten als Resultat

$$x(t) = \sum_{\omega \in \omega_1 \mathbf{z}} \frac{A_\omega}{2i\omega_R m} \int_0^\infty d\tau \left[e^{(-\lambda + i\omega_R)\tau} - e^{(-\lambda - i\omega_R)\tau} \right] e^{i\omega(t-\tau)}. \quad (6.67)$$

Nach Vertauschen von Summe und Integral kann die ω -Summe ausgeführt werden und wir erhalten

$$x(t) = \frac{1}{\omega_R m} \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \sin \omega_R \tau F(t - \tau) .$$

Führen wir $t' = t - \tau$ als Integrationsvariable ein, so erhalten wir die folgende Formel

$$x(t) = \frac{1}{\omega_R m} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\lambda(t-t')} \sin \omega_R (t - t') F(t') . \quad (6.68)$$

Man sieht, dass dies die kausale Lösung ist: $x(t)$ hängt nur von $F(t')$ für $t' < t$ ab. Ist $t - t' \gg \lambda^{-1}$, so wird der Einfluss von $F(t')$ auf $x(t)$ vernachlässigbar sein. Die Dämpfung λ bestimmt also die Zeit, während der eine äußere Kraft merklich nachwirkt.

Kapitel 7

Lösung 1-dimensionaler Probleme mit Hilfe der Energieerhaltung

In einer Dimension besitzt jede geschwindigkeitsunabhängige Kraft ein Potential

$$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x) \quad (7.1)$$

V ist das Negative der Stammfunktion von F . Nehmen wir an, daß dieses Potential nicht explizit zeitabhängig ist. Dann gilt die Energieerhaltung. Es ist also

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \text{const} \quad (7.2)$$

Die Energie E ist durch die Anfangsbedingungen $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$ bestimmt. Lösen wir nach \dot{x} auf, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))} \quad (7.3)$$

Dies ist eine Differentialgleichung *1. Ordnung* für $x(t)$. Diese Gleichung kann man leicht auf eine Integration zurückführen. Man benutzt dazu ein Verfahren, das man als Separation der Variablen bezeichnet. Hierzu betrachtet man die Umkehrfunktion $t(x)$ von $x(t)$. Es gilt bekanntlich für die Ableitung einer

Umkehrfunktion

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \quad (7.4)$$

Daher

$$\frac{dt(x)}{dx} = \left(\frac{2}{m}(E - V(x))\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.5)$$

Diese Differentialgleichung sagt einfach, daß die Ableitung von t nach x eine vorgegebene Funktion von x ist. Also ist $t(x)$ die zugehörige Stammfunktion. Sie ist bis auf eine additive Konstante bestimmt.

$$t(x) = \int_{x_0}^x dx' \left(\frac{2}{m}(E - V(x'))\right)^{-\frac{1}{2}} + t_0 \quad (7.6)$$

Stellt man sich dx als kleine Ortsänderung vor, die im Zeitintervall dt stattfindet, so besteht nach (7.3) die folgende Beziehung zwischen den Größen

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad (7.7)$$

In dieser Formel stehen alle t links und alle x rechts ('Separation der Variablen'). Addiert man die kleinen Schritte in der Zeit bzw. im Raum auf, so erhält man wieder die Formel (7.6), mit $t_0 = t(x_0)$; x_0 Anfangsort, t_0 Anfangszeit.

Es ist wichtig, den Definitionsbereich der Funktion $t(x)$ zu bestimmen. Er besteht nur aus solchen Orten x , die ein Teilchen der Energie E erreichen kann. Da die kinetische Energie positiv semidefinit ist, muß der Ausdruck unter der Wurzel positiv semidefinit sein. Damit ist sichergestellt, daß der Integrand in (7.6) reell ist.

Es liegen also nur solche x im Definitionsbereich von $t(x)$, für die gilt

$$E - V(x) \geq 0 \quad (7.8)$$

Beispiel: Freier ungedämpfter harmonischer Oszillator

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.9)$$

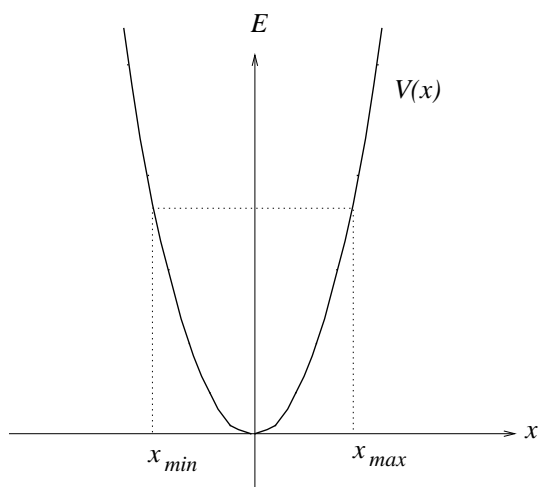


Abbildung 7.1: Potential eines harmonischen Oszillators

Da $V(x) \geq 0$ kann die Energie nur positive Werte $E \geq 0$ annehmen. Der Definitionsbereich ergibt sich aus Zeichnung 7.1.

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad (7.10)$$

Die Lösung

$$t(x) = \int dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \int dx \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{h^2 - x^2}} \quad (7.11)$$

mit $h = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2E}{m}}$ führt auf eine bekannte Stammfunktion (siehe Formelsammlung)

$$t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{x}{h} + t_0 \quad (7.12)$$

Die Umkehrfunktion ist leicht zu bestimmen. Bringt man erst t_0 auf die andere Seite und multipliziert mit ω_0 , so kann man auf beiden Seiten den Sinus anwenden

$$x = h \sin \omega_0(t - t_0) \quad (7.13)$$

h ist die maximale Auslenkung; sie ist durch die Energie bestimmt. Es ist $-x_{min} = h = x_{max}$.

Kapitel 8

Bewegung im Zentralfeld

8.1 Allgemeine Theorie

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunkts in einem konservativen, Kraftfeld $F(\mathbf{r})$, dessen Potential (bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs) nur von der Länge

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8.1)$$

des Ortsvektors $\mathbf{r} = (x, y, z)$ abhängt. Man nennt dies ein Zentralfeld. Das Newtonsche Gravitationspotential eines Massenpunkts wird das wichtigste Beispiel sein. Die Kraft ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r). \quad (8.2)$$

In Komponenten ist wegen $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$F_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial x} V(r) = -\frac{\partial r}{\partial x} V'(r) = -2x \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} V'(r) = -\frac{x}{r} V'(r) \quad (8.3)$$

und entsprechend für die andern Komponenten F_y, F_z . Dabei ist ' die Ableitung nach dem Argument r . In vektorieller Schreibweise bekommen wir

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla r V'(r) = -\frac{\mathbf{r}}{r} V'(r), \quad \text{mit} \quad V'(r) = \frac{d}{dr} V(r). \quad (8.4)$$

Die Kraft hat die Richtung des Radiusvektors; ihr Betrag hängt nur von r ab.

Es gelten die folgenden Erhaltungssätze

Drehimpulserhaltung Da \mathbf{F} die Richtung von \mathbf{r} hat, ist das Drehmoment $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ und daher der Drehimpuls \mathbf{L} erhalten,

$$\mathbf{L} = \text{const.}$$

Energieerhaltung Aus der Existenz eines nicht explizit von der Zeit abhängigen Potentials folgt die Erhaltung der Energie,

$$E = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \text{const.}$$

Die Drehimpulserhaltung hat mehrere Konsequenzen.

ebene Bewegung : Wählen wir das Koordinatensystem so, daß der zeitlich konstante Vektor \mathbf{L} in z-Richtung zeigt,

$$\mathbf{L} = (0, 0, l) \tag{8.5}$$

so ist $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = lz = 0$, denn nach Definition steht $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ auf \mathbf{r} senkrecht. Somit hat der Ortsvektor die Form

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0).$$

Die Bewegung verläuft also in einer Ebene.

Der Fall $l = 0$ müßte streng genommen separat behandelt werden. In diesem Fall ist $\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = 0$, also hat $\dot{\mathbf{r}}$ dieselbe Richtung wie \mathbf{r} . Die Bahn ist daher ein Strahl durch den Ursprung, und liegt daher auch in einer Ebene.

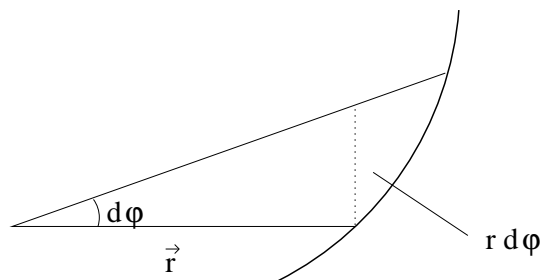


Abbildung 8.1: Überstrichene Fläche

Flächensatz Wir führen Polarkoordinaten in der Ebene ein,

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \\y(t) &= r(t) \sin \varphi(t).\end{aligned}\tag{8.6}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y}(t) &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Wir berechnen daraus die z-Komponente des Drehimpulses

$$\begin{aligned}L_z &= m(xy\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= m \left(r\dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi - r\dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \right)\end{aligned}$$

Erster und dritter Term kürzen sich, die andern beiden lassen sich mit der Identität $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ zusammenfassen. Als Resultat erhalten wir

$$mr^2 \dot{\varphi} = l = \text{const.}\tag{8.8}$$

Dies ist der mathematische Ausdruck des als Flächensatz bekannten 2. Keplerschen Gesetzes,

In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen.

Der Winkel φ ändert sich im infinitesimalen Intervall dt um $d\varphi = \frac{d}{dt}\varphi dt = \dot{\varphi} dt$. Dabei überstreicht der Fahrstrahl \mathbf{r} die Fläche dF , die als Fläche des kleinen rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten r und $r \tan d\varphi \approx r d\varphi$ approximiert werden kann, vgl. Zeichnung 8.1.

$$dF = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} dt = \frac{l}{2m} dt.\tag{8.9}$$

Die pro Zeiteinheit vom Fahrstrahl überstrichene Fläche ist $l/2m$, also konstant.

effektives Potential Wir betrachten nun die Energie. Die kinetische Energie T wird in Polarkoordinaten umgerechnet.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Damit wird die Energie $E = T + V$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r). \quad (8.11)$$

Nun können wir die Drehimpulserhaltung (8.8) ausnutzen und erhalten

$$\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Definieren wir das l -abhängige *effektive Potential*

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad (8.12)$$

so nimmt die Energie schließlich die folgende Form an,

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r). \quad (8.13)$$

Als nächstes nutzen wir die Energieerhaltung aus. Gl.(8.13) sieht wie die Energie für die Bewegung eines Massenpunkts in 1 Dimension mit Koordinate r im Potential $V_{eff}(r)$ aus. Die weitere Analyse folgt daher der Behandlung 1-dimensionaler Probleme mittels Energieerhaltung.

Auflösung von Gl.(8.13) nach \dot{r} liefert

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}.$$

Dies löst man mittels Separation der Variablen. Man betrachtet die Umkehrfunktion $t(r)$ von $r(t)$. Es ist $dt/dr = (dr/dt)^{-1}$. Somit

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}}. \quad (8.14)$$

Gesucht ist also eine Funktion t von r , deren Ableitung eine gegebene Funktion von r ist. Dieses Problem wird durch die Stammfunktion gelöst,

$$t(r) = \int dr \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}} + t_0. \quad (8.15)$$

Die Umkehrfunktion davon ist die gesuchte Funktion $r(t)$ des Abstands von der Zeit.

8.1.1 Bahnkurve

Wir suchen die Abhängigkeit $r = r(\varphi)$ des Abstands vom Winkel φ . Man betrachtet stattdessen die Umkehrfunktion $\varphi(r)$. Es ist nach Gl.(8.8) $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2(t)}$ und daher mit Gl.(8.14)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{l}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}}. \quad (8.16)$$

Damit ist die Ableitung der gesuchten Funktion $\varphi(r)$ gefunden, und $\varphi(r)$ ergibt sich wieder als Stammfunktion,

$$\varphi(r) = \int \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}} + \varphi_0 \quad (8.17)$$

mit einer willkürlichen Konstanten φ_0 .

Schlußfolgerung: Die Lösung der Bewegungsgleichungen für die Bewegung eines Massenpunkts im Zentralfeld kann durch Benutzung der Drehimpuls- und Energieerhaltung auf Quadraturen, d.h. Bestimmung von Stammfunktionen, zurückgeführt werden.

8.1.2 Abzählen der Integrationskonstanten

Wir wollen nachprüfen, daß wir die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen gefunden haben. Dazu muß gezeigt werden, daß die gefundene Lösung von 6 freien Konstanten abhängt.

Die Richtung des Drehimpulsvektors wird durch **2** willkürlich wählbare Winkel bestimmt. Dazu kommt **1** Winkel φ_0 der die Richtung der großen Halbachse in der Bewegungsebene festlegt, die **2** Konstanten l und E , und schließlich **1** Konstante t_0 aus der freien Wahl des Zeitnullpunkts. Zusammen sind das **6** freie Konstanten.

8.2 Das Keplerproblem

8.2.1 Die Keplerschen Gesetze

Johannes Kepler (27. 12. 1571 - 15.11.1630) entdeckte die drei Keplerschen Gesetze für die Bewegung der Planeten um die Sonne. Er benutzte dazu die astronomischen Beobachtungen von Tycho Brahe.

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. (Flächensatz) In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Diese Gesetze sollen nun aus der allgemeinen Theorie unter Benutzung des Newtonschen Gravitationsgesetzes hergeleitet werden.

Nach Newton übt ein Massenpunkt der Masse M am Ursprung auf einen Massenpunkt der Masse m am Ort \mathbf{r}

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{GmM}{r^2}$$

aus. Dabei ist G die Newtonsche Gravitationskonstante. Dies ist ein Zentralfeld. Das zugehörige Potential ist

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{mit } \alpha = GmM. \quad (8.18)$$

Das effektive Potential nimmt daher die folgende Form an

$$V_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (8.19)$$

Man betrachtet die Sonne als im Ursprung O eines Inertialsystems feststehend. Dies ist nur näherungsweise richtig und wird später zu korrigieren sein.

Das zweite Keplersche Gesetz kennen wir bereits. Es gilt in jedem Zentralfeld.

Das erste und das dritte Gesetz sind hingegen spezielle Konsequenzen des $1/r$ -Potentials, wie wir gleich sehen werden. Die allgemeine Relativitätstheorie lehrt, daß es tatsächlich eine sehr kleine $1/r^3$ Korrektur zum $1/r$ -Potential

gibt. Diese führt zu einer kleinen Abweichung von der Ellipsenform der Planetenbahnen. Dieser Effekt ist für den Planeten mit der geringsten Entfernung von der Sonne am stärksten, und führt zur sogenannten Periheldrehung des Merkur.

8.2.2 Bahnkurven

Wir betrachten zuerst die Bahnkurven. Das effektive Potential für ein $l > 0$ ist in Figur 8.2.2 gezeigt. Wir beantworten zunächst die Frage nach dem

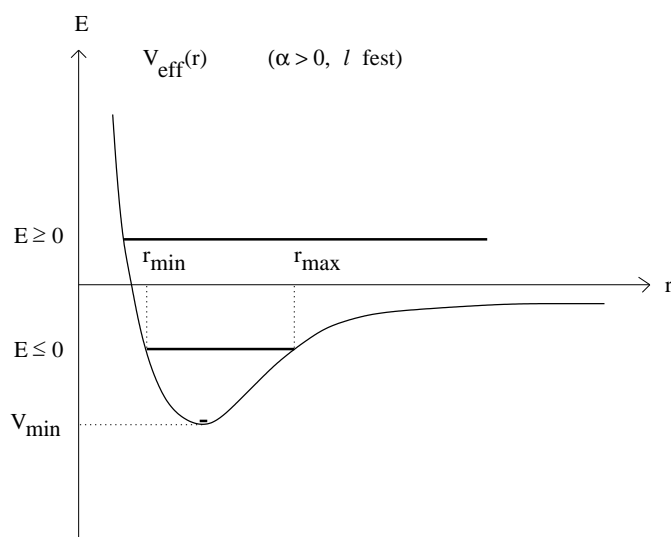


Abbildung 8.2: Effektives Potential

Bereich möglicher Abstände r des Planeten von der Sonne bei gegebenem Drehimpuls l und gegebener Energie E . Die Antwort folgt aus der Forderung, daß stets

$$E \geq V_{\text{eff}}(r) \quad (8.20)$$

sein muß, da $\frac{m}{2} \dot{r}^2 \geq 0$.

Wir bestimmen jetzt den Abstand r_0 , wo das effektive Potential sein Minimum annimmt. Er bestimmt sich aus der Bedingung $V'(r_0) = 0$. Da $V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$, ergibt sich

$$r_0 = \frac{l^2}{m\alpha}, \quad (8.21)$$

$$V_{eff}(r_0) = -\frac{m\alpha^2}{2l^2} \equiv V_{min}. \quad (8.22)$$

Die Bedingung $V_{min} \leq E$ liefert im Fall negativer Energien eine Einschränkung an den Drehimpuls bei gegebener Energie

$$l^2 \leq \frac{m\alpha^2}{2|E|} \quad \text{falls} \quad E < 0. \quad (8.23)$$

Aus der Zeichnung 8.2.2 lesen wir nun folgendes ab.

1. Ist $E \geq 0$, so gibt es einen von E abhängigen minimalen Abstand r_{min} . Die Bahnkurve bleibt im Bereich

$$r \geq r_{min}.$$

2. Ist $E < 0$ so gibt es einen minimalen Abstand r_{min} und einen maximalen Abstand r_{max} ; beide hängen von E ab. Die Bahnkurve bleibt im beschränkten Bereich

$$r_{min} \leq r \leq r_{max}.$$

3. Ist speziell $E = V_{min}$ so gilt $r_{min} = r_0 = r_{max}$. Die Bahnkurve ist kreisförmig mit Radius r_0 .

Wir betrachten simultan die Fälle positiver und negativer Energie. Die Stammfunktion (8.17) ist nach den Regeln der Integralrechnung gleich dem unbestimmten Integral mit oberer Grenze r . Um es auszuwerten, machen wir eine Variablensubstitution

$$u = \frac{1}{r}, \quad du = -\frac{dr}{r^2}.$$

Setzt man den Ausdruck (8.19) für das effektive Potential ein, so ergibt sich

$$\varphi(r) = \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2m\alpha}{l^2}u - u^2}}.$$

In Formelsammlungen findet man das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{Ax + B}{\sqrt{\Delta}} + const \quad (8.24)$$

für

$$A < 0, \quad \Delta \equiv B^2 - AC > 0.$$

Wir führen wir die Größen

$$\begin{aligned} p &= \frac{l^2}{m\alpha}, \\ \epsilon &= \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \end{aligned} \quad (8.25)$$

ein. Setzen wir nun $A = -1$, $B = \frac{m\alpha}{l^2} = \frac{1}{p}$, $C = \frac{2mE}{l^2}$, $x = \frac{1}{r}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - AC = \frac{2m}{l^2} \left(\frac{m\alpha^2}{2l^2} + E \right) \\ &= \left(\frac{m\alpha}{l^2} \right)^2 \epsilon^2 = \left(\frac{\epsilon}{p} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.26)$$

und das Integral wird

$$\varphi(r) = -\arcsin \left(\frac{-\frac{1}{r} + \frac{1}{p}}{\frac{\epsilon}{p}} \right) + \varphi'_0. \quad (8.27)$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Sinus, so erhält man

$$-\sin(\varphi(r) - \varphi'_0) = \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{p}{r} \right).$$

Da $\sin(\phi + \frac{1}{2}\pi) = \cos \phi$ ist, so kann man schließlich auch schreiben

$$\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (8.28)$$

mit einer neuen freien Konstanten φ_0 . Die Größen ϵ und p hängen von Energie und Drehimpuls ab. Sie sind in Gl.(8.25) angegeben worden.

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts in der Ebene in Polarkoordinaten.

negative Energie $E < 0$. In diesem Fall ist $0 \leq \epsilon < 1$. Wir bekommen die Bahngleichung einer Ellipse in der Ebene in Polarkoordinaten, vgl. Zeichnung 8.2.2. Sie hat einen Brennpunkt im Ursprung.

Der Winkel φ_0 gibt die Richtung des sonnennächsten Punkts an, und

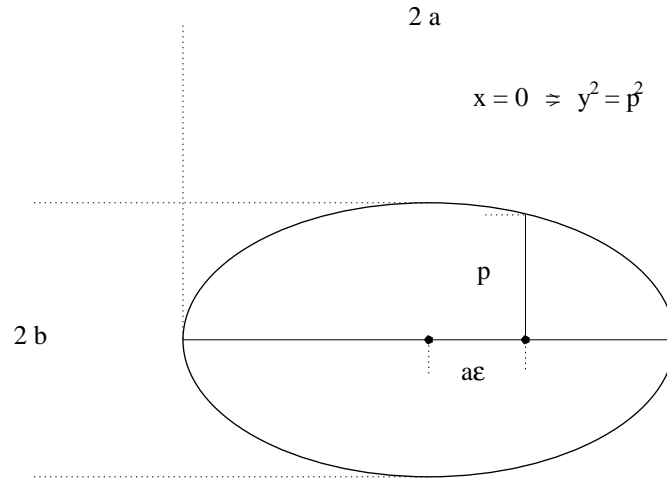


Abbildung 8.3: Ellipse

$\epsilon \geq 0$ ist die Exzentrizität. Der minimal mögliche Wert für E ergibt wie erwartet eine Kreisbahn, da dann $\epsilon = 0$ ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\varphi_0 = 0$. Wir können in kartesische Koordinaten umrechnen vermöge $x = r \cos \varphi$, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Die Gleichung nimmt dann nach Durchmultiplizieren mit r die folgende Form an

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x.$$

Bringt man ϵx auf die andere Seite und quadriert, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung einer Ellipse in kartesischen Koordinaten

$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.29)$$

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad \text{große Halbachse} \quad (8.30)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}} \quad \text{kleine Halbachse} \quad (8.31)$$

Die grosse Halbachse ist proportional $|E|^{-1}$.

positive Energie $E > 0$. In diesem Fall ist $\epsilon > 1$. Wir bekommen die Bahngleichung eines Hyperbelast in der Ebene in Polarkoordinaten,

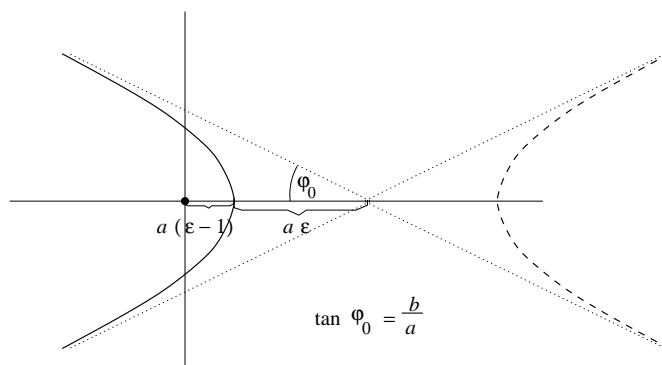


Abbildung 8.4: Hyperbel

vgl. Zeichnung 8.2.2.

Die Hyperbel hat einen Brennpunkt im Ursprung. Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ist formal identisch wie im Fall der Ellipse, wenn man b durch ib und a durch $-a$ ersetzt. Die Gleichung hat die Form

$$\frac{(x - a\epsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.32)$$

$$a = \frac{\alpha}{2E} \quad (8.33)$$

$$b = \frac{l}{\sqrt{2mE}} \quad (8.34)$$

Die Hyperbel hat zwei Asymptoten mit Steigung

$$\tan\varphi_0 = \pm \frac{b}{a}. \quad (8.35)$$

Der Massenpunkt kommt aus dem Unendlichen und geht ins Unendliche. Asymptotisch ist seine Bahn durch die Asymptoten der Hyperbel gegeben. Der Ablenkungswinkel (Streuwinkel) ist also $2|\varphi_0|$.

verschwindende Energie $E = 0$. In diesem Fall ist $\epsilon = 1$ und man bekommt die Gleichung einer Parabel mit der Sonne im Brennpunkt.

Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen.

Manche Kometen bewegen sich auf sehr exzentrischen Ellipsenbahnen. Sie kehren wieder. Der Halleysche Komet ist ein Beispiel eines wiederkehrenden Kometen. Kometen können sich auch auf Parabel- oder Hyperbelbahnen bewegen. In diesem Fall kehren sie nicht wieder.

8.2.3 Zeitlicher Ablauf der Bewegung auf Ellipsenbahnen

Kepler folgend führt man statt des Polarwinkels φ einen Winkel ψ ein, der im folgenden definiert wird (vgl. Zeichnung 8.2.3).

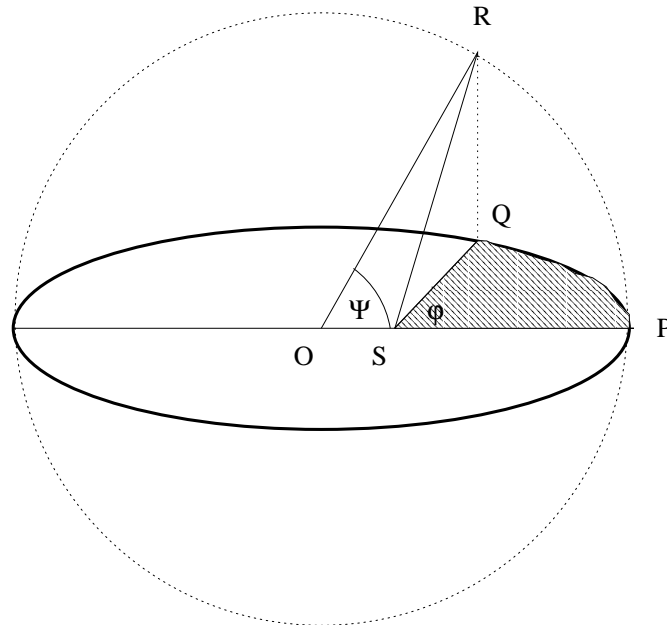


Abbildung 8.5: Winkel

Man kann dann die Zeitentwicklung von ψ aus dem Flächensatz und der Ellipsengestalt der Bahn auf elementarem Wege bekommen. Diese von Kepler stammende Überlegung sei im folgenden zuerst vorgestellt.

Die Ellipse habe den Brennpunkt S und Scheitelpunkt (sonnennächsten Punkt) P , der Planet sei bei Q . Die Ellipse geht aus einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius a durch Stauchung in y -Richtung um einen Faktor $\frac{b}{a}$ hervor. Dabei geht Q aus dem Punkt R hervor. Der Strahl OR hat gegen die x -Achse (große Achse der Ellipse) den Winkel ψ .

Es sei T die Umlaufzeit. Zur Zeit t_0 sei der Planet im Scheitel P , und zur Zeit t sei er bei Q . Die Fläche der ganzen Ellipse ist gleich $\frac{b}{a}$ mal der Fläche πa^2 des Kreises, also gleich πab . Sie wird vom Fahrstrahl in der Umlaufzeit T überstrichen.

Es sei nun $F(t)$ die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche während der

Planet von P nach Q wandert. Wegen des Flächensatzes ist

$$F(t) = \frac{t - t_0}{T} \pi ab. \quad (8.36)$$

Nun geht aber die Fläche $F(t)$ aus der Fläche F_{SPR} , die von den Strahlen SR und SP und dem Kreisbogen zwischen P und R begrenzt wird durch Stauchung um $\frac{b}{a}$ hervor. Daher ist

$$F(t) = \frac{b}{a} F_{SPR}.$$

Die Fläche F_{SPR} ist Differenz des Kreisausschnitts F_{OPR} , der von den Strahlen OP und OR und dem Kreisbogen PR begrenzt wird, und dem Dreieck ORS ,

$$F_{SPR} = F_{OPR} - F_{ORS}$$

Die Fläche des Kreisausschnitts ist

$$F_{OPR} = \frac{\psi}{2\pi} \pi a^2 = \frac{\psi}{2} a^2.$$

Die Strecke zwischen O und S ist die Exzentrizität in Einheiten der großen Halbachse, also gleich $a\epsilon$. Nach einem trigonometrischen Satz ist die Fläche des Dreiecks mit eingeschlossenem Winkel ψ und angrenzenden Seiten a und $a\epsilon$ daher

$$F_{ORS} = \frac{1}{2} a^2 \epsilon \sin \psi$$

Setzen wir diese geometrischen Ausdrücke für die verschiedenen Flächen zusammen, so bekommen wir

$$F(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{\psi}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^2 \epsilon \sin \psi \right) = \frac{1}{2} ab (\psi - \epsilon \sin \psi). \quad (8.37)$$

Vergleichen wir die mit dem aus dem Flächensatz stammenden Ausdruck (8.36) so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für $\psi(t)$,

$$\psi - \epsilon \sin \psi = \frac{2\pi}{T} (t - t_0). \quad (8.38)$$

Dies ist die *Keplersche Gleichung*. Sie bestimmt $\psi(t)$ und damit indirekt $\varphi(t)$.

Wir bestimmen als nächstes die Umlaufzeit auf elementarem Weg mit Hilfe des Flächensatzes.

Sei \dot{F} die pro Zeiteinheit vom Fahrstrahl überstrichene Fläche. Aus dem Flächensatz wissen wir, daß

$$\begin{aligned} l &= mr^2\dot{\varphi} = 2m\dot{F} \\ &= \frac{\text{Fläche der Ellipse}}{T} \end{aligned} \quad (8.39)$$

Die Fläche der Ellipse ist πab . Also ist

$$T = 2m \frac{\pi ab}{l}.$$

Aus den expliziten Formeln für die Halbachsen a, b sieht man, daß

$$b = l \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}.$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}. \quad (8.40)$$

M ist die Sonnenmasse. Dieses Resultat enthält das dritte Keplersche Gesetz $T^2 \propto a^3$. Die Planetenmasse ist herausgefallen. Jedoch kann man aus der bekannten Umlaufzeit (1 Jahr für die Erde) und der großen Halbachse der Bahn die Sonnenmasse bestimmen.

Es sei noch eine zweite Herleitung der Keplerschen Gleichung und der Umlaufzeit gegeben, die von dem früher hergeleiteten Ausdruck für $t(r)$ ausgeht.

Nach der geometrischen Definition des Kepler-Winkels ψ ist

$$x + a\epsilon = a \cos \psi, \quad (8.41)$$

$$y = b \sin \psi. \quad (8.42)$$

Also

$$x = a(\cos \psi - \epsilon) \quad (8.43)$$

$$y = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \psi. \quad (8.44)$$

Berechnet man nun $r^2 = x^2 + y^2$ so sieht man, daß

$$r = a - a\epsilon \cos \psi. \quad (8.45)$$

Wir benutzen dies, um das $t(r)$ definierende Integral (8.14) von der Integrationsvariable r auf die Integrationsvariable ψ umzurechnen, um damit t als Funktion der neuen Variablen ψ zu bekommen.

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 \epsilon^2 - (r - a)^2}}. \quad (8.46)$$

Hier setzen wir nun $r - a$ aus Gl.(8.45) ein. Das Argument der Wurzel wird damit

$$a^2 \epsilon^2 - (r - a)^2 = a^2 \epsilon^2 (1 - \cos^2 \psi) = a^2 \epsilon^2 \sin^2 \psi.$$

Außerdem rechnen wir dr um. Aus Gl.(8.45) folgt durch Differentiation

$$dr = a \epsilon \sin \psi d\psi.$$

Setzen wir alles ein, so ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int d\psi (1 - \epsilon \cos \psi) + t_0,$$

Also gilt

$$\psi - \epsilon \sin \psi = \sqrt{\frac{\alpha}{ma^3}} (t - t_0).$$

Während eines Umlaufs läuft ψ von 0 bis 2π . Also ändert sich in der Umlaufzeit T der Ausdruck $\psi - \epsilon \sin \psi$ um 2π . Deshalb können wir ablesen, daß

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}. \quad (8.47)$$

Dies gibt das dritte Keplersche Gesetz $T^2 \propto a^3$. Setzen wir den Ausdruck für T ein, so erhalten wir wieder die Keplersche Gleichung.

8.3 Streuung im Zentralfeld

Wir betrachten die Streuung von Teilchen in einem radialsymmetrischen Potential, das im Unendlichen samt seiner ersten Ableitung verschwindet, so daß ein Massenpunkt in sehr großem Abstand vom Ursprung keine Kraft

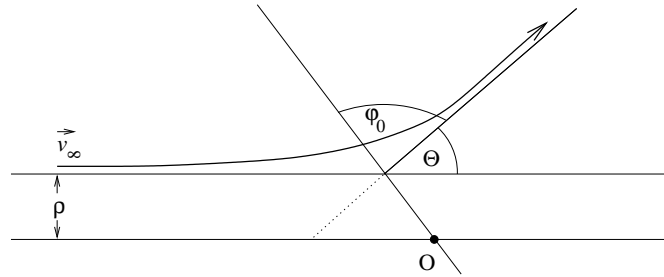


Abbildung 8.6: Streuung im Zentralfeld

mehr spürt und sich dort frei mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrag v_∞ bewegt. Diese bestimmt die Energie

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \quad (8.48)$$

Ein homogener Strahl gleichartiger Teilchen fliege aus dem ∞ kommend mit Geschwindigkeit v_∞ parallel zur z -Achse auf das Kraftzentrum O zu. Der Fluß

$$J = \frac{dN}{dFdt} \quad (8.49)$$

ist die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit durch eine Fläche senkrecht zur Bewegungsrichtung strömt.

Nach Annahme ist das Potential radialsymmetrisch. Daraus folgt die Drehimpulserhaltung. Daher ist die Bahnkurve eines Teilchens eben.

Gesucht ist die Anzahl dN der Teilchen, die pro Zeiteinheit in das Raumwinkelement

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

gestreut werden. Diese Teilchen laufen nach der Streuung in grossem Abstand in der durch die Polarwinkel θ , φ bestimmten radialen Richtung innerhalb der Toleranz $d\theta$, $d\varphi$ aus, vgl. Zeichnung 8.3. Die Projektion der Bewegung in die Ebene der Bewegung ist in Zeichnung 8.3. dN wird proportional zum Strom sein. Man definiert den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \theta) = \frac{dN}{Jd\Omega}. \quad (8.50)$$

Wegen der Zylindersymmetrie der Versuchsanordnung wird das Resultat vom Azimutalwinkel φ unabhängig sein.

Der Abstand ρ eines einlaufenden Teilchens von der negativen z-Achse heißt *Stoßparameter*. Zusammen mit der Geschwindigkeit bestimmt er den Drehimpulsbetrag

$$|\mathbf{L}| = l = m\rho v_\infty \quad (8.51)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung bestimmt den Streuwinkel θ als Funktion von v_∞ und ρ , d.h. $\Theta = \theta(\rho, E)$.

Die Anzahl der pro Zeiteinheit mit Stoßparameter zwischen ρ und $\rho + d\rho$ und mit Azimutalwinkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ eintreffenden Teilchen ist gleich dem Strom J multipliziert mit der Fläche eines Rings der Breite $d\rho$ im Abstand ρ , also gleich $J\rho d\rho d\varphi$. Nach der Streuung finden sich diese Teilchen in der Kegelschale zwischen $\theta(\rho, E)$ und $\theta(\rho + d\rho, E) + d\theta$ mit unverändertem Azimutalwinkel φ ,

$$d\theta = \left| \frac{d\theta(\rho, E)}{d\rho} \right| d\rho.$$

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega(E, \theta)} &= \frac{J\rho d\rho d\varphi}{Jd\Omega} = \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sin\theta d\theta d\varphi} \\ &= \rho \left| \frac{d\rho(\theta, E)}{d\theta} \right| \frac{1}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (8.52)$$

Ist das Potential $V(r)$ bekannt, so kann $\theta(\rho, E)$ bestimmt werden, und damit auch $\rho = \rho(\theta, E)$ und seine Ableitung.

8.3.1 Rutherford'scher Streuquerschnitt

Wir betrachten als Anwendung die Streuung eines elektrisch geladenen Teilchens der Masse m und Ladung q im Potential eines sehr schweren elektrisch geladenen Teilchens mit Ladung Q , das sich im Ursprung befindet. Die Coulomb Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen Massenpunkten hat die gleiche Form wie die Gravitationskraft. Das zugehörige Potential ist

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}.$$

Die Resultate für das Keplerproblem können daher sofort übertragen werden. Falls die Ladungen gleiches Vorzeichen haben, ist jedoch $\alpha < 0$. In diesem Fall

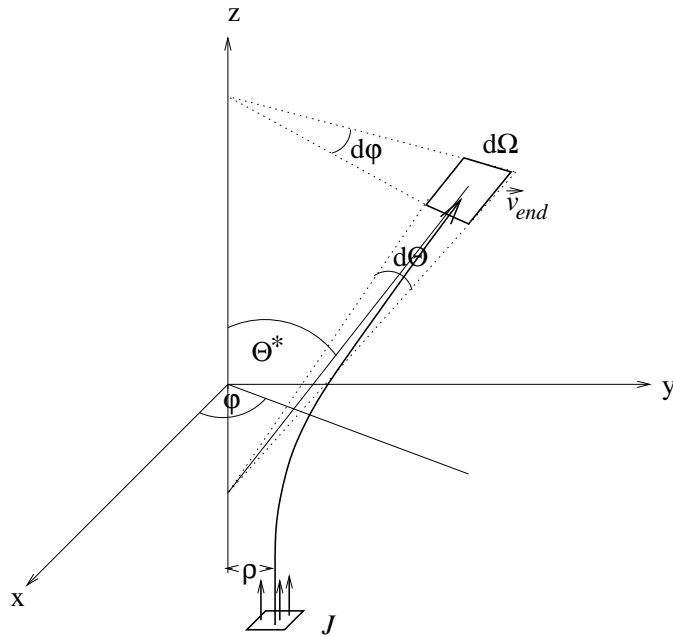


Abbildung 8.7: Streuung im Zentralfeld

ist das Potential strikt positiv, und daher ist nur positive Energie möglich. Es gibt deshalb in diesem Fall nur Hyperbelbahnen. Im übrigen gelten jedoch die hergeleiteten Gleichungen auch für negatives α .

Die qualitative Gestalt von V_{eff} ändert sich; es ist jetzt eine monoton fallende Funktion von r . Daher ist der zulässige Bereich von r stets von der Form $r > r_{min}$.

Die oben angegebene Formel (8.35) für die Winkel der Asymptoten für Hyperbelbahnen wird jetzt bei der Diskussion der Rutherford-Streuung von elektrisch geladenen Teilchen benutzt.

Den oben hergeleiteten Resultaten zufolge ist die Bahnkurve ein Hyperbelast. Die beiden Asymptoten des Hyperbelasts schließen den Winkel $2\varphi_0$ ein,

$$\tan \varphi_0 = \frac{b}{a}.$$

Der Streuwinkel ist $\theta = \pi - 2\varphi_0$, somit

$$\begin{aligned} \cot \frac{\theta}{2} &= \tan \varphi_0 = \frac{b}{a} \\ &= \sqrt{\epsilon^2 - 1}. \end{aligned} \tag{8.53}$$

Wir werten dies aus.

$$\epsilon^2 - 1 = 2E \frac{l^2}{m\alpha^2} = \frac{2E}{m\alpha^2} m^2 v_\infty^2 \rho^2 = \frac{4E^2}{\alpha^2} \rho^2.$$

Also ist $\cot \frac{1}{2}\theta = 2E\rho/\alpha$, oder $\rho = (\alpha/2E) \cot \frac{1}{2}\theta$. Durch Differenzieren erhält man die gesuchte Größe

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\alpha}{2E} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Setzt man dies in die Formel (8.52) ein, so erhält man wegen $\sin \theta = 2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega(E, \theta)} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (8.54)$$

Dies ist die Rutherford'sche Streuformel für die Streuung elektrisch geladener Teilchen im Coulomb Potential. Sie ist für die Streuung von α -Teilchen an schweren Atomkernen anwendbar.

8.3.2 Totaler Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten jetzt ein Potential, das die Eigenschaft hat, daß $V(r) = 0$ für $r > R$ und das für $r < R$ monoton steigt oder fällt. Wir wollen der Einfachheit halber weiter annehmen, daß der Streuwinkel mit zunehmendem Stoßparameter monoton fällt. Man definiert den totalen Wirkungsquerschnitt als Integral des differentiellen Wirkungsquerschnitt über alle Raumwinkel,

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (8.55)$$

Die φ -Integration ist trivial, und wir erhalten

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{+0}^{\pi} \rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta.$$

Aufgrund unserer Homogenitätsannahme kann man die Betragsstriche weglassen, und es ergibt sich

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2.$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist also gleich dem geometrischen Querschnitt.

Für das Coulombpotential ist $R = \infty$. Daher ist sein totaler Wirkungsquerschnitt ∞ .

Kapitel 9

Zwangskräfte

9.1 Holonome Zwangsbedingungen

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ plus Anfangsbedingungen erlauben es (im Prinzip) die Bewegung $\mathbf{r}(t)$ eines Massenpunktes eindeutig zu bestimmen, falls die Kraft \mathbf{F} in ihrer Größe und Richtung bekannt ist. Bisher hatten wir uns darauf beschränkt, Probleme von diesem Typ zu betrachten. In vielen praktischen Anwendungen der Mechanik treten jedoch sogenannte Zwangskräfte auf. Diese sind zwar in ihrer Wirkung bekannt, man weiß jedoch nicht von vorneherein wie groß sie sind.

Wir betrachten in diesem Kapitel weiterhin nur einen einzelnen Massenpunkt. Die wichtigsten Problemstellungen mit Zwangsbedingungen sind dann die folgenden:

9.1.1 Bewegung eines Massenpunktes auf einer *ruhenden Fläche* Σ

Der Massenpunkt bewege sich unter dem Einfluß einer äußeren Kraft \mathbf{F} - z.B. der Schwerkraft - der durch eine von der Unterlage ausgeübte Gegenkraft \mathbf{F}' und die Trägheitskräfte das Gleichgewicht gehalten wird. Die Fläche Σ kann mathematisch beschrieben werden durch eine Gleichung der Form:

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) = 0 \quad (9.1)$$

Die Bedingung, daß der Massenpunkt sich (zu allen Zeiten t) auf der Fläche Σ befinden soll, drückt sich dann durch eine Beziehung der Form (9.1) zwischen den rechtwinkligen Koordinaten des Massenpunktes aus.

Beispiel 1: Bewegung in der xy-Ebene

$$f(\mathbf{r}) \equiv z = 0 \quad (1 \text{ Zwangsbedingung}) \quad (9.2)$$

Beispiel 2: Bewegung auf der Oberfläche der Einheitskugel mit Mittelpunkt in $\mathbf{0}$

$$f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (1 \text{ Zwangsbedingung}) \quad (9.3)$$

9.1.2 Massenpunkt auf einer *bewegten Fläche* $\Sigma(t)$

Dieser Fall ist analog zum obigen. Da die Lage der Fläche jedoch von der Zeit abhängt, besteht nun eine Beziehung zwischen den rechtwinkligen Koordinaten des Massenpunktes die explizit von der Zeit abhängt.

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv f(x, y, z, t) = 0 \quad (1 \text{ Zwangsbedingung}) \quad (9.4)$$

Beispiel: gleichmäßig beschleunigt bewegte schiefe Ebene (vgl. Übungsblatt V Aufgabe 2).

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv z - \alpha\left(y - \frac{1}{2}\beta t^2\right) = 0 \quad (9.5)$$

9.1.3 Massenpunkt auf einer *ruhenden Kurve* Λ

Der äußeren Kraft \mathbf{F} wird durch eine von der Führungskurve ausgeübten Gegenkraft \mathbf{F}' und die Trägheitskraft das Gleichgewicht gehalten. Eine Kurve Λ kann mathematisch beschrieben werden durch 2 Gleichungen der Form

$$f_1(\mathbf{r}) = f_1(x, y, z) = 0 \quad f_2(\mathbf{r}) = f_2(x, y, z) = 0 \quad (9.6)$$

$$(2 \text{ Zwangsbedingungen}) \quad (9.7)$$

Die Bedingung, daß der Massenpunkt sich zu allen Zeiten t auf der Kurve Λ befinden soll, drückt sich durch zwei Beziehungen zwischen den Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ aus, wie in Gl. (9.7) angegeben.

Beispiel: Bewegung auf einer in der xy-Ebene liegenden Kreisbahn um den Ursprung mit Radius R :

$$f_1(\mathbf{r}) \equiv z = 0 \quad (9.8)$$

$$f_2(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (9.9)$$

9.1.4 Massenpunkt auf einer *bewegten Kurve* $\Lambda(t)$

Dieser Fall ist analog zu dem der ruhenden Kurve. Da die Lage der Kurve jedoch von der Zeit t abhängt, bestehen nun zwei Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten des Massenpunktes, die explizit von der Zeit abhängen:

$$f_1(\mathbf{r}, t) = f_1(x, y, z, t) = 0 \quad f_2(\mathbf{r}, t) = f_2(x, y, z, t) = 0 \quad (2 \text{ Zwangsbedingungen}) \quad (9.10)$$

Beispiel: Perle auf Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert.

$$f_1(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cot \Theta = 0 \quad (9.11)$$

$$f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{x}{y} - \tan \omega t = 0 \quad (9.12)$$

In allen diesen Problemen lassen sich die Zwangsbedingungen durch eine oder mehrere (zwei) Gleichungen zwischen den Koordinaten ausdrücken, d.h. sie sind von der Form

$$f_k(x, y, z, t) = 0 \quad (9.13)$$

Hierbei hängen die Funktionen f_k nur von den Koordinaten x, y, z und der Zeit t ab, jedoch nicht von der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Zwangskräfte dieser Form nennt man *holonome Zwangsbedingungen*.

Für Probleme mit holonomen Zwangsbedingungen definiert man die Zahl s der Freiheitsgrade:

$s = \text{Zahl der rechtwinkligen Koordinaten} - \text{Zahl der Zwangsbedingungen}$. Ein Massenpunkt besitzt drei rechtwinklige Koordinaten, infolgedessen ist $s = 2$ bzw. $s = 1$ für den Fall der Bewegung auf einer Fläche Σ bzw. Kurve Λ .

9.2 Beispiele *nicht* holonomer Zwangsbedingungen

Teilchen im Kasten der Seitenlänge L Hier sind die Zwangsbedingungen durch Ungleichungen gegeben, statt wie im Falle holonomer Zwangsbedingungen durch Gleichungen.

Rollendes Rad (vgl. Goldstein S.15) Auf die rollende Scheibe sei ein weißer Strich gezeichnet. Das System ist durch Angabe des Auflagepunktes (x, y) , der Richtung der Achse, d.h. des Winkels Θ , und der Lage des weißen Strichs, d.h. des Winkels Φ vollständig beschrieben. Die Zwangsbedingung besteht darin, daß das Rad ohne Schlupf rollen soll. Diese Bedingung läßt sich jedoch nicht durch eine eindeutige Beziehung zwischen den Koordinaten (x, y, Θ, Φ) ausdrücken. In der Tat kann das Rad vom Auflagepunkt (x, y) nach (x', y') längs verschiedener Bahnen rollen. Dabei läßt es sich einrichten, daß die Richtung der Achse im Endpunkt stets dieselbe ist. Da jedoch die Länge der Bahnen in der xy -Ebene verschieden sein kann, wird trotz gleichem (x', y', Θ') die Lage Φ' des weißen Strichs am Ende der Bahn im allgemeinen verschieden sein. Es kann also keine eindeutige Beziehung zwischen den Koordinaten (x', y', Θ', Φ') bestehen.

Die Bedingung des Rollens impliziert vielmehr zwei Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten. Das Rad habe den Radius a . Bei einer infinitesimalen Drehung des Rads um $d\Phi$ ändert sich der Auflagepunkt um

$$\begin{aligned} dx &= a \sin \Theta d\Phi \\ dy &= -a \cos \Theta d\Phi \end{aligned} \quad (9.14)$$

Dividieren wir durch das Zeitintervall dt in dem die Drehung um $d\Phi$ vonstatten geht, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{x} - a\dot{\Phi} \sin \Theta &= 0 \\ \dot{y} + a\dot{\Phi} \cos \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (9.15)$$

Diese Gleichungen sind nicht von der Form (9.13), denn sie enthalten die Geschwindigkeiten \dot{x} , \dot{y} , $\dot{\Phi}$.

9.3 Reibung

Betrachten wir einen Massenpunkt auf einer Fläche Σ . Wie jeden Vektor kann man die von der Unterlage ausgeübte Kraft \mathbf{F}_Σ zerlegen in eine Komponente \mathbf{F}_\perp , die senkrecht steht und einen Rest \mathbf{F}_\parallel , der in der Tangentenebene von Σ liegt. Die tangentielle Komponente \mathbf{F}_\parallel nennt man die von der Fläche Σ ausgeübte *Reibungskraft*. Typische Reibungskräfte haben eine Richtung entgegengesetzt zur Geschwindigkeit \mathbf{v} des Massenpunktes (empirische Tatsache).

Die Komponente \mathbf{F}_\perp bezeichnet man als die von der Fläche Σ ausgeübte *Zwangskraft*. Künftig werden wir sie mit \mathbf{F}' bezeichnen. Nach Definition

$$\mathbf{F}' \perp \Sigma \quad (9.16)$$

Falls Reibungskräfte vorhanden sind, werden diese unter die äußeren Kräfte \mathbf{F} gerechnet (genau wie die Schwerkraft etc.). Um das Problem lösen zu können, müssen die Reibungskräfte in ihrer Größe und Richtung bekannt sein (in Abhängigkeit von Ort und Geschwindigkeit des Massenpunktes). Der theoretisch wichtige Fall ist derjenige der reibungsfreien Bewegung. Genau analog zerlegt man für einen Massenpunkt auf einer Kurve Λ die von der Führung ausgeübte Kraft \mathbf{F}_Λ in eine Komponente \mathbf{F}_\parallel in Richtung des Tangentenvektors an die Kurve und einen dazu senkrecht stehenden Rest \mathbf{F}_\perp . Die Normalkomponente \mathbf{F}_\perp heißt *Zwangskraft* und wird mit \mathbf{F}' bezeichnet. Definitionsgemäß ist

$$\mathbf{F}' \perp \Lambda \quad (9.17)$$

Die Komponente \mathbf{F}_\parallel heißt *Reibungskraft* und wird unter die äußeren Kräfte gezählt, die in Größe und Richtung bekannt sein müssen, um das Problem zu lösen.

Kapitel 10

Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wir wollen jetzt eine Methode zur Behandlung holonomer Zwangsbedingungen beschreiben. Im Gegensatz zu anderen Methoden (s. später) erlauben die jetzt zu beschreibenden Lagrange-Gleichungen 1. Art auch die Bestimmung der Zwangskräfte. Wir betrachten hier nur einen einzelnen Massenpunkt.

Betrachte einen Massenpunkt unter dem Einfluß der äußeren Kraft \mathbf{F} und der von der Fläche Σ ausgeübten Zwangskraft \mathbf{F}' . Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz gilt dann

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}' \quad (10.1)$$

Die äußeren Kräfte sollen bekannt sein (z.B. Schwerkraft). Von \mathbf{F}' kennen wir jedoch nur die Richtung: $\mathbf{F}' \perp \Sigma$ in jedem Zeitpunkt t . Ihren Betrag (und ihr Vorzeichen) kennen wir jedoch nicht. Wir haben jedoch ein zusätzliches Stück Information: die Zwangsbedingung

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.2)$$

Gl. (10.1) ist ein System von 3 Gleichungen $m\ddot{x} = F_x + F'_x$ usw. Mit Gl. (10.2) haben wir also insgesamt 4 Gleichungen für 4 Unbekannte $x, y, z, \pm F'$. Wir haben ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte. Davon sind drei Differentialgleichungen. Sind zusätzlich Anfangsbedingungen vorgegeben etwa $\mathbf{r}(t_0)$ und $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ zu einer gewissen Zeit t_0 , so können wir erwarten, daß diese Gleichungen es erlauben $\mathbf{r}(t)$ und die Größe von $\mathbf{F}'(t)$ eindeutig als Funktion der Zeit zu bestimmen.

10.0.1 Mathematischer Satz

Sei Σ durch Gl. (10.2) definiert. Dann steht der Gradient

$$\nabla f(\mathbf{r}) \perp \Sigma \quad (10.3)$$

d.h. er hat die Richtung der Normalen.

Da nach Gl. (9.17) die Zwangskraft ebenfalls die Richtung der Normalen hat können wir schreiben

$$\mathbf{F}' = -\lambda \nabla f(\mathbf{r}) \quad (10.4)$$

Dabei ist λ ein zunächst unbekannter reeller u.U. zeitabhängiger Parameter; er spezifiziert Betrag und Vorzeichen von \mathbf{F}' . Setzen wir diesen Ausdruck in die Newtonschen Bewegungsgleichungen ein, so erhalten wir

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - \lambda \nabla f(\mathbf{r}) \quad (10.5)$$

Dies sind die *Lagrange-Gleichungen 1. Art* für die Bewegung auf einer Fläche Σ . Dazu kommt die Zwangsbedingung Gl. (10.2). Zusammen sind dies 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten $x(t), y(t), z(t), \lambda(t)$. Sind sie durch Lösen der Gleichungen bestimmt, so bekommt man die Zwangskraft durch Einsetzen von $\lambda(t)$ in Gl. (10.4). $\lambda(t)$ heißt Lagrange-Parameter.

Für die Bewegung auf einer ruhenden Kurve Λ kann man in analoger Weise vorgehen. Man hat dann zwei Zwangsbedingungen

$$f_1(\mathbf{r}) = 0 \quad f_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.6)$$

Es gilt der folgende mathematische Satz.

10.0.2 Mathematischer Satz

Sei die Kurve Λ durch Gl. (10.6) definiert. Jeder Vektor $\mathbf{n} \perp \Lambda$ läßt sich dann schreiben in der Form

$$\mathbf{n} = -\lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{r}) - \lambda_2 \nabla f_2(\mathbf{r}) \quad (10.7)$$

wo λ_1, λ_2 reelle Parameter sind.

Da die Zwangskräfte $\mathbf{F}' \perp \Lambda$, bekommen wir somit aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die Lagrange-Gleichungen 1. Art in der Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - \lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{r}) - \lambda_2 \nabla f_2(\mathbf{r}) \quad (10.8)$$

Dazu kommen die beiden Zwangsbedingungen (10.6). Insgesamt haben wir also 5 Gleichungen für 5 Unbekannte - die Ortskoordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ und die beiden Lagrange Multiplikatoren $\lambda_1(t)$ und $\lambda_2(t)$. Sind diese bestimmt, so bekommt man die Zwangskraft als

$$\mathbf{F}' = -\lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{r}) - \lambda_2 \nabla f_2(\mathbf{r}) \quad (10.9)$$

10.0.3 Beispiel: Ebenes Pendel

Das Pendel bewege sich in der yz -Ebene, seine Länge sei l . Der Massenpunkt bewegt sich also längs einer vorgeschriebenen Kurve. Die beiden Zwangsbedingungen können geschrieben werden als

$$f_1 = x = 0 \quad (10.10)$$

$$f_2 = y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (10.11)$$

Damit ist

$$\nabla f_1(\mathbf{r}) = (1, 0, 0) \quad (10.12)$$

$$\nabla f_2(\mathbf{r}) = (0, 2y, 2z) \quad (10.13)$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -mg) \quad (10.14)$$

Die Lagrange Gleichungen sind also

$$m\ddot{x} = -\lambda_1$$

$$m\ddot{y} = -2\lambda_2 y \quad (10.15)$$

$$m\ddot{z} = -2\lambda_2 z - mg$$

Die erste dieser Gleichungen ist trivial, da aufgrund der 1. Zwangsbedingung $x(t) = 0$. Somit ist $\lambda_1 = 0$. Man hätte das Problem gleich als 2-dimensional betrachten können.

Zur Lösung der restlichen Gleichungen ist es zweckmäßig, den Winkel Θ einzuführen durch

$$y = l \sin \Theta \quad (10.16)$$

Wegen der 2. Zwangsbedingung (10.11) ist dann

$$z = -l \cos \Theta \quad (10.17)$$

Gesucht ist demnach $\Theta(t)$. Nach den üblichen Differentiationsregeln für mittelbare Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{y} &= l\dot{\Theta} \cos \Theta & \ddot{y} &= l\ddot{\Theta} \cos \Theta - l\dot{\Theta}^2 \sin \Theta \\ \dot{z} &= l\dot{\Theta} \sin \Theta & \ddot{z} &= l\ddot{\Theta} \sin \Theta + l\dot{\Theta}^2 \cos \Theta \end{aligned} \quad (10.18)$$

Setzen wir dies in die Lagrange-Gleichungen (10.16) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} ml(\ddot{\Theta} \cos \Theta - \dot{\Theta}^2 \sin \Theta) &= -2\lambda_2 l \sin \Theta \\ ml(\ddot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \cos \Theta) &= 2\lambda_2 l \cos \Theta - mg \end{aligned} \quad (10.19)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, eliminieren wir zuerst λ_2 . Hierzu multipliziert man die Gleichungen mit $\cos \Theta$ bzw $\sin \Theta$ durch und addiert sie. Benutzt man hierbei, daß $\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1$, so ergibt sich (nach Division durch ml)

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0 \quad (10.20)$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung für das ebene Pendel.

10.1 Virtuelle Verrückungen und d'Alembertsches Prinzip

Wir kommen nun zu einer alternativen Lösungsmethode für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen.

Betrachte zunächst wieder einen Massenpunkt, der sich am Punkt \mathbf{r} auf einer vorgegebenen Fläche Σ befindet. Unter einer virtuellen Verrückung $\delta \mathbf{r}$ versteht man eine beliebige infinitesimale Verschiebung von \mathbf{r} um $\delta \mathbf{r}$ *innerhalb* der Fläche Σ . Genauso ist im Fall eines Massenpunktes auf einer vorgegebenen Kurve Λ eine virtuelle Verrückung als infinitesimale Verschiebung $\delta \mathbf{r}$ *längs* der Kurve definiert. Allgemein kann man also definieren:

Eine *virtuelle Verrückung* ist eine Verschiebung des Ortsvektors \mathbf{r} um ein infinitesimales Stück $\delta \mathbf{r}$, die *mit den Zwangsbedingungen verträglich* ist.

Man redet von 'virtueller' Verrückung, da es sich um eine 'gedachte' Verrückung handeln soll, die nicht der wirklichen Bewegung des Massenpunktes zu entsprechen braucht.

Da die Zwangskräfte $\mathbf{F}' \perp \Sigma$ bzw. $\mathbf{F}' \perp \Lambda$, während $\delta \mathbf{r}$ nach Definition tangential zur Fläche Σ bzw Kurve Λ liegt, so gilt für eine beliebige virtuelle Verrückung $\delta \mathbf{r}$, daß $\mathbf{F}' \perp \delta \mathbf{r}$. Also

$$\mathbf{F}' \delta \mathbf{r} = 0 \quad (10.21)$$

Aufgrund dieser Gleichung ergibt sich aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen (10.1)

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F})\delta\mathbf{r} = 0 \quad (10.22)$$

für beliebige virtuelle Verrückungen $\delta\mathbf{r}$. Dazu kommen wiederum die Zwangsbedingungen (9.1) bzw (9.7) als zusätzliche Gleichungen. Wie wir gleich sehen werden, sind dies zusammen wiederum ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte, so daß sie zur Bestimmung von $\mathbf{r}(t)$ geeignet sind. Gl. (10.22) ist bekannt als das d'Alembertsche Prinzip. Es gilt für beliebige holonome Zwangsbedingungen, also hier die Bewegung eines Massenpunkts auf einer Fläche oder Kurve. Die Zwangskräfte sind eliminiert, sie können mit dieser Methode also auch nicht bestimmt werden.

10.1.1 Ausdruck für virtuelle Verrückungen

Eine Zwangsbedingung

$$f(\mathbf{r}) \equiv f(x, y, z) = 0 \quad (\text{Fläche } \Sigma) \quad (10.23)$$

Nach Definition steht $\delta\mathbf{r} \perp$ Normalen von Σ . Da nach dem oben angegebenen mathematischen Satz $\nabla f(\mathbf{r}) =$ die Richtung der Normalen hat, gilt also $\delta\mathbf{r} \perp \nabla f$ oder

$$\delta\mathbf{r}\nabla f(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.24)$$

oder in Komponenten

$$\delta x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) + \delta y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) + \delta z \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 0 \quad (10.25)$$

Dies stellt *eine* Beziehung zwischen den drei infinitesimalen Größen $\delta x, \delta y, \delta z$ dar. Man kann also zwei von ihnen als unabhängig nehmen. Angenommen $\frac{\partial}{\partial z} f(\mathbf{r}) \neq 0$, so kann man etwa δx und δy als unabhängig nehmen und δz durch diese ausdrücken. Gleichung (10.24) kann man auch wie folgt direkt bekommen. Da \mathbf{r} in der Fläche Σ liegen soll gilt $f(\mathbf{r}) = 0$. Da außerdem der virtuell verrückte Punkt nach Definition ebenfalls in der Fläche liegen soll, gilt auch $f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = 0$. Somit auch

$$f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f(x, y, z) = 0 \quad (10.26)$$

Da $\delta x, \delta y, \delta z$ infinitesimal klein sein sollen, ist dieser Ausdruck nach den Regeln der Differentiationsrechnung identisch mit (10.24).

Zwei Zwangsbedingungen

$$f_1(\mathbf{r}) = f_1(x, y, z) = 0 \quad f_2(\mathbf{r}) = f_2(x, y, z) = 0 \quad (10.27)$$

Virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{r}$ sind nach Definition solcher Art, daß diese Gleichungen auch für $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ gelten. Also auch

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - f_1(\mathbf{r}) &\equiv f_1(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - f_2(\mathbf{r}) &\equiv f_2(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f_2(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

Da $\delta x, \delta y, \delta z$ infinitesimal sind, sind diese Ausdrücke nach den Regeln der Differentialrechnung gleich

$$\begin{aligned} \delta x \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, z) + \delta y \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y, z) + \delta z \frac{\partial}{\partial z} f_1(x, y, z) &= 0 \\ \delta x \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y, z) + \delta y \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, z) + \delta z \frac{\partial}{\partial z} f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (10.29)$$

Dies sind zwei Beziehungen zwischen den drei infinitesimalen Größen $\delta x, \delta y, \delta z$. Es kann also nur eine davon als unabhängig angenommen werden - unter geeigneten Bedingungen etwa δz . Die restlichen $\delta x, \delta y$ lassen sich dann durch δz ausdrücken.

10.2 Generalisierte Koordinaten:

Betrachten wir zuerst den Fall von 2 Zwangsbedingungen, d.h. einen Massenpunkt auf einer Kurve Λ . Aufgrund der Zwangsbedingungen kann die Lage des Massenpunktes durch einen einzigen Parameter q eindeutig bestimmt werden. Für q kann man etwa eine Komponente der rechtwinkligen Koordinaten wählen. Häufig ist eine andere Wahl jedoch vorteilhafter. Im Fall des ebenen Pendels wird man die Lage des Massenpunktes durch den Winkel Θ charakterisieren. Man nennt $q \equiv \Theta$ dann eine generalisierte Koordinate. Die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes auf Λ sind durch q bestimmt.

$$x = X(q) \quad y = Y(q) \quad z = Z(q) \quad (10.30)$$

wobei X, Y, Z durch Λ und die Wahl von q bestimmte Funktionen sind. Eine virtuelle Verrückung entspricht einer infinitesimalen Änderung δq von q . Also ist

$$\delta x = X'(q)\delta q \quad \delta y = Y'(q)\delta q \quad \delta z = Z'(q)\delta q \quad (10.31)$$

wo $X' = \frac{d}{dq}X$ etc..

Setzt man dies in das d'Alembertsche Prinzip (10.22) ein, so bekommt man nach Kürzen von δq

$$(m\ddot{x} - F_x)\frac{dx}{dq} + (m\ddot{y} - F_y)\frac{dy}{dq} + (m\ddot{z} - F_z)\frac{dz}{dq} = 0 \quad (10.32)$$

wobei $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ vermöge (10.30) durch q, \dot{q}, \ddot{q} auszudrücken sind. Dies ist eine Gleichung für eine Unbekannte $q(t)$.

Analog dazu kann man die Lage eines Punktes auf einer Fläche durch 2 generalisierte Koordinaten q_1, q_2 charakterisieren. Beispielsweise wird man für einen Punkt auf einer Kugeloberfläche Polarwinkel $q_1 = \Theta$ und $q_2 = \phi$ wählen. Wir werden den allgemeinen Fall in Kapitel 12 noch ausführlicher diskutieren und deshalb hier nicht weiter darauf eingehen.

10.2.1 Beispiel: Ebenes Pendel

Wie oben schon angegeben, sind die Zwangsbedingungen

$$f_1(\mathbf{r}) = x = 0 \quad f_2(\mathbf{r}) = y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (10.33)$$

und somit $\nabla f_1(\mathbf{r}) = (1, 0, 0)$ und $\nabla f_2(\mathbf{r}) = (0, 2y, 2z)$. Damit ergibt sich aus Gl. (10.29) für die virtuellen Verrückungen

$$\delta x = 0 \quad 2y\delta y + 2z\delta z = 0 \quad (10.34)$$

Nehmen wir δz als unabhängig, so drücken sich dadurch aus:

$$\delta x = 0 \quad \delta y = -\frac{z}{y}\delta z \quad (10.35)$$

Das d'Alembertsche Prinzip liest sich

$$m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y + (m\ddot{z} + mg)\delta z = 0 \quad (10.36)$$

oder, durch Einsetzen der Ausdrücke für $\delta x, \delta y$

$$\left(-\frac{z}{y}m\ddot{y} + m\ddot{z} + mg\right)\delta z = 0 \quad (10.37)$$

$$-z\ddot{y} + y(\ddot{z} + g) = 0 \quad (10.38)$$

Dazu kommt die Zwangsbedingung $y = \sqrt{l^2 - z^2}$. Benutzen wir sie um y und \ddot{y} durch z , \dot{z} und \ddot{z} auszudrücken, so bekommen wir eine Differentialgleichung für $z(t)$.

Ein viel einfacheres Resultat ergibt sich jedoch durch Einführen des Winkels Θ als generalisierte Koordinate. Es ist

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= l \sin \Theta \\ z &= -l \cos \Theta \end{aligned} \quad (10.39)$$

Somit nach Gl. (10.31)

$$\begin{aligned} \delta x &= 0 \\ \delta y &= l \cos \Theta \delta \Theta \\ \delta z &= l \sin \Theta \delta \Theta \end{aligned} \quad (10.40)$$

Setzen wir dies in die d'Alembertsche Gleichung (10.36) samt den schon in Gl. (10.18) hergeleiteten Ausdrücken für \ddot{y} , \ddot{z} ein, so erhalten wir für ein beliebiges infinitesimales $\delta \Theta$

$$[ml^2(\ddot{\Theta} \cos \Theta - \dot{\Theta}^2 \sin \Theta) \cos \Theta + ml^2(\ddot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \frac{g}{l}) \sin \Theta] \delta \Theta = 0 \quad (10.41)$$

Faßt man die Terme unter Benutzung von $\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1$ zusammen, so ergibt sich, da $\delta \Theta \neq 0$ beliebig

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0 \quad (10.42)$$

Dies reproduziert das frühere Resultat, Gl. (10.20).

10.2.2 Beispiel: Schwungrad, siehe Zeichnung 10.1

Die Führung übt auf Punkt 1 eine Zwangskraft \mathbf{Z} in z-Richtung aus. Die vom Stab auf Punkt 1 ausgeübte Kraft sei \mathbf{K} . Kraftbilanz am (masselosen) Punkt 1

$$\mathbf{K} + \mathbf{F}(\mathbf{t}) + \mathbf{Z} = 0 \quad (10.43)$$

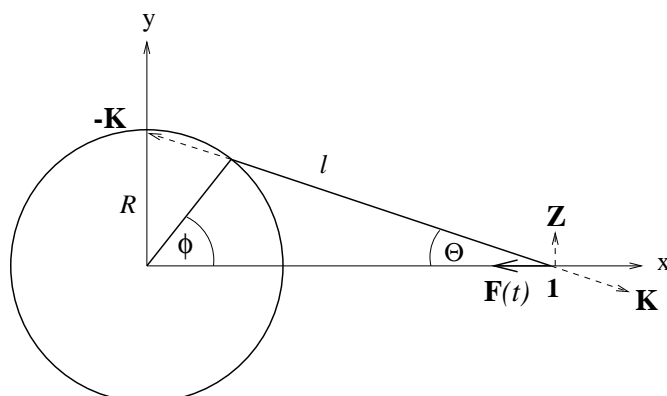


Abbildung 10.1: Schwungrad

Somit $\mathbf{K}_x = -\mathbf{F}(\mathbf{t})$.

Die Kraft \mathbf{K} hat die Richtung des Stabes, somit

$$\frac{K_x}{K_y} = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \quad (10.44)$$

oder

$$\mathbf{K} = (K_x, K_y) = -\mathbf{F}(\mathbf{t})(1, \tan \Theta) \quad (10.45)$$

Die Lage des Systems läßt sich durch den Winkel, den wir als generalisierte Koordinate benutzen wollen, eindeutig beschreiben. Der Hilfswinkel Θ drückt sich durch ϕ nach dem Sinussatz als

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \phi} = \frac{R}{l} \equiv \rho \quad (\text{fester Parameter}) \quad (10.46)$$

aus. Somit ist

$$\sin \Theta = \rho \sin \phi \quad \tan \Theta = \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \phi}} \quad (10.47)$$

Nach dem später zu formulierenden Prinzip actio=reactio ist die vom Stab auf Punkt M ausgeübte Kraft gleich $-\mathbf{K}$. Folglich ist nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{K})\delta\mathbf{r} = 0 \quad (10.48)$$

d.h.

$$(m\ddot{x} + K_x)\delta x + (m\ddot{y} + K_y)\delta y = 0 \quad (10.49)$$

wo

$$\mathbf{r} = (x, y) = (R \cos \phi, R \sin \phi) \quad (10.50)$$

die Koordinaten des Massenpunktes sind, und $\delta \mathbf{r}$ eine beliebige virtuelle Verrückung desselben. Nach Gl. (10.31) ergibt sich aus (10.50) für die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r} = (\delta x, \delta y)$:

$$\begin{aligned} \delta x &= -R \sin \phi \delta \phi \\ \delta y &= R \cos \phi \delta \phi \end{aligned} \quad (10.51)$$

Außerdem ist wegen (10.50) (vgl. Pendel)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R\ddot{\phi} \sin \phi - R\dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{y} &= R\ddot{\phi} \cos \phi - R\dot{\phi}^2 \sin \phi \end{aligned} \quad (10.52)$$

Setzen wir Gl. (10.51), (10.52) und (10.45) für \mathbf{K} in die d'Alembertsche Gleichung (10.49) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & [m(-R\ddot{\phi} \sin \phi - R\dot{\phi}^2 \cos \phi) - F](-R) \sin \phi \delta \phi \\ + & [m(R\ddot{\phi} \cos \phi - R\dot{\phi}^2 \sin \phi) - F \tan \Theta] R \cos \phi \delta \phi = 0 \end{aligned} \quad (10.53)$$

Hieraus durch Zusammenfassen mit Hilfe von $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$:

$$mR^2\ddot{\phi} + FR \sin \phi - FR \tan \Theta \cos \phi = 0 \quad (10.54)$$

Einsetzen von $\tan \Theta$ aus Gl. (10.47) gibt schließlich die Bewegungsgleichung

$$mR\ddot{\phi} = -F \sin \phi \left[1 - \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \phi}} \right] \quad (10.55)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $\phi(t)$. Ihre Lösung ist eindeutig, wenn zusätzlich Anfangsbedingungen $\phi(t_0), \dot{\phi}(t_0)$ für eine gewisse Zeit t_0 vorgegeben werden.

10.3 Energieerhaltung bei Anwesenheit von Zwangskräften

Betrachten wir die Bewegung auf einer *ruhenden* Fläche Σ oder Kurve Λ . D.h. die Zwangsbedingungen $f_k(\mathbf{r}) = 0$ sollen die Zeit nicht explizit enthalten, d.h. f_k ($k = 1$ bzw $k = 1, 2$) sind Funktionen nur von \mathbf{r} , sie hängen also von t nur implizit dadurch ab, daß $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ für die tatsächliche Bewegung.

Die bei einer wirklichen infinitesimalen Verschiebung $d\mathbf{r}$ des Massenpunktes in der Fläche Σ bzw Kurve Λ geleistete Arbeit ist

$$dA = (\mathbf{F} + \mathbf{F}')d\mathbf{r} = \mathbf{F}d\mathbf{r} \quad (10.56)$$

da die Zwangskräfte $\mathbf{F}' \perp d\mathbf{r}$. Da die Bewegung des Massenpunktes in der Fläche Σ bzw Kurve Λ die einzig durch die Zwangsbedingungen zugelassene ist, haben wir damit das Resultat:

Zwangskräfte leisten keine Arbeit.

Seien weiter die *äußeren* Kräfte \mathbf{F} konservativ, was Reibungskräfte ausschließt.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (10.57)$$

wo das Potential von \mathbf{r} , jedoch nicht explizit von t abhängt.

Betrachten wir nun die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F} - \mathbf{F}' = 0 \quad \Big| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (10.58)$$

Multiplizieren wir wie angegeben skalar mit der Geschwindigkeit, so erhalten wir, da $\mathbf{F}' \perp d\mathbf{r}$

$$m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}\nabla V(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.59)$$

Dies formen wir, wie schon für Probleme ohne Zwangskräfte, nach der Kettenregel um:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}\nabla V(\mathbf{r}) &\equiv \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} V(x(t), y(t), z(t)) + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} V(x(t), y(t), z(t)) + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} V(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{d}{dt} V(x(t), y(t), z(t)) \equiv \frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t)) . \end{aligned}$$

und

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \equiv \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 \quad (10.60)$$

Somit wird (10.59)

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.61)$$

Definieren wir die Energie

$$E = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = \text{erhalten}, \quad (10.62)$$

so ändert sich diese im Laufe der Bewegung nicht. Man beachte, daß nur das Potential V der *äußeren* Kräfte in die Energie E eingeht, nicht jedoch die Zwangskräfte. Dies liegt eben daran, daß Zwangskräfte keine Arbeit leisten.

10.4 Die Energieerhaltung erlaubt es, Probleme mit nur einem Freiheitsgrad vollständig zu lösen

Dies werden wir nun an einem Beispiel vorführen.

10.4.1 Beispiel: Ebenes Pendel

Die Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig, und die Schwerkraft besitzt ein Potential

$$\mathbf{F} = -mg = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (10.63)$$

$$V(\mathbf{r}) = mgz \quad (10.64)$$

Die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ wird durch Einsetzen von Gl. (10.18)

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\Theta}^2 (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\Theta}^2 \quad (10.65)$$

Damit ist die Energie

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\Theta}^2 - mgl \cos \Theta = \text{const} \quad (10.66)$$

oder

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\Theta = \epsilon, \quad (10.67)$$

wo $\epsilon = \frac{E}{ml^2}$ eine Konstante ist.

10.5 Diskussion der Bewegungsgleichung des ebenen Pendels

Am einfachsten benützt man die Energieerhaltung, d.h. die eben hergeleitete Gl. (10.67). Diese kann auch unmittelbar aus der Bewegungsgleichung (10.20) hergeleitet werden, indem man mit Hilfe des 'Standard-Tricks' 1-mal integriert um so auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung zu kommen.

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \frac{g}{l}\sin\Theta &= 0 & | \cdot \dot{\Theta} \\ \ddot{\Theta}\dot{\Theta} + \frac{g}{l}\dot{\Theta}\sin\Theta &= 0 \end{aligned} \quad (10.68)$$

nun ist $-\dot{\Theta}\sin\Theta = \frac{d}{dt}\cos\Theta(t)$, und $\ddot{\Theta}\dot{\Theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{\Theta}^2$. Somit

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\Theta(t)\right] = 0 \quad (10.69)$$

Dies ist noch dieselbe Differentialgleichung 2. Ordnung. Eine Integration kann jetzt jedoch trivial durchgeführt werden, sodaß

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\Theta = \epsilon = \text{const} \quad (10.70)$$

Um diese Differentialgleichung 1. Ordnung zu lösen, betrachten wir die Umkehrfunktion $t(\Theta)$ von $\Theta(t)$. Der Definitionsbereich der (mehrdeutigen) Funktion $t(\Theta)$ ist gleich dem Wertebereich von $\Theta(t)$. Die Ableitungen sind bekanntlich verknüpft durch

$$\frac{dt}{d\Theta} = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\dot{\Theta}} \quad (10.71)$$

Somit erhalten wir aus (10.67)

$$\frac{dt}{d\Theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{2\left[\epsilon + \frac{g}{l}\cos\Theta\right]}} \quad (10.72)$$

Dies ist eine Differentialgleichung trivialer Art, die durch eine gewöhnliche Integration gelöst werden kann.

$$t = \pm \int \frac{d\Theta}{\sqrt{2[\epsilon + \frac{g}{l} \cos \Theta]}} \quad (\text{unbestimmtes Integral}) \quad (10.73)$$

Das unbestimmte Integral enthält eine willkürliche additive Konstante.

Diskussion des \pm Vorzeichens:

Das doppelte Vorzeichen im eben hergeleiteten Ausdruck für $t(\Theta)$ rührt von der Auflösung der quadratischen Gleichung her. Es hat jedoch auch eine anschauliche physikalische Bedeutung - es reflektiert nämlich die Invarianz der Bewegungsgleichung unter der sogenannten Bewegungsumkehr, manchmal auch Zeitumkehr genannt.

Betrachten wir die Newtonsche Bewegungsgleichung. Substituieren wir $t \rightarrow -t$, so ändert sich die Gleichung nicht, denn $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial (-t)^2}$. Ist $\Theta(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung, so muß also auch $\Theta(-t)$ eine (andere) Lösung sein. Man sagt, sie geht aus der ersten durch Bewegungsumkehr hervor. Da $\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{d\Theta}{d(-t)}$ etc ändern die Geschwindigkeiten hierbei ihr Vorzeichen. Ausgedrückt durch die Umkehrfunktion geht bei der Bewegungsumkehr $t(\Theta) \rightarrow -t(\Theta)$.

Bei der weiteren Diskussion des Pendels müssen wir 2 Fälle unterscheiden.

10.5.1 Pendelbewegung

Die maximale Auslenkung sei Θ_0 . Am Umkehrpunkt $\Theta = \Theta_0$ ist die Geschwindigkeit $\dot{\Theta} = 0$. So läßt sich die Konstante $\epsilon = \frac{E}{ml^2}$ nach (10.67) ausdrücken als

$$\epsilon = -\frac{g}{l} \cos \Theta_0 \quad (10.74)$$

Sei als Anfangsbedingung weiter gegeben, daß $\Theta = \Theta_0$ bei $t = t_0$. Dann ist

$$t(\Theta) = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\Theta'}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos \Theta_0)}} + t_0 \quad (10.75)$$

Das Minuszeichen wurde so gewählt, daß t zunimmt, wenn Θ von Θ_0 nach 0 abnimmt. Um von $\Theta = \Theta_0$ nach $\Theta = 0$ zu gelangen braucht das Pendel $\frac{1}{4}$

seiner Schwingungsdauer. Schreiben wir $\cos \Theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$, so bekommen wir

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Theta}{2}}} \quad (10.76)$$

Wir führen nun eine neue Integrationsvariable ϕ ein durch

$$\sin \phi = \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta_0}{2}} \quad (10.77)$$

Da $|\Theta| < \Theta_0$ ist der Betrag der linken Seite stets ≤ 1 , die Definition ist also sinnvoll. Setzen wir zur Abkürzung

$$k \equiv \sin \frac{\Theta_0}{2} \quad (10.78)$$

so wird nach (10.77)

$$\sin \frac{\Theta}{2} = k \sin \phi \quad (10.79)$$

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \quad (10.80)$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\Theta}{2} d\Theta = k \cos \phi d\phi \quad (10.81)$$

oder

$$\frac{1}{2} d\Theta = \frac{k \cos \phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \quad (10.82)$$

Die Wurzel im Ausdruck (10.76) wird

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \phi} = k \cos \phi \quad (10.83)$$

Schließlich bekommen wir für die Integrationsgrenzen aus (10.77): $\Theta = 0$ entspricht $\phi = 0$, und $\Theta = \Theta_0$ entspricht $\phi = \frac{\pi}{2}$. Durch Einsetzen in (10.76) haben wir schließlich

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \equiv 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (10.84)$$

wobei $k = \sin \frac{\Theta_0}{2}$. Das Integral läßt sich nicht elementar auswerten. Es ist jedoch tabelliert unter dem Namen $K(k)$ und wird als ‘vollständiges elliptisches Integral 1. Art’ bezeichnet.

Kleine Auslenkungen Ist Θ_0 klein, so ist auch $k = \sin \frac{\Theta_0}{2}$ eine kleine Größe. Es ist nützlich, den Integranden in eine Potenzreihe zu entwickeln nach der Formel

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}} = 1 + \frac{1}{2}a + \dots \quad (10.85)$$

für kleine a . Setzen wir $a = k^2 \sin^2 \phi$, so wird die Schwingungsdauer (10.84)

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi [1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \phi + \dots] = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} [1 + \frac{1}{4}k^2 + \dots] \quad (10.86)$$

Für kleine Auslenkungen ist $k = \sin \frac{\Theta_0}{2} \approx \frac{\Theta_0}{2}$ im Bogenmaß. Sie gilt näherungsweise solange $\frac{1}{16}\Theta_0^2 \ll 1$. Für endliche Auslenkungen ergeben sich Abweichungen.

Zahlenbeispiel: $\Theta = 20^\circ$ gibt $k = \sin \frac{\Theta_0}{2} = 0.174$

Damit $T = T_0(1 + 0.0072 + \dots)$ d.h. man macht einen Fehler von 0.7 Prozent, wenn T durch T_0 ersetzt wird. Die Punkte stehen überall für Terme der Ordnung Θ_0^4 und höher. Diese sind bei $\Theta_0 \approx 20^\circ$ noch völlig vernachlässigbar.

10.5.2 Kreisbewegung

In diesem Fall ist während der ganzen Bewegung $\dot{\Theta}^2 > 0$. Dazu muß natürlich die Energie $E = ml^2\epsilon$ einen genügend großen Wert haben. Setzen wir in Gl. (10.67) $\Theta = \pi$, so bekommen wir die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 = \epsilon - \frac{g}{l} \geq 0 \quad (10.87)$$

Somit

$$\epsilon \geq \frac{g}{l} \quad (10.88)$$

Die Umlaufzeit ist gegeben durch

$$\frac{T}{2} = \int_0^\pi \frac{d\Theta}{\sqrt{2[\epsilon + \frac{g}{l} \cos \Theta]}} \quad (10.89)$$

Definieren wir

$$k^2 = \frac{2\frac{g}{l}}{\epsilon + \frac{g}{l}}, \quad (10.90)$$

so ist wegen der eben hergeleiteten Abschätzung von ϵ , $0 < k^2 \leq 1$. Den Integranden in (10.89) können wir dann umschreiben als

$$\epsilon + \frac{g}{l} \cos \Theta = \epsilon + \frac{g}{l} - \frac{2g}{l} \sin^2 \frac{\Theta}{2} = 2\frac{g}{lk^2} (1 - k^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}) \quad (10.91)$$

Dabei wurde wiederum $\cos \Theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ benutzt. Setzen wir schließlich $\frac{\Theta}{2} = \phi$, $\frac{1}{2} d\Theta = d\phi$, so wird die Schwingungsdauer

$$T = 2k\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = 2k\sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (10.92)$$

wobei k^2 durch Gl. (10.90) gegeben ist. Das Resultat läßt sich also wiederum durch das vollständige elliptische Integral 1. Art ausdrücken. Einen alternativen Ausdruck für ϵ und damit für k erhält man, indem man in Gl. (10.67) $\Theta = 0$ einsetzt:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^2 - \frac{g}{l} \quad (\Theta = 0) \quad (10.93)$$

somit

$$k^2 = \frac{2\frac{g}{l}}{\frac{1}{2} \dot{\Theta}^2} \quad (\Theta = 0) \quad (10.94)$$

Damit ist k^2 durch die Winkelgeschwindigkeit, die das Pendel beim Durchlaufen der Ruhelage $\Theta = 0$ hat, ausgedrückt.

10.6 Zeitabhängige Zwangsbedingungen

Die Lagrange Gleichungen 1. Art und das d'Alembertsche Prinzip gelten genauso bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen, d.h. der Bewegung eines Massenpunktes auf einer bewegten Fläche $\Sigma(t)$ oder Kurve $\Lambda(t)$. Die Energieerhaltung gilt jedoch in diesem Fall nicht mehr. Wir wollen diesen Punkt nun noch am Beispiel der Bewegung auf der bewegten Fläche $\Sigma(t)$ etwas

erläutern. Die Zwangsbedingung sei $f(\mathbf{r}, t) = 0$. Nach Definition stehen die Zwangskräfte \mathbf{F}' zu jeder Zeit t senkrecht auf der Fläche $\Sigma(t)$, sie haben also die Richtung der Normalen. Nach dem früher angegebenen Satz bedeutet das, daß $\mathbf{F}' = -\lambda \nabla f(\mathbf{r}, t)$. Dabei ist die Differentiation eine partielle nach \mathbf{r} , d.h. t ist festgehalten. Aufgrund der Newtonschen Bewegungsgleichung gelten dann die Lagrange Gleichungen wie angegeben, d.h.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - \lambda \nabla f(\mathbf{r}, t) \quad (10.95)$$

Die möglichen virtuellen Verrückungen hängen von der Zeit t ab, es soll $\delta \mathbf{r}$ in der Tangentenebene von $\Sigma(t)$ liegen, d.h. sowohl $\mathbf{r} \in \Sigma(t)$ als auch $\mathbf{r} + d\mathbf{r} \in \Sigma(t)$. Dabei ist die Zeit t wiederum als Konstante zu betrachten. Da die Normale \perp Tangentenebene folgt wie zuvor, daß

$$\delta \mathbf{r} \nabla f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (10.96)$$

wobei wie in (10.95) ∇ eine partielle Differentiation nach \mathbf{r} bei festgehaltenem t ist. Aus (10.95) folgt dann das d'Alembertsche Prinzip

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F})\delta \mathbf{r} = 0 \quad (10.97)$$

Betrachten wir nun schließlich die tatsächliche Bewegung des Massenpunkts im Laufe der Zeit. Zur Zeit t befinde sich der Massenpunkt bei \mathbf{r} . Dann wird er sich zur Zeit $t + dt$ an einem Punkt $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ befinden. Das infinitesimale Wegstück $d\mathbf{r}$ stellt jedoch *keine* mögliche Verrückung dar, denn es ist $\mathbf{r} \in \Sigma(t)$ aber $\mathbf{r} + d\mathbf{r} \in \Sigma(t + dt) \neq \Sigma(t)$. Das liegt natürlich daran, daß sich die Fläche selbst bewegt, während der Massenpunkt von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ läuft. Im Unterschied dazu sind virtuelle Verrückungen bei festgehaltener Fläche ausgeführt zu denken. Als Konsequenz gilt für die wirkliche Bewegung nicht mehr, daß $d\mathbf{r} \perp \mathbf{F}'$. Im Falle einer bewegten Fläche (oder Kurve) können Zwangskräfte daher durchaus Arbeit leisten.

10.6.1 Beispiel: Karussell, siehe Zeichnung 10.2

Bewegung eines Massenpunktes in einer vorgeschriebenen Ebene, die durch $\phi(t)$ charakterisiert wird, auf vorgeschriebener (bewegter) Kurve $\Lambda(t)$. Diese ist festgelegt durch die konstante Länge l des Stabes. (Kein Kettenkarussell, der Stab soll an einer Achse befestigt sein, sodaß er sich nur um diese Achse

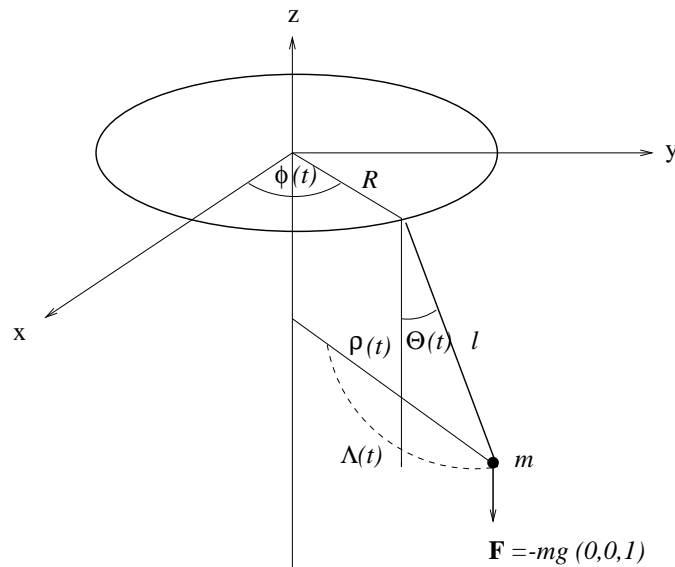


Abbildung 10.2: Karussell

drehen kann). Zwangsbedingungen:

1. Ebene

$$\frac{x}{y} - \frac{\cos \phi(t)}{\sin \phi(t)} = 0 \quad (10.98)$$

2. Bahn in der Ebene

$$z^2 + (\rho - R)^2 - l^2 = 0 \quad (10.99)$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wir betrachten den Fall einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω

$$\phi(t) = \omega t \quad (10.100)$$

Es gibt 2 Zwangsbedingungen, daher charakterisiert eine unabhängige verallgemeinerte Koordinate die Lage des Systems eindeutig. Hierfür nehmen wir Θ , sodaß

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \omega t \\ y &= \rho \sin \omega t \\ z &= -l \cos \Theta \end{aligned} \quad (10.101)$$

wobei

$$\rho = R + l \sin \Theta \quad (10.102)$$

d'Alembertsches Prinzip:

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F})\delta\mathbf{r} = 0 \quad (10.103)$$

oder, in Komponenten

$$m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y + (m\ddot{z} + mg)\delta z = 0 \quad (10.104)$$

Die virtuellen Verrückungen sind durch die Änderung $\delta x, \delta y, \delta z$ der Ausdrücke (10.102) gegeben, wenn Θ um $d\Theta$ vergrößert wird; vgl. Gl. (10.32). Dabei ist t als festgehalten zu betrachten.

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\rho \cos \omega t = l \cos \Theta \cos \omega t \delta\Theta \\ \delta y &= \delta\rho \sin \omega t = l \cos \Theta \sin \omega t \delta\Theta \\ \delta z &= l \sin \Theta \delta\Theta \end{aligned} \quad (10.105)$$

Schließlich müssen wir noch \ddot{x}, \ddot{y} und \ddot{z} durch $\Theta, \dot{\Theta}$ und $\ddot{\Theta}$ ausdrücken. Aus Gl. (10.102) bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \cos \omega t - \rho\omega \sin \omega t \\ \dot{y} &= \dot{\rho} \sin \omega t + \rho\omega \cos \omega t \\ \dot{z} &= l\dot{\Theta} \sin \Theta \end{aligned} \quad (10.106)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\rho} \cos \omega t - 2\dot{\rho}\omega \sin \omega t - \rho\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} &= \ddot{\rho} \sin \omega t + 2\dot{\rho}\omega \cos \omega t - \rho\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{z} &= l[\ddot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \cos \Theta] \end{aligned} \quad (10.107)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= l\dot{\Theta} \cos \Theta \\ \ddot{\rho} &= l[\ddot{\Theta} \cos \Theta - \dot{\Theta}^2 \sin \Theta] \end{aligned} \quad (10.108)$$

Setzen wir die Ausdrücke (10.106), (10.108) für $\delta\mathbf{r}$ und $\ddot{\mathbf{r}}$ in das d'Alembertsche Prinzip (10.104) ein, so erhalten wir als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} &(\ddot{\rho} \cos \omega t - 2\dot{\rho}\omega \sin \omega t - \rho\omega^2 \cos \omega t) \cos \omega t \cos \Theta l \delta\Theta \\ &+ (\ddot{\rho} \sin \omega t + 2\dot{\rho}\omega \cos \omega t - \rho\omega^2 \sin \omega t) \sin \omega t \cos \Theta l \delta\Theta \\ &+ (\ddot{z} + g) \sin \Theta l \delta\Theta = 0 \end{aligned} \quad (10.109)$$

Hierin heben sich einige Terme heraus, und andere lassen sich mit Hilfe von $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ zusammenfassen. Da $l\delta\Theta \neq 0$ kann man diesen Überallesfaktor weglassen, sodaß sich ergibt:

$$(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) \cos \Theta + (\ddot{z} + g) \sin \Theta = 0 \quad (10.110)$$

Setzen wir schließlich für ρ , $\ddot{\rho}$ und \ddot{z} die expliziten Ausdrücke (10.102), (10.108) und (10.108) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (l\ddot{\Theta} \cos \Theta - l\dot{\Theta}^2 \sin \Theta - R\omega^2 - l\omega^2 \sin \Theta) \cos \Theta \\ + (l\ddot{\Theta} \sin \Theta + l\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + g) \sin \Theta = 0. \end{aligned} \quad (10.111)$$

Durch Kürzen und Zusammenfassen mit $\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1$ vereinfacht sich dies zu

$$l\ddot{\Theta} - \omega^2(R + l \sin \Theta) \cos \Theta + g \sin \Theta = 0 \quad (10.112)$$

Dies ist die gesuchte Bewegungsgleichung. Wir wollen diese Gleichung hier nicht lösen, sondern nur eine ganz spezielle Lösung bestimmen, nämlich diejenige mit $\Theta = \text{const}$ unabhängig von t (Gleichgewicht). Dann ergibt sich aus (10.112)

$$\omega^2(R + l \sin \Theta) \cos \Theta = g \sin \Theta \quad (10.113)$$

Schreibt man darin $\cos \Theta = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta}$ und quadriert, so erhält man eine algebraische Gleichung 4. Grades für $\sin \Theta$. Solche Gleichungen sind exakt lösbar (vgl. Formelsammlung von Rottmann S.16).

Kleine Auslenkungen: $\sin^2 \Theta \ll 1$.

Dann ist $\cos \Theta = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta + \dots = 1 + O(\sin^2 \Theta)$ Gleichung (10.113) wird damit

$$\omega^2(R + l \sin \Theta) \approx g \sin \Theta \quad (10.114)$$

wenn wir Terme der Ordnung $\sin^2 \Theta$ vernachlässigen können. Hieraus

$$\sin \Theta \approx \frac{R\omega^2}{g - \omega^2 l} \quad (10.115)$$

Damit die Annahme kleiner Gleichgewichtsauslenkungen Θ konsistent ist, muß offenbar die Winkelgeschwindigkeit ω genügend klein sein.

Kapitel 11

Systeme von Massenpunkten

Wir betrachten N Massenpunkte $i = 1 \dots N$ mit Massen m_i und Ortsvektoren $\mathbf{r}_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ zur Zeit t . Ist \mathbf{F}_i die gesamte Kraft auf den Massenpunkt i , so gelten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (11.1)$$

Wir nehmen an, daß keine Zwangskräfte vorhanden sind. Dann setzt sich im allgemeinen die Kraft \mathbf{F}_i auf das Teilchen i zusammen aus

1. äußeren Kräften \mathbf{F}_i^{ext} . Angenommen, sie sind geschwindigkeitsunabhängig, so hängt \mathbf{F}_i^{ext} nur vom Ort \mathbf{r}_i des Teilchens i ab, sowie möglicherweise explizit von der Zeit

$$\mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{F}_i^{ext}(\mathbf{r}_i(t), t) \quad (11.2)$$

2. Kräfte \mathbf{F}_{ij} der (anderen) Teilchen auf Teilchen i
Insgesamt ist dann

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_j \mathbf{F}_{ij} \quad (11.3)$$

11.1 Das 3. Newtonsche Gesetz

Wir werden Annahmen, die von Newton stammen, über die Natur der Kräfte \mathbf{F}_{ij} zwischen den Teilchen machen. Diese Kräfte sollen nicht geschwindigkeitsabhängig sein, sondern nur von den Ortsvektoren der beteiligten Massenpunkte abhängen. \mathbf{F}_{ij} hängt also nur von \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_j ab. Weiter gelte

α $\mathbf{F}_{ii} = 0$ Ein Massenpunkt übt keine Kraft auf sich selbst aus ('Münchhausen lügt');

β $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ actio=reactio (3. Newtonsches Gesetz)

γ \mathbf{F}_{ij} hat die Richtung von $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, und hat die Form

$$\mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f_{ij}(r_{ij}) \quad (11.4)$$

wo $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ | Es folgt aus γ , daß

$$f_{ij}(r) = f_{ji}(r) \quad (11.5)$$

Das Prinzip actio=reactio besagt beispielsweise, daß die von der Erde auf die Sonne ausgeübte Kraft umgekehrt gleich der von der Sonne auf die Erde ausgeübten Kraft ist. Insbesondere ist es nach dem Prinzip actio=reactio unmöglich, daß ein Massenpunkt A auf B eine Kraft ausübt, ohne daß B auf A eine Kraft ausübt. Oder: Es gibt kein Agens, das etwas bewirken kann, ohne daß es auch selbst der Einwirkung anderer Agenzien ausgesetzt wäre. Es entspricht der Lebenserfahrung, daß dies auch außerhalb der Physik gilt, doch kennt man eine allgemeine Formulierung - etwa für die Soziologie - nicht.

11.2 Der Satz vom Schwerpunkt

Man definiert die Gesamtmasse M des Systems durch

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (11.6)$$

Damit kann man die Koordinate \mathbf{R} des Schwerpunktes des Systems einführen

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (11.7)$$

Wir werden nun die Bewegung des Schwerpunktes betrachten. Es wird sich herausstellen, daß sich als Konsequenz des 3. Newtonschen Gesetzes actio=reactio die Wirkung der Kräfte zwischen den Teilchen heraushebt. Als Resultat findet man den Satz vom Schwerpunkt

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext} \quad (11.8)$$

wo

$$\mathbf{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} \quad (11.9)$$

‘Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte äußere Kraft an einer im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse angreifen würde.’

Wirft man etwa einen Stuhl zum Fenster hinaus, so bewegt sich bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes sein Schwerpunkt auf einer Parabel, ungeachtet einer möglichen komplizierten Kreisbewegung des Stuhls um seinen Schwerpunkt.

Vorbereitung des Beweises Es sei zunächst an gewisse Eigenschaften von Summen und Integralen erinnert

1. Auf die Bezeichnung der Integrations- oder Summationsvariablen kommt es nicht an

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dy f(y) \quad (11.10)$$

$$\sum_{i=a}^b f_i = \sum_{j=a}^b f_j \quad (11.11)$$

Dies gilt auch in Mehrfachsummen und Mehrfachintegralen.

2. Vertauschung von Summen oder Integralen

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} dy f(x, y) = \int_{a'}^{b'} dy \int_a^b dx f(x, y) \quad (11.12)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f_{ij} = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N f_{ij} \quad (11.13)$$

Kombinieren wir die Identitäten 1 und 2 für Summen, so erhalten wir als Korollar (für $M = N$)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) \quad (11.14)$$

denn die Identitäten gelten auch für Vektoren, wie man durch Betrachtung von deren Komponenten sieht.

Herleitung des Satzes vom Schwerpunkt Durch Einsetzen der Newtonschen Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}(t)$ erhalten wir

$$M\ddot{\mathbf{R}} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (11.15)$$

Nach Gl (11.14) verschwindet der zweite Term, denn er ist gleich $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij})$, und $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ wegen actio=reactio. Also

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} \quad (11.16)$$

11.3 Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls ist definiert durch

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (11.17)$$

Durch Vergleich sieht man, daß

$$\dot{\mathbf{P}} = M\dot{\mathbf{R}} \quad (11.18)$$

Gibt es keine äußeren Kräfte, oder ist zumindest die Gesamtkraft $\mathbf{F}^{ext} = 0$, so vereinfacht sich die Aussage des Satzes vom Schwerpunkt zur Impulserhaltung

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad (11.19)$$

11.4 Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls \mathbf{L}_i einzelner Teilchen i bezüglich des Koordinatenursprungs ist bekanntlich

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (11.20)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (11.21)$$

Wir nehmen wiederum an, daß die äußeren Kräfte verschwinden $\mathbf{F}^{ext} = 0$. Es wird gezeigt werden, daß dann der Gesamtdrehimpuls erhalten ist

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (11.22)$$

Dies folgt aus der Eigenschaft γ der Kräfte zwischen den Teilchen wie folgt. Es ist

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (11.23)$$

Der erste Term verschwindet, weil $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ für jedes \mathbf{a} . Im zweiten Term setzen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung ein. Da $\mathbf{F}_i^{ext} = 0$ nach Annahme, ist die Kraft auf Teilchen i gleich $\sum_j \mathbf{F}_{ij}$, mithin

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \quad (11.24)$$

Die Form γ der Kraft gibt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f_{ij}(r_{ij}) \quad (11.25)$$

Nun wenden wir wiederum Gl (11.14) an. Da $r_{ij} = r_{ji}$, $f_{ij}(r) = f_{ji}(r)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_i \sum_j [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] f_{ij}(r_{ij}) \\ & \frac{1}{2} \sum_i \sum_j [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] f_{ij}(r_{ij}) = 0 \end{aligned} \quad (11.26)$$

wegen $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Damit ist die Drehimpulserhaltung gezeigt.

11.5 Energieerhaltung

Hier nehmen wir an, daß die äußeren Kräfte \mathbf{F}_i^{ext} konservativ sind, d.h. nicht explizit von der Zeit abhängen und ein Potential besitzen.

$$\mathbf{F}_i^{ext} = -\nabla_i V_i^{ext}(\mathbf{r}_i) \quad (11.27)$$

Dabei ist

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \quad (11.28)$$

Um die Energie zu definieren, zeigen wir zunächst, daß die Kräfte zwischen den Teilchen ein Potential besitzen. Dies folgt aus den Annahmen α, β, γ über die Kräfte. Sei $V_{ij}(r)$ die Stammfunktion von $-r f_{ij}(r)$. Da $f_{ij} = f_{ji}$ können wir annehmen, daß willkürliche Konstanten so gewählt sind, daß

$$V_{ij}(r) = V_{ji}(r) \quad (11.29)$$

Wir berechnen zunächst

$$\nabla_i r_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} r_{ij}, \frac{\partial}{\partial y_i} r_{ij}, \frac{\partial}{\partial z_i} r_{ij} \right) \quad (11.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2(x_i - x_j) \frac{1}{2} [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (11.31)$$

Für die anderen Komponenten gilt entsprechendes. Also

$$\nabla_i r_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}} \quad (11.32)$$

Daher gilt

$$-\nabla_i V_{ij}(r_{ij}) = -\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}} V'_{ij}(r_{ij}) \quad (11.33)$$

Dabei ist $V'_{ij}(r_{ij})$ die Ableitung von V_{ij} nach seinem Argument r_{ij} . Da $V_{ij}(r)$ die Stammfunktion von $-r f_{ij}(r)$ ist, gilt weiter

$$-\nabla_i V_{ij}(r_{ij}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f_{ij}(r_{ij}) = \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}) = \nabla_j V_{ij}(r_{ij}) \quad (11.34)$$

Gl (11.34) folgt aus Gl (11.33) durch vertauschen von i und j , wegen $V_{ij}(r) = V_{ji}(r)$. Dies ist nur wieder ein Ausdruck von actio=reactio.

Nun definieren wir die gesamte potentielle Energie V durch

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{j=1}^N V_j^{ext}(\mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N V_{jk}(r_{jk}) \quad (11.35)$$

In der letzten Summe kommt jedes ungeordnete Paar verschiedener Indizes zweimal vor, als (jk) und als (kj) . Dies wird durch den Faktor $\frac{1}{2}$ kompensiert. Man kann die letzte Summe einschließlich Faktor $\frac{1}{2}$ also als Summe über Paare von Teilchen interpretieren.

Es soll schließlich gezeigt werden, daß man aus dem Gesamtpotential V des ganzen Systems die gesamte Kraft \mathbf{F}_i auf Teilchen i für jedes $i = 1 \dots N$ bestimmen kann. Es gilt die Formel

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (11.36)$$

Wir berechnen

$$-\nabla_i \left(\sum_j V_j^{ext}(\mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k V_{jk}(r_{jk}) \right) \quad (11.37)$$

In der ersten Summe trägt nur der Term mit $j = i$ bei, da die anderen keine \mathbf{r}_i -Abhängigkeit tragen. Die zweite Summe können wir auf $j \neq k$ einschränken, da o.B.d.A. $V_{ii} = 0$ ist (wegen $\mathbf{F}_{ii} = 0$). Dann gibt es nur Beiträge, wenn $j = i$ oder $k = i$ und beides tritt nicht gleichzeitig auf. Also obiger Ausdruck

$$= -\nabla_i V_i^{ext}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_k \nabla_i V_{ik}(r_{ik}) + \frac{1}{2} \sum_j \nabla_i V_{ji}(r_{ji}) \quad (11.38)$$

Weil die Bezeichnung der Summationsvariablen irrelevant ist und weil $V_{ij} = V_{ji}$, sind die letzten beiden Terme gleich. Mit Gleichung (11.34) erhalten wir für obigen Ausdruck

$$= \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_j \mathbf{F}_{ji} \quad (11.39)$$

Nun können wir die Gesamtenergie definieren.

$$E = T + V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (11.40)$$

Da \mathbf{r}_i und $\dot{\mathbf{r}}_i$ Funktionen der Zeit sind, ist zunächst auch E eine Funktion der Zeit. Die Energieerhaltung besagt, daß sie konstant ist.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (11.41)$$

Dies ist eine Konsequenz der Newtonschen Bewegungsgleichungen. Wir rechnen nach. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \right) \\ &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) = 0 \end{aligned} \quad (11.42)$$

Im vorletzten Schritt wurde Gl (11.36) benutzt.

11.6 Der Virialsatz

Der Virialsatz macht Aussagen über *zeitliche Mittelwerte physikalischer Größen*

Ausgangspunkt sind die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Impulse \mathbf{p}_i der Teilchen $i = \dots N$,

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{tot}, \quad (11.43)$$

$$\mathbf{F}_i^{tot} = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (11.44)$$

Dabei ist \mathbf{F}_i^{tot} die *gesamte Kraft* auf Teilchen i , einschließlich möglicherweise vorhandener Zwangskräfte. Unter diese Zwangskräfte fallen beispielsweise die von der Wand eines Behälters auf die Atome eines Gases ausgeübten Kräfte. Man betrachtet nun die Größe

$$G = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i. \quad (11.45)$$

Diese Größe ist dem Drehimpuls $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ähnlich, sie ist jedoch eine skalare Größe. Wir berechnen ihre zeitliche Änderung

$$\frac{d}{dt} G = \sum (\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \dot{\mathbf{p}}_i).$$

Den ersten Term kann man umformen,

$\sum \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i^2 = 2T$; T ist die kinetische Energie. Im zweiten

Term kann man die Newtonsche Bewegungsgleichung für $\dot{\mathbf{p}}_i$ einsetzen. Somit ist

$$\frac{d}{dt}G = 2T + \sum \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i.$$

Wir mitteln dies über ein Zeitintervall $0 \dots \tau$. Es ist

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt}G(t) = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)], \quad (11.46)$$

$$\frac{1}{\tau} \int dt f(t) = \bar{f} \quad (11.47)$$

Dabei steht $\bar{\quad}$ für den zeitlichen Mittelwert. Es ergibt sich damit

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)].$$

Wichtig sind die Spezialfälle, wo die rechte Seite verschwindet. Dies gibt den

Virialsatz

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i}$$

falls $G(\tau) = G(0)$. Die rechte Seite der Gleichung heißt *Virial*.

Die Voraussetzung ist in den folgenden beiden Fällen erfüllt

1. *Periodische Bewegung mit Periode* τ .

Dann ist $\mathbf{p}_i(\tau) = \mathbf{p}_i(0)$ und $\mathbf{r}_i(\tau) = \mathbf{r}_i(0)$ und damit auch $G(\tau) = G(0)$.

2. *Beschränkte Bewegung, $\tau \rightarrow \infty$* . Es sei

$$|\mathbf{r}_i| < R < \infty.$$

Wir nehmen weiter an, daß die Energie erhalten ist und daß die potentielle Energie nach unten beschränkt ist, sodaß bei einer Bewegung mit Gesamtenergie E die Impulse der einzelnen Teilchen beschränkt sind,

$$|\mathbf{p}_i| < p_{max} < \infty.$$

Eine Bewegung in einem beschränkten Bereich kann beispielsweise dadurch garantiert sein, daß die potentielle Energie $> E$ wird, wenn eines der Teilchen den Bereich verläßt ("Wände"). Unter diesen Bedingungen ist auch G beschränkt, $|G(t)| < NRp_{max}$, und daher geht $\tau^{-1}[G(\tau) - G(0)] \rightarrow 0$ wenn $\tau \rightarrow \infty$.

11.6.1 Virialsatz für Kräfte mit homogenen Potentialen

Wir betrachten Kräfte, die ein Potential besitzen,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) &= \sum_i V_i(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t), \\ V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t) &= V_{ji}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i, t). \end{aligned} \quad (11.48)$$

Außerdem seien die Potentiale homogen vom Grad h in dem Sinn, daß für beliebige $\lambda > 0$

$$V_i(\lambda \mathbf{r}_i, t) = \lambda^h V_i(\mathbf{r}_i, t), \quad (11.49)$$

$$V_{ij}(\lambda \mathbf{r}_i, \lambda \mathbf{r}_j, t) = \lambda^h V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t). \quad (11.50)$$

Dann gilt, wie gleich gezeigt werden wird, der Virialsatz in folgender Form.

Virialsatz für homogene Potentiale

$$\overline{T} = \frac{h}{2} \overline{V}.$$

Dies verknüpft die zeitlichen Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie. Ist die Energie E erhalten, so folgt wegen $E = \overline{T + V} = (1 + \frac{h}{2}) \overline{V}$, daß

$$\overline{T} = \frac{h}{h+2} E, \quad \overline{V} = \frac{2}{h+2} E.$$

Zur Herleitung berechnen wir zunächst die Kräfte.

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t) = -\nabla_i V_i(\mathbf{r}_i, t)$$

und die Kraft von Teilchen j auf Teilchen i ist

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t).$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^{tot} &= -\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V(\mathbf{r}_i) - \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \\ &= -\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V(\mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j V_{ji}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i)) \\ &= -\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V(\mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V_{ij} + \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j V_{ij})(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \\ &= -\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (11.51)$$

In der ersten Gleichung haben wir die Möglichkeit der Umbenennung der Summationsvariablen (i, j) in (j, i) ausgenutzt, und in der zweiten Gleichung wurde die Symmetrie (11.48) des Potentials ausgenutzt.

Wir benutzen nun den folgenden mathematischen Satz

Eulersche Gleichung für homogene Funktionen . Es sei

$$f(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) = \lambda^h f(q_1, \dots, q_n).$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial}{\partial q_k} f(q_1, \dots, q_n) = h f(q_1, \dots, q_n). \quad (11.52)$$

Den Beweis stellen wir zurück. Wir können die $3N$ Komponenten der \mathbf{r}_i bzw die $9N^2$ Komponenten der Paare $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ als q_k bezeichnen, und die Eulersche Gleichung auf jede der beiden Summen in obiger Gleichung für $\sum \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i$ anwenden. Es ergibt sich

$$\sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{tot} = -hV.$$

Setzen wir dies in den allgemeinen Virialsatz ein, so bekommen wir den Virialsatz für homogene Potentiale wie oben angegeben.

Zur Vollständigkeit soll die Euler'sche Gleichung bewiesen werden.

Aus der Homogenitätsvoraussetzung folgt

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)|_{\lambda=1} = h f(q_1, \dots, q_n). \quad (11.53)$$

Wir berechnen die linke Seite. Setze $Q_k = \lambda q_k$.

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)|_{\lambda=1} &= \left(\lambda \sum \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial Q_k} f(Q_1, \dots, Q_n) \right)_{\lambda=1} \\ &= \sum q_k \frac{\partial}{\partial q_k} f(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)|_{\lambda=1} \\ &= \sum q_k \frac{\partial}{\partial q_k} f(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (11.54)$$

Setzen wir dies in die Gl.(11.53) ein, so erhalten wir die Eulersche Gleichung, q.e.d.

11.6.2 Anwendungsbeispiele

harmonischer Oszillator im Raum oder in 1 Dimension.

Es ist

$V(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}|\mathbf{r}|^2$. Dies ist homogen vom Grad $h = 2$. Daher ist

$$\overline{T} = \overline{V} = \frac{E}{2}.$$

Satellit im Gravitationsfeld eines Massenpunkts .

Das Potential hat die Gestalt

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GmM}{|\mathbf{r}|}.$$

Dies ist homogen vom Grad $h = -1$. Bei Energie $E < 0$ ist die Bewegung beschränkt, und es folgt aus dem Virialsatz für homogene Potentiale, daß

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V} = -E.$$

Betrachten wir speziell eine Kreisbahn, so sind T und V zeitlich konstant, und es ergibt sich die folgende Beziehung zwischen dem Betrag v der Geschwindigkeit, und dem Abstand r .

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GmM}{r} = -\frac{1}{2}V.$$

Daraus kann man die Umlaufzeit bestimmen.

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{m}{2T}} = 2\pi r \sqrt{\frac{mr}{GmM}} = 2\pi r^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM}},$$

in Übereinstimmung mit dem Keplerschen Resultat.

Sternhaufen . Wir betrachten ein System aus Massenpunkten, zwischen denen Gravitationskräfte wirken,

$$V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

Das Potential $\sum V_i$ der äußeren Kräfte verschwinde. Das Potential ist wiederum homogen vom Grad $h = -1$. Die Bewegung sei beschränkt.

Dies erfordert, daß die Energie $E < 0$ ist. Aus dem Virialsatz folgt wiederum

$$\bar{T} = -E, \quad \bar{V} = 2E, \quad \bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}.$$

Angenommen, die Massen seien alle gleich, so bekommen wir eine Beziehung zwischen dem mittleren inversen Abstand $\overline{r^{-1}}$ der Massenpunkte, und dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\overline{v^2}$. Es ist

$$-\bar{V} = \frac{1}{2}Gm^2\overline{\sum_{ij} r_{ij}^{-1}} = \frac{1}{2}N(N-1)Gm^2\overline{r^{-1}}.$$

Da $\bar{T} = \frac{1}{2}Nm\overline{v^2}$ ist, so folgt

$$\overline{v^2} = \frac{1}{2}(N-1)Gm\overline{r^{-1}}.$$

11.7 Das Zweikörperproblem

Wir betrachten ein System aus zwei Massenpunkten mit Massen m_1 und m_2 bei Abwesenheit äußerer Kräfte $\mathbf{F}^{ext} = 0$. Die Gesamtmasse ist $M = m_1 + m_2$ und die Position des Schwerpunktes \mathbf{R} ist nach Definition gegeben durch

$$M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \quad (11.55)$$

Wir betrachten außerdem die Relativkoordinaten

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (11.56)$$

Multiplizieren wir Gl (11.56) mit m_2 und addieren zu Gl (11.55), so erhalten wir einen Ausdruck für \mathbf{r}_1

$$M\mathbf{R} + m_2\mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 \quad (11.57)$$

oder mit

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (11.58)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \quad (11.59)$$

Die Größe μ heißt reduzierte Masse. Eine äquivalente Definition ist

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (11.60)$$

In gleicher Weise erhalten wir durch Multiplikation mit m_1 und Subtraktion

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \quad (11.61)$$

Ist $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21}$ die Kraft von Massenpunkt 2 auf Teilchen 1, so ist wegen actio=reactio $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}$, und die Newtonschen Bewegungsgleichungen nehmen die Form an

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mathbf{F} \end{aligned} \quad (11.62)$$

Drücken wir \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 durch die Schwerpunktskoordinate \mathbf{R} und die Relativkoordinate \mathbf{r} aus, so wird daraus

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{R}} + \mu \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} \\ m_2 \ddot{\mathbf{R}} - \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{F} \end{aligned} \quad (11.63)$$

Bilden wir die Summe und Differenz, so sehen wir, daß dies äquivalent ist zu

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad \text{Gesamtimpulserhaltung} \quad (11.64)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (11.65)$$

Die Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate sieht also aus wie die Bewegungsgleichung für den Ortsvektor eines Massenpunktes mit Masse μ . Damit ist das 2-Körperproblem auf das 1-Körperproblem zurückgeführt.

Betrachten wir als Anwendungsbeispiel ein hypothetisches Planetensystem aus der Sonne mit Masse M_\odot und nur einem Planeten mit Masse m_p . Die reduzierte Masse ist

$$\mu = \frac{m_p M_\odot}{m_p + M_\odot} \quad (11.66)$$

Das Potential hängt nur vom Abstand r ab und ist gegeben durch

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \alpha = GM_\odot m_p \quad (11.67)$$

Aus der Behandlung des 1-Körperproblems in Kapitel 8 für ein Teilchen der Masse μ können wir nun schließen, daß die Umlaufzeit T sich durch die große Halbachse (der Bahn der Relativkoordinate \mathbf{r}) ausdrückt gemäß

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha}a^3 \quad (11.68)$$

Einsetzen der reduzierten Masse μ und von α liefert

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_p + M_\odot)}a^3 \quad (11.69)$$

Der Proportionalitätsfaktor von a^3 hängt von der Planetenmasse ab. Das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ ist also nicht für alle Planeten exakt dasselbe, und das 3. Keplersche Gesetz gilt deshalb nicht exakt.

Kapitel 12

Euler-Lagrange Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip

12.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Es ist häufig für die Lösbarkeit eines Problems entscheidend wichtig, daß man eine geeignete Koordinatenwahl trifft. Insbesondere sollte die Wahl der Koordinaten der Symmetrie des Problems angepaßt sein. Beispielsweise ist es bei Kugelsymmetrie günstig, statt kartesischer Koordinaten Polarkoordinaten zu wählen. Der Lagrange-Formalismus gibt eine Formulierung der Newtonschen Bewegungsgleichungen, die für jede Art von Koordinaten gilt. Man kann sagen, diese Formulierung sei 'kovariant unter Koordinatentransformationen'. Betrachte ein System von N Massenpunkten mit Ortsvektoren \mathbf{r}_i , die $k \geq 0$ holonomen Zwangsbedingungen genügen. Dann hat man $3N$ kartesische Koordinaten x_i, y_i, z_i , zwischen denen k Beziehungen bestehen. Ein Satz verallgemeinerter Koordinaten

$$q = (q_1, \dots, q_s) \quad s = 3N - k \quad (12.1)$$

besteht aus s reellen Variablen q_1, \dots, q_s , die unabhängig gewählt werden können, und die Lage der N Massenpunkten eindeutig festlegen. Die Ortsvektoren \mathbf{r}_i werden damit Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten.

$$\mathbf{r}_i(q) \equiv \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s) = (x_i(q), y_i(q), z_i(q)) \quad (12.2)$$

Für jede Wahl von q müssen die Zwangsbedingungen erfüllt sein. Der Name 'verallgemeinerte' Koordinaten ist historisch bedingt. Heute würde man

einfach 'Koordinaten' sagen, oder allenfalls 'möglicherweise krummlinige Koordinaten'.

12.1.1 Beispiel: 1 Massenpunkt, 0 Zwangsbedingungen, Polarkoordinaten

s=3: Koordinaten $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{12.3}$$

12.1.2 Beispiel: 1 Massenpunkt auf der Kugelschale $\mathbf{r}^2 = R^2$

1 Zwangsbedingung \rightarrow s=2: Koordinaten $q_1 = \theta$, $q_2 = \phi$

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \phi \\y &= R \sin \theta \sin \phi \\z &= R \cos \theta\end{aligned}\tag{12.4}$$

12.1.3 Beispiel: Hantel, 2 Massenpunkte

Zwangsbedingung $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = l^2$

$s = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

Koordinaten: Koordinaten des Schwerpunktes $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ und zwei Winkel θ , ϕ , die die Lage der Achse festlegen.

$q_1 = X$, $q_2 = Y$, $q_3 = Z$, $q_4 = \theta$, $q_5 = \phi$

Ausdruck für die kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

mit $\mathbf{r} = (l \sin \theta \cos \phi, l \sin \theta \sin \phi, l \cos \theta)$

μ ist die reduzierte Masse, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ist die Relativkoordinate.

12.2 Lagrangefunktion L

Eine Lagrangefunktion existiert, wenn die Nicht-Zwangskräfte ein Potential V haben, sodaß die Gesamtheit der Kräfte $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ auf Teilchen i sich

als Gradient eines Potentials $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ schreiben läßt

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (12.5)$$

Man beachte, daß es ein Potential (die gesamte potentielle Energie) für das Gesamtsystem aus N Massenpunkten gibt (vgl. früher). Gegeben eine Wahl verallgemeinerter Koordinaten q_1, \dots, q_s , so führt man zugehörige *verallgemeinerte Geschwindigkeiten* ein. Man bezeichnet sie mit

$$\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s \quad (12.6)$$

Für physikalisch mögliche Bewegungen $t \rightarrow q(t)$ ist

$$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(t) \quad (12.7)$$

Die Lagrangefunktion ist eine Funktion

$$L(q, \dot{q}) = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) \quad (12.8)$$

der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Man setzt

$$L = T - V \quad (12.9)$$

T = kinetische Energie, V = potentielle Energie der *Nicht-Zwangskräfte*. Daher sind T, V als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse zu betrachten.

$$V(q) = V(\mathbf{r}_1(q), \dots, \mathbf{r}_N(q)) \quad (12.10)$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2(q, \dot{q}) \quad (12.11)$$

Die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_i$ sind als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten aufzufassen, vermöge

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{a=1}^s \dot{q}_a \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_a} \quad (12.12)$$

Für physikalisch mögliche Bewegungen gilt dann

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(q_1(t), \dots, q_s(t)) = \sum_{a=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_a} \frac{dq_a}{dt} = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_a} = \dot{\mathbf{r}}_i \quad (12.13)$$

wie es sein soll.

12.2.1 Beispiel 1: Lagrange-Funktion für einen Massenpunkt der Masse m , ohne Zwangsbedingungen im Zentralpotential $V(r)$

In Polarkoordinaten folgt aus

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (12.14)$$

daß

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \sin \theta \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (12.15)$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung der Formel $\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi = 1$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)) = T(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad (12.16)$$

Dieser Ausdruck wird häufig gebraucht und sollte im Gedächtnis bleiben.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)) - V(r) \quad (12.17)$$

12.2.2 Beispiel 2: Freie Bewegung eines Massenpunktes auf der Kugelschale mit Radius R

Die kartesischen Koordinaten als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten erhält man, indem man in Polarkoordinaten $r = R$ substituiert. Dann ist $\dot{r} = 0$ und die obige Rechnung liefert.

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (12.18)$$

Falls $V = 0$, ist $L = T$.

12.2.3 Beispiel 3: Zweikörperproblem

Potential $V_{12}(r) = V_{21}(r) = V(r)$, $r = |\mathbf{r}|$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 \quad (12.19)$$

Verallgemeinerte Koordinaten: \mathbf{R} Schwerpunkts-, \mathbf{r} Relativkoordinate. Einsetzen der bekannten Ausdrücke für \mathbf{r}_i durch \mathbf{R} und \mathbf{r} liefert zunächst

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{\mu}{m_1}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{\mu}{m_2}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}^2 + \mu\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_1}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}^2 - \mu\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \end{aligned} \quad (12.20)$$

Dabei ist $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse, und μ die reduzierte Masse. Es wurde benutzt, daß nach Definition

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu} \quad (12.21)$$

Die Lagrangefunktion wird

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \quad (12.22)$$

12.2.4 Beispiel 4: Elektrisch geladener Massenpunkt in einem äußeren elektromagnetischen Feld

Vorbereitung: Potential eines elektromagnetischen Felds

(vgl. Elektrodynamik)

Physikalisch mögliche elektromagnetische Felder müssen - unabhängig davon, wie die Ladungsverteilung aussieht, die sie erzeugt - den homogenen Maxwell'schen Gleichungen genügen. Im Gauß'schen Maßsystem

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (12.24)$$

Nach einem Satz der Vektoranalysis folgt aus der Gültigkeit von Gl.(12.23) (in einem zusammenziehbaren Raum, z.B. im ganzen Raum \mathbf{R}^3), daß eine Vektorfunktion $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ existiert, derart daß

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (12.25)$$

Gl. (12.24) nimmt dann die Form an

$$\nabla \times (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}) = 0 . \quad (12.26)$$

Nach einem Satz der Vektoranalysis ¹ existiert dann eine reelle Funktion $\Phi(\mathbf{r}, t)$, sodaß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) . \quad (12.27)$$

Die Lorentzkraft

Auf einen Massenpunkt der elektrischen Ladung e wirkt in einem elektromagnetischen Feld die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = e [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] , \quad (12.28)$$

wenn sich der Massenpunkt zur Zeit t bei \mathbf{r} aufhält und die Geschwindigkeit \mathbf{v} hat. Drücken wir das elektromagnetische Feld durch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} aus, so wird daraus

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \right] . \quad (12.29)$$

12.3 Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

Für beliebige Wahl verallgemeinerter Koordinaten sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen durch die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen zu ersetzen. Wie weiter unten gezeigt wird, folgen sie aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen für Ortsvektoren, angenommen die Kräfte besitzen ein Potential. Das Gleiche gilt, wie wir später sehen werden, auch noch im Beisein der Lorentzkraft für elektrisch geladene Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Die Euler-Lagrange Gleichungen können aufgestellt werden, wenn die Lagrangefunktion bekannt ist. Sie sind ein System von s Differentialgleichungen für s Funktionen

$$q_1(t), \dots, q_s(t) \quad (12.30)$$

¹Die beiden genannten Sätze sind Spezialfälle der folgenden mathematischen Aussage: Erfüllt eine n -Form ω auf einem zusammenziehbaren Gebiet $d\omega = 0$, so gibt es dort eine $(n-1)$ -Form α , derart daß $\omega = d\alpha$.

Siehe Flanders: Differential Forms...

der Zeit. Sie lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_a} \quad a = 1 \dots s \quad (12.31)$$

Um die Bewegungsgleichungen aufzustellen, muß man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ und $\frac{\partial L}{\partial q_a}$ *ausrechnen*. Man nennt

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \quad (12.32)$$

‘zu q_a verallgemeinerten Impuls’. p_a sind Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten und verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Die Euler-Lagrange Gleichungen sind äquivalent zu

$$\dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial q_a} \quad (\text{verallgemeinerte Kräfte}) \quad (12.33)$$

Notation: Den zu einer verallgemeinerten Koordinate ϕ konjugierte Impuls bezeichnet man mit p_ϕ , usw.

12.3.1 Beispiel 1: Bewegung eines Massenpunktes im Zentralpotential (Kepler-Problem)

$$L = L(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)) - V(r) \quad (12.34)$$

Daraus ergeben sich die verallgemeinerten Impulse als

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned} \quad (12.35)$$

Durch Vergleich mit der z-Komponente des Drehimpulses

$$L_z = m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (12.36)$$

erkennt man, daß p_ϕ die z-Komponente des Drehimpulses ist.

$$p_\phi = L_z \quad (12.37)$$

Die verallgemeinerten Kräfte ergeben sich, da V nur von r abhängt, als

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} = mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \quad (12.38)$$

Die Bewegungsgleichungen nehmen die Form an

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) &= 0 \end{aligned} \quad (12.39)$$

Bewegung in der xy-Ebene ist mit den Bewegungsgleichungen verträglich. Dies sieht man daran, daß eine der Gleichungen durch den Ansatz $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$ identisch gelöst wird. Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich in diesem Fall zu

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (12.40)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \quad (12.41)$$

Die letzte Gleichung ist die Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses. Aus ihr folgt

$$mr^2\dot{\phi} = l = \text{const} \quad (12.42)$$

Somit

$$mr^2\dot{\phi}^2 = mr^2 \frac{l^2}{m^2 r^4} = \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{l^2}{2mr^2} \quad (12.43)$$

Führt man das von l abhängige verallgemeinerte Potential

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (12.44)$$

ein, so vereinfacht sich die erste Gleichung zu

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}(r)}{\partial r} \quad (12.45)$$

Dies sieht formal wie die Gleichung für die 1-dimensionale Bewegung aus.

12.3.2 Beispiel 2: Elektrisch geladener Massenpunkt im elektromagnetischen Feld

Bewegungsgleichungen

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = e\left[-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))\right]. \quad (12.46)$$

Vergleichen wir dies mit den Euler-Lagrange Gleichungen zu einer Lagrange-Funktion mit geschwindigkeitsabhängigem Potential

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \quad (12.47)$$

Im Unterschied zum bisher ausschließlich behandelten Fall darf U hier auch von der Geschwindigkeit \mathbf{v} abhängen. Als verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2, q_3 wählen wir hier kartesische Koordinaten $(x, y, z) = \mathbf{r}$. Die Euler-Lagrange Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ nehmen dann die Form an

$$\frac{d}{dt}m\mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (12.48)$$

Dabei ist $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ und $\nabla_{\mathbf{v}}$ ist der aus den Ableitungen nach den Komponenten von \mathbf{v} gebildete Vektor $(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z})$.

Durch Vergleich mit Gl.(12.46) sehen wir, daß die Newtonschen Bewegungsgleichungen (12.46) die Form der Euler-Lagrange Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

annehmen (mit L wie in Gl.(12.47)), wenn es gelingt ein solches U zu finden, daß

$$\begin{aligned} F &= e \left[-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \right] \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) . \end{aligned} \quad (12.49)$$

Um die erste Zeile in die gewünschte Form zu bringen, formen wir den letzten Term um. Nach den Regeln der Vektoranalysis gilt für eine vektorwertige Funktion \mathbf{A} und konstanten Vektor \mathbf{v}

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} . \quad (12.50)$$

Nun ist aber nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} &= \dot{x}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}(x, y, z, t) + \dot{y}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}(x, y, z, t) + \dot{z}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}(x, y, z, t) \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt}(x, y, z, t) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(x, y, z, t) . \end{aligned} \quad (12.51)$$

(Die totale zeitliche Ableitung $\frac{d}{dt}$ ist in der Mechanik immer so zu verstehen, daß zu ihrer Berechnung \mathbf{r} (d.h. x, y, z) als Funktion von t aufgefaßt werden muß.)

Da \mathbf{A} nur von \mathbf{r}, t aber nicht von \mathbf{v} abhängt, kann man weiter umformen.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) . \quad (12.52)$$

Zur Übung rechne man dies komponentenweise nach!

Setzt man Gl.(12.52) in (12.51), (12.51) in (12.50) und (12.50) in (12.49) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e \left[-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \right] . \end{aligned} \quad (12.53)$$

Nach Kürzen von $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ sehen wir, daß \mathbf{F} die Form der unteren Zeile von Gl.(12.49) hat mit

$$U = e[\Phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] . \quad (12.54)$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen werden also durch die folgende Wahl der Lagrangefunktion reproduziert.

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e[\Phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \quad (12.55)$$

Der *kanonische Impuls* \mathbf{p} ist definiert durch $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Es ergibt sich der bemerkenswerte Ausdruck

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) . \quad (12.56)$$

Die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ ist beobachtbar, daher eichinvariant. Daraus folgt, dass auch die Grösse

$$\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

eichinvariant ist, nicht jedoch der kanonische Impuls \mathbf{p} selbst.

Anwendungsbeispiel

Ein Massenpunkt der Ladung e in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, b)$, $\mathbf{E} = 0$.

Zunächst finden wir ein Vektorpotential \mathbf{A} hierzu. Es muß gelten

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = b \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 . \end{aligned} \quad (12.57)$$

Dies ist erfüllt, wenn

$$\mathbf{A} = \frac{b}{2}(-y, x, 0) = \frac{b}{2}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \quad (12.58)$$

gesetzt wird. \mathbf{e}_z ist der Einheitsvektor in z -Richtung. Dieser Ausdruck für \mathbf{A} ist nicht explizit t -abhängig, also $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$. Also ist $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ erfüllt, wenn wir $\Phi = 0$ setzen. Die Lagrangefunktion L hat daher die Form

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{eb}{2}\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eb}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) . \end{aligned} \quad (12.59)$$

Ein großer Vorteil des Lagrange-Formalismus ist, daß man leicht auf andere Koordinaten umrechnen kann. Hier sind wegen der Rotationssymmetrie des Problems um die z -Achse, Zylinderkoordinaten besonders günstig. Als verallgemeinerte Koordinaten nehmen wir also ρ, θ, z

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z. \quad (12.60)$$

Daraus ergibt sich $\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta$ u.s.w., und $x\dot{y} - \dot{x}y = \rho^2 \dot{\theta}$. Die kinetische Energie in Zylinderkoordinaten wurde in den Übungen berechnet. Insgesamt ergibt sich

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eb}{2}\rho^2 \dot{\theta}. \quad (12.61)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho} & \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho \dot{\theta}^2 + eb\rho \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m\rho^2 \dot{\theta} + \frac{eb}{2}\rho^2 & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} & \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (12.62)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten also

$$\frac{d}{dt}m\dot{\rho} - m\rho \dot{\theta}^2 - eb\rho \dot{\theta} = 0 \quad (12.63)$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\rho^2 \dot{\theta} + \frac{eb}{2}\rho^2\right] = 0 \quad (12.64)$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{z} = 0. \quad (12.65)$$

Eine spezielle Lösung ist: $\rho = \text{const} = \rho_0$ (beliebig), $\dot{\theta} = -\frac{eb}{m} = \text{const}$, $\dot{z} = \text{const}$.

Dies ist eine Spiralbewegung um die z -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$.

Allgemeine Lösung: Wegen der Translationsinvarianz ist die Spiralbewegung um jede Achse in z -Richtung mit beliebigem Durchstoßpunkt x^0, y^0 der Achse durch die xy -Ebene ebenfalls eine Lösung. Dies ist die allgemeine Lösung, denn sie hängt von 6 willkürlichen Konstanten ab, nämlich x^0, y^0 (legt die Achse fest), $z(t=0), \dot{z}(t=0), \rho(t=0), \theta(t=0)$ (Anfangsbedingungen). ρ, θ sind auf die Achse bezogene Zylinderkoordinaten.

12.4 Zyklische Koordinaten

Eine Koordinate q_i heißt ‘*zyklische Koordinate*’, falls L von q_i unabhängig ist. Beispielsweise ist die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten für die Bewegung eines Massenpunktes im Zentralpotential von ϕ unabhängig (Beispiel 1). Ist p_ϕ der zu einer zyklischen Koordinate ϕ konjugierte Impuls, so gilt wegen $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$$\frac{d}{dt}p_\phi = 0 \quad (12.66)$$

Zu zyklischen Koordinaten konjugierte Impulse sind also erhalten! Die Erhaltung von $p_\phi = L_z$ im eben genannten Beispiel ist von dieser Art.

12.4.1 Bemerkung

Bei der Bewegung im Zentralpotential sind, wie wir schon wissen nicht nur L_z , sondern auch L_x und L_y erhalten. Die Suche nach zyklischen Koordinaten liefert also nicht sofort alle Erhaltungsgrößen. Dies ist ein Nachteil, dem der Vorteil der Einfachheit gegenübersteht. Wir werden später eine andere Aussage kennenlernen, die es gestattet, Erhaltungssätze aus dem Vorliegen von Symmetrien abzulesen. Kugelsymmetrie führt dabei auf Erhaltung von L_x , L_y und L_z .

Man könnte aber die Erhaltung von L_x und L_y auch durch Suche nach zyklischen Koordinaten erhalten, indem man verschiedene Koordinatensysteme betrachtet. Wählt man Polarkoordinaten bezüglich der x-Achse, so daß ϕ_{neu} der Drehwinkel um die x-Achse ist, so ist L_x konjugiert zur zyklischen Variablen ϕ_{neu} , also erhalten. Ähnlich erhält man die Erhaltung von L_y . Es ist aber *nicht* möglich, Koordinaten so zu wählen, daß alle 3 erhaltenen Größen simultan zu zyklischen Koordinaten konjugierte Impulse sind.

12.4.2 Beispiel: Freie Bewegung eines relativistischen Teilchens

Bei freier Bewegung ist die kinetische Energie bis auf eine Konstante gleich der Energie, und das Potential ist konstant. Eine additive Konstante in L trägt zu den Bewegungsgleichungen nichts bei, und kann daher willkürlich gewählt werden. Die Energie eines relativistischen Teilchens der Masse m

und Geschwindigkeit v ist

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12.67)$$

Die Lagrangefunktion kann angesetzt werden als

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \quad (12.68)$$

Wir sehen, daß x, y, z allesamt zyklische Koordinaten sind. Die zugehörigen Impulse berechnen sich als

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p_y = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p_z = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12.69)$$

$$v^2 \equiv (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (12.70)$$

Dies sind die bekannten Ausdrücke für die Impulskomponenten eines relativistischen Teilchens.

12.5 Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen

Der Massenpunkt der Masse m bewege sich im Potential $V(\mathbf{r})$. Die zugehörige Kraft \mathbf{F} ist

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z), -\frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z), -\frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z) \right) \quad (12.71)$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned} \quad (12.72)$$

12.5.1 Vorübung

Kartesische Koordinaten als verallgemeinerte Koordinaten

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (12.73)$$

Wir wollen verifizieren, daß in diesem Fall die Euler-Lagrange Gleichungen mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen identisch sind. Wir berechnen zunächst die zu x, y, z konjugierten Impulse.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (12.74)$$

und die verallgemeinerten Kräfte

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \text{u.s.w.} \quad (12.75)$$

12.5.2 Beliebige Koordinaten q

Wir betrachten zunächst einen Massenpunkt mit dessen Position durch verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2, q_3 beschrieben wird. Es ist $x = x(q_1, q_2, q_3)$ u.s.w.. Wir multiplizieren Gl (12.73) der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$ und addieren. So erhalten wir für jedes $i = 1, 2, 3$ eine neue Gleichung

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = Q_i \quad (12.76)$$

mit

$$Q_i \equiv -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) \quad (12.77)$$

Wir formen beide Seiten der Gleichung um. Wir erinnern uns an den Ausdruck für Geschwindigkeitskomponenten, ausgedrückt durch verallgemeinerte Koordinaten und verallgemeinerte Geschwindigkeiten.

$$\dot{x}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial x}{\partial q_3} \quad \text{u.s.w.} \quad (12.78)$$

Betrachten wir \dot{x} als Funktion der q_i und \dot{q}_i , so können wir partielle Ableitungen bilden. Da $\frac{\partial x}{\partial q_i}$ eine Funktion der q_k alleine ist, verschwinden seine Ableitungen nach \dot{q}_k . Also erhalten wir als erste Identität.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \quad (12.79)$$

Die zweite Identität lautet

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_k} \quad (12.80)$$

vorausgesetzt $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Dies sieht man wie folgt.

Aus Gl.(12.78) lesen wir ab, dass

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} . \quad (12.81)$$

Andererseits ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_k} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_i} . \quad (12.82)$$

Beide Seiten sind also gleich. Entsprechende Identitäten gelten für y, z .

Mit Hilfe der beider Identitäten können wir nun Gl (12.76) umformen.

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dots) &= m\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i}\right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dots\right) \\ &= m \frac{d}{dt} \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} - m \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \dots \end{aligned} \quad (12.83)$$

Dabei stehen ‘...’ für die entsprechenden Terme mit y und z statt x .

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right) \quad (12.84)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (12.85)$$

Als nächstes betrachten wir Q_i . Behauptung

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (12.86)$$

In der Tat ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial q_i} V(x(q), y(q), z(q)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} = -Q_i \quad (12.87)$$

Die Gleichungen (12.76) lassen sich also auch schreiben als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (12.88)$$

Da $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) = \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) \quad (12.89)$$

Da $L = T - V$, sind dies die Euler-Lagrange Gleichungen.

Bisher haben wir einen Massenpunkt ohne Zwangsbedingungen betrachtet. Die Verallgemeinerung auf mehrere Massenpunkte $i = 1 \dots N$ ist unmittelbar klar.

12.5.3 Berücksichtigung von Zwangsbedingungen

Haben wir Zwangsbedingungen, so gehen wir vom d'Alembert'schen Prinzip aus. Da virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$ durch infinitesimale Verschiebungen δq_k der generalisierten Koordinaten erzeugt werden, ist

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k ,$$

für $i = 1 \dots N$. Somit ist nach dem d'Alembert'schen Prinzip

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \nabla_i V) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 ,$$

oder, da die δq_k beliebig sind,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = Q_k \quad (12.90)$$

$$Q_k = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} . \quad (12.91)$$

für $k = 1 \dots s$. Die weitere Umformung verläuft in gleicher Weise wie oben.

12.6 Symmetrien und Erhaltungssätze, Noetherscher Satz

Zum Begriff der Symmetrie Ein Beispiel eines Objekts mit Symmetrie ist eine Kugel. Ihr Mittelpunkt liege im Koordinatenursprung. Man sagt, sie

sei kugelsymmetrisch. Dies bedeutet, daß die Kugel - betrachtet als Menge der Punkte mit $|\mathbf{r}| \leq \rho$ (ρ =Radius) - unter Drehungen in sich übergeht. Die Drehung bezeichnet man als *Symmetrietransformation*

Wir betrachten nun infinitesimale Transformationen $q \rightarrow q'$ eines Satzes verallgemeinerter Koordinaten. Sie sind von der Form

$$q_k \rightarrow q'_k = q_k + \epsilon f_k(q_1, \dots, q_s), \quad (12.92)$$

wo ϵ ein infinitesimaler Parameter ist. Die Transformation soll nicht explizit zeitabhängig sein. Denken wir uns die Koordinaten als Funktion der Zeit $q_k(t)$, so ergibt sich aus Gl (12.92) für die Geschwindigkeiten

$$\dot{q}'_k = \dot{q}_k + \epsilon \frac{d}{dt} f_k(q_1(t), \dots, q_s(t)) \quad (12.93)$$

$$= \dot{q}_k + \epsilon \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} f_k(q_1, \dots, q_s) \quad (12.94)$$

Die Gleichungen (12.92, 12.93, 12.94) geben die neuen Koordinaten und Geschwindigkeiten als Funktionen der alten Koordinaten und Geschwindigkeiten. In schlampiger Physiker-Notation:

$$q'_k = q'_k(q) \quad \dot{q}'_k = \dot{q}'_k(q, \dot{q}) \quad (12.95)$$

Betrachte nun eine Lagrangefunktion L von s verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Da q'_k und \dot{q}'_k Funktionen der q_k und \dot{q}_k sind, können wir die Lagrangefunktion (Notation: Ich schreibe hier $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ statt $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$)

$$L(q'_k, \dot{q}'_k, t) \equiv L(q'_k(q), \dot{q}'_k(q, \dot{q}), t) = L_1(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (12.96)$$

als eine Funktion der q_k und \dot{q}_k betrachten. Im allgemeinen ist L_1 eine von L verschiedene Funktion von $2s$ Variablen.

12.6.1 Beispiel: Massenpunkt im Schwerfeld

$s = 1$

$$L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - mgx' \quad (12.97)$$

$$\text{Transformation} \quad x' = x + \epsilon \quad (12.98)$$

somit

$$\dot{x}' = \dot{x} \quad (12.99)$$

Also

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg(x + \epsilon) = L_1(x, \dot{x}) \quad (12.100)$$

Wir sehen, daß die Funktion $L_1(x, \dot{x})$ sich von $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$ nur um einen konstanten Betrag $-mg\epsilon$ unterscheidet.

Die Transformation (12.92) heißt eine *Symmetrie* der Lagrangefunktion, wenn L_1 die gleiche Funktion von $2s$ Variablen wie L ist, d.h. wenn

$$L(q'_k(q), \dot{q}'_k(q, \dot{q}), t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (12.101)$$

Man sagt auch, L sei *invariant* unter der Transformation. Der **Noethersche Satz** besagt, daß aus jeder Symmetrie der Form (12.92) ein Erhaltungssatz folgt. Die erhaltene Größe ist

$$I(t) = \sum_{j=1}^s p_k(t) f_k(q(t)) \quad \frac{dI}{dt} = 0 \quad (12.102)$$

Dabei ist p_k der zu q_k konjugierte Impuls.

Beweis Setzen wir die Ausdrücke (12.92, 12.93) für q' und \dot{q}' in Gl (12.101) ein, so haben wir

$$L(q_k + \epsilon f_k(q), \dot{q}_k + \epsilon \frac{d}{dt} f_k(q), t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (12.103)$$

Durch Taylor-Entwicklung in ϵ bis zum Term 1-ter Ordnung

$$\text{linke Seite} = L(q_k, \dot{q}_k) + \epsilon \sum_j \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{df_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_j} f_j \right\} \quad (12.104)$$

Nun ist aber nach der Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (12.105)$$

Also

$$\begin{aligned}
 0 = \text{linke Seite} - \text{rechte Seite} &= \epsilon \sum_j \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{df_j}{dt} + f_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right\} \\
 &= \epsilon \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} f_j \\
 &= \epsilon \frac{d}{dt} I \qquad (12.106)
 \end{aligned}$$

da nach Definition des kanonischen Impulses $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ ist. q.e.d.

Bemerkung Man kann infinitesimale Transformationen nacheinander immer wieder ausführen und erhält damit eine 1-Parametergruppe von Transformationen. Beispielsweise kann man sich eine Drehung um den Winkel ϕ um eine bestimmte Drehachse aus genügend vielen Drehungen um einen beliebig kleinen Winkel $\delta\phi$ zusammengesetzt denken. Der Noethersche Satz liefert also Erhaltungssätze zu 1-Parameter Familien von Symmetrietransformationen, also für *kontinuierliche* Transformationen. Zu diskreten Symmetrien wie z.B. Spiegelungen, die man nicht aus infinitesimalen Transformationen zusammensetzen kann, gibt es *keine* Erhaltungsgrößen.

Es gibt verschiedene 1-Parametergruppen von Drehungen: solche um die x-Achse, um die y-Achse und um die z-Achse. Dazu gehören 3 Erhaltungsgrößen, falls L unter Drehungen invariant ist. Ebenso gibt es drei verschiedene 1-Parametergruppen von Translationen: solche in x-Richtung, in y-Richtung und in z-Richtung. Wir werden sehen, daß im Fall der Invarianz der Lagrangefunktion unter Translationen daraus 3 Erhaltungsgrößen folgen, nämlich die x-,y- und z-Komponente P_x , P_y , P_z des Gesamtimpulses.

Betrachtet man Translationen in eine beliebige Richtung, so erhält man als Erhaltungsgröße eine Linearkombination von P_x , P_y , P_z , also nichts wesentlich Neues.

12.6.2 Zyklische Variablen als Beispiel

Angenommen, q_1 ist eine zyklische Variable der Lagrangefunktion L , so hängt nach Definition L von q_1 nicht ab. Daher ist

$$q_1 \rightarrow q'_1 = q_1 + \epsilon \qquad \dot{q}'_1 = \dot{q}_1 \qquad (12.107)$$

$$q_k \rightarrow q'_k = q_k \quad (k = 2, \dots, s) \qquad \dot{q}'_k = \dot{q}_k \qquad (12.108)$$

eine Symmetrie von L . Durch Vergleich mit Gl (12.92) sieht man, daß $f_1 = 1$, $f_k = 0$ für $k = 2, \dots, s$. Also ist die erhaltene Größe

$$I = \sum_j p_j f_j = p_1 \quad (12.109)$$

der zu q_1 konjugierte Impuls.

12.6.3 Homogenität des Raums gibt Impulserhaltung

Homogenität des Raums bedeutet, daß die physikalischen Gesetze überall im Raum dieselben sind. Anders ausgedrückt: die Lagrangefunktion der Welt ist invariant unter Translationen. Dies gilt auch noch für die Lagrangefunktion eines Teils der Welt, auf den der Rest der Welt keinen Einfluß hat. Man nennt das ein abgeschlossenes System. Aus der Homogenität des Raumes folgt Impulserhaltung wie jetzt gezeigt wird. Es ist hier geschickt, die Komponenten eines Ortsvektors mit x^1, x^2, x^3 zu bezeichnen, statt mit x, y, z .

Seien N Teilchen mit Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_k = (x_k^1, x_k^2, x_k^3) \quad (12.110)$$

betrachtet.

Eine Translation um ϵ in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ ist von der Form

$$\begin{aligned} x_k^1 \rightarrow x_k^{1'} &= x_k^1 + \epsilon u^1, \\ x_k^2 \rightarrow x_k^{2'} &= x_k^2 + \epsilon u^2, \\ x_k^3 \rightarrow x_k^{3'} &= x_k^3 + \epsilon u^3, \end{aligned} \quad (12.111)$$

$k = 1, \dots, N$.

Wir numerieren hier die verallgemeinerten Koordinaten $q_a = x_k^\alpha$ durch ein Paar $a = (k, \alpha)$; $k = 1, \dots, N$; $\alpha = 1, 2, 3$. Die zu x_k^α konjugierte Variable ist p_k^α , die α -Komponente des Impulses von Teilchen k . Die Änderungen ϵf_k^α der Koordinaten x_k^α werden natürlich auch durch ein Paar $a = (k, \alpha)$ indiziert. Durch Vergleich mit Gl (12.92) sehen wir, daß

$$f_k^a = u^a, \quad (12.112)$$

unabhängig von k . Daraus ergibt sich die erhaltene Größe

$$I = \sum_{k=1}^N \sum_{a=1}^3 p_k^a u^a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}, \quad (12.113)$$

$$P^a = \sum_k p_k^a \quad (12.114)$$

P^a ist die a -te Komponente des Gesamtimpulses. Nehmen wir $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ so schließen wir, daß die 1.-te Komponente des Gesamtimpulses erhalten ist, und entsprechend für die andern Komponenten.

12.6.4 Isotropie des Raums gibt Drehimpulserhaltung

Isotropie des Raums bedeutet, dass im Raum keine Richtung ausgezeichnet ist. Die Gesetz der Physik müssen deshalb unter Drehungen invariant sein. Dies gilt dann auch für das Wirkungsfunktional eines Systems von miteinander wechselwirkenden Massenpunkten, vorausgesetzt es werden keine äusseren Kräfte eingeführt, die eine Richtung auszeichnen.

Wir nehmen an, dass die Lagrangefunktion unter Drehungen invariant ist. Es wird gezeigt, dass daraus die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses folgt.

Wir werden in diesem Abschnitt der Kürze halber wieder Vektornotation verwenden. Wir betrachten Drehungen um eine durch einen Einheitsvektor \mathbf{n} beschriebene Achse um einen infinitesimalen Drehwinkel $\delta\varphi$. Wir fassen Achse und Drehwinkel zu einem Vektor $\boldsymbol{\varphi}$ zusammen, dessen Richtung die Achse, und dessen Betrag den Drehwinkel angibt,

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{n}\delta\varphi .$$

Eine infinitesimale Drehung des Orts \mathbf{r}_i der Massenpunkte nimmt

$$\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i. \quad (12.115)$$

Wir stellen den Beweis zurück. Setzen wir $\delta\varphi = \epsilon$, so hat das Transformationsgesetz die gewohnte Form,

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \epsilon \mathbf{f}_i , \quad (12.116)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i . \quad (12.117)$$

\mathbf{f}_i könnte von $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)$ abhängen; tatsächlich hängt es nur von \mathbf{r}_i ab.

Aus dem Noether'schen Satz folgt die Erhaltung von

$$I = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{f}_i = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) \quad (12.118)$$

$$= \sum_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) \quad (12.119)$$

$$= \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \quad (12.120)$$

$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ist der Gesamtdrehimpuls. Da $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$ für jedes \mathbf{n} erhalten ist, so ist \mathbf{L} selbst erhalten.

Schliesslich sei die Formel (12.115) für infinitesimale Drehungen demonstriert. Wir können die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems in die Richtung der Drehachse legen. Endliche Drehungen um die Achse um einen Winkel φ haben dann die Form

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad (12.121)$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \quad (12.122)$$

$$z' = z. \quad (12.123)$$

Ist φ infinitesimal klein, so ergibt sich daraus bis zu erster Ordnung in φ ,

$$x' = x - y\varphi, \quad (12.124)$$

$$y' = x\varphi + y, \quad (12.125)$$

$$z' = z, \quad (12.126)$$

In vektorieller Form geschrieben, lautet diese Formel

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \varphi \mathbf{n} \times \mathbf{r},$$

mit Drehachse $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. q.e.d.

12.6.5 Homogenität des Zeit gibt Energieerhaltung

Im allgemeinen ist die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ eines Systems von Massenpunkten eine Funktion der Koordinaten q_k sowie der Geschwindigkeiten \dot{q}_k , und außerdem kann sie auch noch von der Zeit t explizit abhängen.

Homogenität der Zeit verlangt, daß die Lagrangefunktion eines abgeschlossenen Systems nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. $L = L(q, \dot{q})$ und

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (12.127)$$

Diese Aussage ist äquivalent zur Invarianz unter Zeittranslationen,

$$t \mapsto t + \epsilon. \quad (12.128)$$

Es soll daraus der Energieerhaltungssatz abgeleitet werden. Der Noethersche Satz kann so verallgemeinert werden, daß er auch auf dieses Problem angewandt werden kann. Wir kommen aber auf direktem Wege schneller zum Ziel.

Die Energie wird definiert durch

$$E(t) = \sum_k \dot{q}_k(t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(q(t), \dot{q}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t). \quad (12.129)$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$\frac{d}{dt} E = \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{d}{dt} L \quad (12.130)$$

Hierbei wurde die Euler-Lagrange Bewegungsgleichung eingesetzt. Andererseits berechnen wir nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} L = \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial}{\partial t} L \quad (12.131)$$

Somit gilt allgemein

$$\frac{d}{dt} E = - \frac{\partial}{\partial t} L \quad (12.132)$$

Daher ist die Energie erhalten, wenn die Bedingung (12.127) erfüllt ist.

12.7 Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Bezugssystem

Da die Erde rotiert, ist ein relativ zur Erdoberfläche ruhendes Koordinatensystem kein Inertialsystem. Es stellt sich deshalb die Frage nach Bewegungsgleichungen in rotierenden Bezugssystemen.

Wir betrachten einen Massenpunkt mit Ortsvektor \mathbf{r} relativ zu einem Inertialsystem. Die Lagrangefunktion sei

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}).$$

Das rotierende Bezugssystem rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\Omega(t)$ um die z -Achse. Der Ortsvektor relativ zum rotierenden Bezugssystem sei \mathbf{r}' .

Die beiden Koordinatensysteme sind durch

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \phi - y' \sin \phi, \\y &= x' \sin \phi + y' \cos \phi, \\z &= z'\end{aligned}\tag{12.133}$$

verknüpft. Dabei ist $\phi(t)$ der Drehwinkel zur Zeit t , sodaß

$$\Omega(t) = \dot{\phi}(t).$$

Wir betrachten x' , y' , z' als verallgemeinerte Koordinaten, und rechnen die Lagrangefunktion auf diese neuen Koordinaten um. Die alten Geschwindigkeiten ergeben sich als

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}' \cos \phi - x' \dot{\phi} \sin \phi - \dot{y}' \sin \phi - y' \dot{\phi} \cos \phi, \\ \dot{y} &= \dot{x}' \sin \phi + x' \dot{\phi} \cos \phi + \dot{y}' \cos \phi - y' \dot{\phi} \sin \phi, \\ \dot{z} &= \dot{z}'\end{aligned}$$

Quadriert man dies und addiert, so kürzen sich einige Terme heraus, und andere lassen sich mit Hilfe der Identität $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ zusammenfassen. Wir benutzen die Notation $\boldsymbol{\Omega}$ für den Vektor in z -Richtung (Drehachse \mathbf{e}_z) mit Betrag $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z = (0, 0, \Omega)$$

Als Resultat ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= (\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2 + (x'^2 + y'^2)\dot{\phi}^2 - 2\dot{x}'y'\dot{\phi} + 2x'y'\dot{\phi} \\ &= (\dot{\mathbf{r}}')^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2 + 2\dot{\mathbf{r}}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}').\end{aligned}\tag{12.134}$$

Wir bezeichnen das Potential als Funktion der neuen Koordinaten mit V' ,

$$V'(\mathbf{r}', t) = V(\mathbf{r}).$$

Die Lagrangefunktion als Funktion der neuen Koordinaten und Geschwindigkeiten wird damit

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \left[\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 + (x'^2 + y'^2)\Omega^2 + (2x'y' - 2\dot{x}'y')\Omega \right] - V'(\mathbf{r}', t) \\ &= \frac{1}{2} m \left[\dot{\mathbf{r}}'^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2 + 2\dot{\mathbf{r}}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \right] - V'(\mathbf{r}', t).\end{aligned}\tag{12.135}$$

Hier und im folgenden benutzen wir die expliziten Ausdrücke

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')_x &= -\dot{\phi}y', \\ (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')_y &= \dot{\phi}x',\end{aligned}\tag{12.136}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')_z &= 0, \\ \dot{\mathbf{r}}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') &= \dot{x}'(-y'\dot{\phi}) + \dot{y}'(x'\dot{\phi}).\end{aligned}\tag{12.137}$$

Wir stellen nun die Euler-Lagrangegleichungen auf,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}.$$

usw.. Berechnen wir die Ableitungen aus Gl.(12.135) so ergibt sich

$$\begin{aligned}m\ddot{x}' &= F_{x'} + 2m\dot{y}'\Omega + mx'\Omega^2 + my'\dot{\Omega}, \\ m\ddot{y}' &= F_{y'} - 2m\dot{x}'\Omega + my'\Omega^2 - mx'\dot{\Omega}, \\ m\ddot{z}' &= F_{z'}.\end{aligned}\tag{12.138}$$

Dabei sind $F_{x'}$ die Komponenten der wahren Kraft

$$\mathbf{F}' = -\nabla' V'(\mathbf{r}', t)$$

bezüglich des rotierenden Bezugssystems; ∇' ist die Ableitung nach \mathbf{r}' . Dieses Resultat läßt sich auch in vektorieller Form schreiben. Es sei $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'$ die Geschwindigkeit bezüglich des rotierenden Bezugssystem. Dann lautet die gesuchte Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' + 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega} + m[\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega})] + m\mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}.\tag{12.139}$$

Der letzte Term verschwindet bei gleichförmiger Rotation $\boldsymbol{\Omega} = \text{const.}$. Um die Äquivalenz zu verifizieren, berechnet man

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega})_x &= \dot{y}'\Omega, \\ (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega})_y &= -\dot{x}'\Omega, \\ (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega})_z &= 0, \\ [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega})] &= \mathbf{r}'\Omega^2 - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) = (x'\Omega^2, y'\Omega^2, 0)\end{aligned}$$

In der Bewegungsgleichung treten neben der sogenannten *wahren Kraft* \mathbf{F}' noch folgende *Scheinkräfte* auf,

Zentrifugalkraft $m[\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega})]$.

Diese hat radiale Richtung in Zylinderkoordinaten (weg von der Drehachse).

Corioliskraft $2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}$.

Diese steht senkrecht sowohl zur Drehachse als auch zur Geschwindigkeit.

Sowohl die Zentrifugalkraft als auch die Corioliskraft liegen also in der $x'y'$ -Ebene, siehe Zeichnung 12.1 in der die Drehachse senkrecht auf der Zeichenebene steht. Da die Richtung der z -Achse im Inertialsystem beliebig ist,

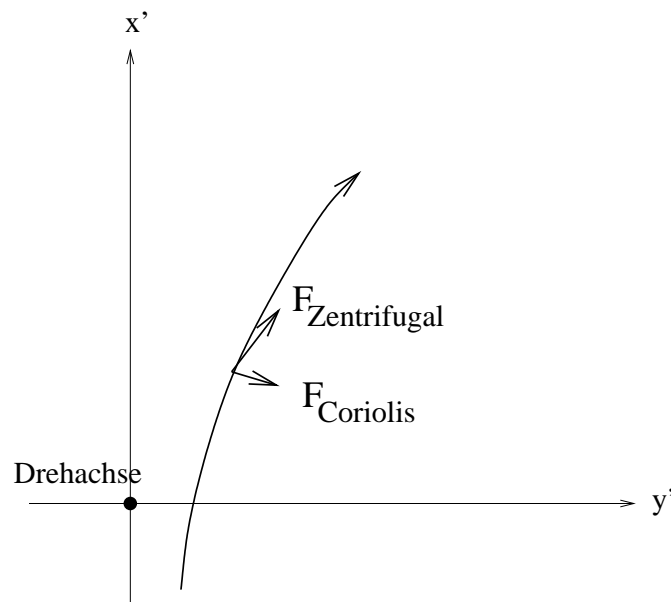


Abbildung 12.1: Zentrifugal- und Corioliskraft bei Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem

gelten die Bewegungsgleichungen in einem beliebigen um eine Achse konstanter Richtung rotierenden Bezugssystem.

12.8 Hamiltonsches Prinzip

Als Alternative zur Charakterisierung der physikalisch möglichen Trajektorien $t \mapsto q(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$ als Lösungen von Differentialgleichungen

kann man sie auch durch ein Extremalprinzip aus einer Klasse von Vergleichstrajektorien auswählen. Die wichtigste Variante eines solchen Extremalprinzips ist das sogenannte *Hamiltonsche Prinzip*.

Zu vorgegebenem Zeitintervall $[t_a, t_e]$ und vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten q_a, q_e ist aus allen Trajektorien

$$q : t \mapsto q(t), \quad t \in [t_a, t_e] \quad (12.140)$$

mit den Eigenschaften

$$q(t_a) = q_a \quad \text{und} \quad q(t_e) = q_e \quad (12.141)$$

die physikalisch mögliche Trajektorie diejenige, die das Wirkungsfunktional extremalisiert,

$$J[q] \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) = \text{Extr}. \quad (12.142)$$

Unter einschränkenden Bedingungen kann man statt eines Extremums ein Minimum verlangen. Dies ist insbesondere immer dann erlaubt, wenn das Zeitintervall kurz genug ist.

Das Argument q von J ist eine Funktion. J ist demnach eine reelle Funktion einer Funktion. Sie weist jeder Funktion q auf dem Intervall $[t_a, t_e]$, die den Randbedingungen (12.141) genügt, eine reelle Zahl zu. Aus historischen Gründen wird eine solche Funktion J , deren Argument selbst eine Funktion ist, oft als Funktional bezeichnet. In der Mathematik ist diese historische Bezeichnung heute nicht mehr gebräuchlich, aber in der physikalischen Literatur ist sie noch häufig anzutreffen.

Extremalprinzipien solcher Art sind auch außerhalb der Physik häufig. Man spricht von einer Kostenfunktion J , wenn sie minimiert werden soll, von einer Nutzenfunktion (engl. *utility function*), wenn sie maximiert werden soll. Ähnlich der analytischen Mechanik (und der Thermodynamik) ist die von Samuelson begründete klassische ökonomische Theorie - die Theorie der *utility function* - eine Theorie, die aus der Gültigkeit eines Extremalprinzips allgemeine Gesetzmäßigkeiten folgert. Die Gültigkeit eines Extremalprinzips ergibt sich dort als definierende Eigenschaft eines Gleichgewichtszustands.

Die Bedingung eines Minimums ist unmittelbar klar. Um zu sagen, was ein Extremum ist, muß man auf den Differentialkalkül zurückgreifen. Eine Funktion eines Arguments hat ein Extremum bei einem bestimmten Wert des Arguments, wenn sie bei infinitesimaler Veränderung dieses Arguments ihren Wert nicht ändert.

Die Änderung des Funktionswerts bei infinitesimaler Veränderung des Arguments ist durch die erste Ableitung gegeben.

Sei f eine Funktion einer reellen Variablen x . Dann hat sie ein Extremum bei \hat{x} wenn

$$\frac{d}{dx}f(x)|_{x=\hat{x}} = 0.$$

Dies verallgemeinert sich auf Funktionen mehrerer Variablen $x = (x_1, \dots, x_s)$ wie folgt. Bei infinitesimaler Änderung von x in i -Richtung - d.h. Änderung von x_i - darf sich der Funktionswert nicht ändern. Dies gilt für alle i . Also muß

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)|_{x=\hat{x}} = 0$$

gelten. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung

$$\frac{d}{d\alpha}f(\hat{x} + \alpha\eta)|_{\alpha=0} = 0 \quad (12.143)$$

für beliebige s -Vektoren $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$. Damit die Forderung Sinn macht, muß $\hat{x} + \alpha\eta$ für genügend kleine α zum Definitionsbereich von f gehören. (In der Praxis ist dies bei endlichem s gewöhnlich automatisch erfüllt). Die Äquivalenz ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{d}{d\alpha}f(\hat{x} + \alpha\eta)|_{\alpha=0} = \sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}f(x)|_{x=\hat{x}}.$$

Die Definition (12.143) ist auch für Funktionale brauchbar und kann beim Hamiltonschen Prinzip angewandt werden. Erfüllt \hat{q} die Randbedingungen (12.141), so sind Vergleichstrajektorien im Definitionsbereich von J von der Form

$$\begin{aligned} t \mapsto q(t) &= \hat{q}(t) + \alpha\eta(t), \\ \eta(t_a) &= 0 = \eta(t_e) \end{aligned} \quad (12.144)$$

Die Randbedingungen (12.144) sorgen dafür, daß auch für $\alpha \neq 0$ die Randbedingungen (12.141) erfüllt bleiben.

Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip

Das Hamiltonsche Prinzip verlangt nach den eben gegebenen Erläuterungen

$$0 = \frac{d}{d\alpha} J[q + \alpha\eta]_{\alpha=0} \equiv \frac{d}{d\alpha} \left[\int_{t_a}^{t_e} dt L(q(t) + \alpha\eta(t), \dot{q}(t) + \alpha\dot{\eta}(t), t) \right]_{\alpha=0} \quad (12.145)$$

für beliebige Funktionen η , die den Randbedingungen (12.144) genügen.

Wir betrachten zunächst der Einfachheit halber den Fall $s = 1$, sodaß q eine reelle Funktion ist. Die Ableitung kann unter das Integral gezogen und dann mit Hilfe der Kettenregel ausgewertet werden.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} J[q + \alpha\eta]_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\eta(t) \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) + \dot{\eta}(t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right]. \end{aligned}$$

Der zweite Term kann in t partiell integriert werden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} J[q + \alpha\eta]_{\alpha=0} \\ &= \left[\eta(t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right]_{t_a}^{t_e} \\ &\quad + \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right] \eta(t). \quad (12.146) \end{aligned}$$

Die Beiträge von den Randtermen verschwinden wegen der Randbedingungen (12.144). Das verbleibende Integral kann nur dann für beliebige Funktionen η verschwinden, wenn im gesamten offenen Intervall $t_a < t < t_e$ der Koeffizient von $\eta(t)$ verschwindet. Dies sieht man, indem man sich vorstellt, daß η nur in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punkts t im Inneren des Intervalls nichtverschwindend sei. Somit muß gelten, daß

$$\frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \quad (12.147)$$

Dies sind die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen für einen Freiheitsgrad.

Im Fall mehrerer Freiheitsgrade ergibt die Anwendung der Kettenregel gefolgt von partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} J[q + \alpha\eta]_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\frac{\partial}{\partial q_i} L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right] \eta_i(t) \end{aligned} \quad (12.148)$$

Daraus ergeben sich die Euler-Lagrange Gleichungen für s Freiheitsgrade.

Kapitel 13

Kanonischer Formalismus

13.1 Hamiltonfunktion und kanonische Gleichungen

Wir betrachten ein mechanisches System mit s verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_s)$ und mit Lagrangefunktion

$$L(\dot{q}, q, t) \equiv L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, q_1, \dots, q_s, t).$$

Definiert man die kanonischen Impulse p_k , $k = 1, \dots, s$ als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten durch

$$p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(\dot{q}, q, t), \quad (13.1)$$

so können die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{p}_k = \frac{\partial}{\partial q_k} L(\dot{q}, q, t), \quad (13.2)$$

geschrieben werden. Sie bestimmen die Zeitentwicklung des Zustands, wenn der Anfangszustand gegeben ist. Im Lagrangeformalismus wird der Anfangszustand durch Angabe der Koordinaten q_k und Geschwindigkeiten \dot{q}_k festgelegt.

Im kanonischen Formalismus wird ein Zustand hingegen durch Angabe der Koordinaten q_k und Impulse p_k beschrieben. Dies ist äquivalent, wenn man die Gleichung (13.1) invertieren kann, um die Geschwindigkeiten als Funktion der Impulse und Koordinaten zu bestimmen.

Bemerkung: In der Mechanik ist die Invertierbarkeit stets gegeben, wie wir gleich sehen werden. Jedoch hat die Lagrangefunktion für elektromagnetische Felder nicht diese Eigenschaft, und ebensowenig gilt sie die Lagrangefunktion für die Eichtheorien der Elementarteilchenphysik oder die Lagrangefunktion für die Allgemeine Relativitätstheorie. Dies hat wichtige Konsequenzen. Es ergibt sich, dass der Anfangszustand (p, q) dann nicht, wie in der Mechanik, beliebig sein kann, sondern Nebenbedingungen genügen muss (engl. *constraints*). Das Gauss'sche Gesetz der Elektrodynamik ist eine solche Nebenbedingung, wobei das elektrische Feld \mathbf{E} bei \mathbf{r} die Rolle eines Impulses p_k spielt.

Gewöhnlich ist die Lagrangefunktion eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten, sodaß die Gleichung (13.1) von der folgenden Form ist,

$$p_k = \sum_j \mu_{kj}(q) \dot{q}_j + \nu_k(q), \quad (13.3)$$

und die Matrix $\mu(q)$ ist in der Mechanik für alle Werte der Koordinaten q positiv definit, so daß sie ein Inverses $\mu^{-1}(q)$ besitzt. Es folgt, dass

$$\dot{q}_k = \sum_j (\mu^{-1})_{kj}(q) [p_j - \nu_j(q)]. \quad (13.4)$$

Man definiert die *Hamiltonfunktion*

$$H(p, q, t) = H(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, t) \quad (13.5)$$

als Funktion der Koordinaten und Impulse durch folgende Formel

$$H(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, t) = \sum_{k=1}^s p_k \dot{q}_k - L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, q_1, \dots, q_s, t). \quad (13.6)$$

Dabei sind auf der rechten Seite die Geschwindigkeiten als Funktionen der Impulse und Koordinaten eingesetzt zu denken, sodaß das Resultat nur eine Funktion der Koordinaten und Impulse und möglicherweise der Zeit ist, aber nicht etwa außerdem noch von den Geschwindigkeiten abhängt.

Erinnern wir uns an die Definition der Energie, die im Zuge der Diskussion der Symmetrie unter Zeit-Translationen bei der Behandlung der Noether'schen Sätze gegeben worden war, so sehen wir, daß $H(p, q, t)$ die Energie eines Zustands zur Zeit t mit Impulsen p_1, \dots, p_s und Koordinaten q_1, \dots, q_s

ist. Betrachten wir die Zeitentwicklung, so bestimmen die Koordinaten und Impulse zur Zeit t die Energie $E(t)$ zur Zeit t ,

$$E(t) = H(p(t), q(t), t). \quad (13.7)$$

Außerdem ist nach den Noetherschen Resultaten die Energie E erhalten, falls die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt. In diesem Fall hängt auch die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit ab. Es gilt dann

$$\frac{d}{dt}H(p(t), q(t)) = 0.$$

Wir werden in Gl.(13.9) ein allgemeineres Resultat erhalten.

Mit Hilfe der Hamiltonfunktion kann man die Bewegungsgleichungen als Gleichungen für die Zeitentwicklung der Koordinaten und Impulse umschreiben. Das Resultat lautet

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial}{\partial p_k} H(p, q, t), \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial}{\partial q_k} H(p, q, t), \end{aligned} \quad (13.8)$$

$k = 1, \dots, s$. Außerdem gilt für die Zeitabhängigkeit der Energie

$$\frac{d}{dt}H(p(t), q(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}H(p(t), q(t), t). \quad (13.9)$$

Die Gleichungen (13.8) sind die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*. Sie sind auch als *kanonische Gleichungen* bekannt. Wir werden diese Gleichungen im nächsten Abschnitt mit Hilfe der Methode der Legendretransformation aus den Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen herleiten.

Beispiele

1. Ein Massenpunkt im Potential $V(x, y, z)$.

Wir benutzen die kartesischen Komponenten x, y, z des Ortsvektors \mathbf{r} als verallgemeinerte Koordinaten. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

Die verallgemeinerten Impulse p_x, p_y, p_z ergeben sich als

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

usw. Wir fassen die Impulse zu einem Vektor $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ zusammen, sodaß $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Aufgelöst ,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L \\ &= \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Also schließlich nach Einsetzen von \mathbf{p} ,

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (13.10)$$

Dies ist der bekannte Ausdruck für die Energie.

Die Aufstellung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen liefert

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial p_x} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{p_x}{m}, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial}{\partial x} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

usw. In vektorieller Form,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad (13.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (13.12)$$

2. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wir benutzen kartesische Koordinaten x, y, z als verallgemeinerte Koordinaten wie zuvor. Das Teilchen habe die elektrische Ladung e und Masse m . Sind $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\phi(\mathbf{r}, t)$ das Vektorpotential und skalare Potential des elektromagnetischen Felds, so lautet die Lagrangefunktion

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\phi(\mathbf{r}, t) + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

wie früher gezeigt wurde. Daraus berechnen wir

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Der Impuls hat hier nicht die gewohnte Form $m\dot{\mathbf{r}}$. Aufgelöst,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L \\ &= (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\phi. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Einsetzen des Ausdrucks für die Geschwindigkeit ergibt schließlich

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + e\phi(\mathbf{r}, t). \quad (13.14)$$

13.2 Die Legendre Transformation

Wir betrachten Variablentransformationen. In der Anwendung werden wir von Geschwindigkeiten \dot{q}_i zu Impulsen p_i transformieren. Die Methode ist jedoch von allgemeinem Interesse. Sie wird auch in der Thermodynamik und in der Quantenfeldtheorie extensiv benutzt, mit jeweils anderen Namen der Variablen. Deswegen stellen wir die Methode hier mit Variablennamen vor, die nicht physikalisch vorbelastet sind. Die im folgenden mit a_j bezeichneten Variablen werden die Rolle der Geschwindigkeiten übernehmen, die b_i die Rolle der Impulse. Die Funktionen $a_i(b)$ geben also die Geschwindigkeiten als Funktion der Impulse an. Die Parameter c_α übernehmen den Part der Koordinaten und der Zeit.

Es seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ und $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$. Unter bestimmten Bedingungen bestimmen n Gleichungen der Form

$$f_i(b, a(b)) = 0$$

die n Funktionen $a_i(b)$, ($i = 1, \dots, n$) eindeutig. Eine präzise Aussage dieser Art wird durch das folgende Theorem gegeben.

Implizites Funktionentheorem

Seien $f_i(b, a)$, ($i = 1, \dots, n$) stetig differenzierbare Funktionen von $(b, a) = (b_1 \dots b_n, a_1 \dots a_n)$ in einem Gebiet S . Sei weiter

$$J(b, a) = \det \left(\frac{\partial f_i(b, a)}{\partial a^j} \right)$$

die Funktionaldeterminante.

Angenommen es gilt für einen geeigneten Punkt $(b^{(0)}, a^{(0)})$ in S

$$f_i(b^{(0)}, a^{(0)}) = 0, \text{ für } i = 1, \dots, n, \quad (13.15)$$

$$J(b^{(0)}, a^{(0)}) \neq 0. \quad (13.16)$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktionen

$$a_i(b) = a_i(b_1, \dots, b_n),$$

deren Definitionsbereich eine Umgebung von $b^{(0)}$ enthält, so daß

$$\begin{aligned} f_i(b, a(b)) &= 0, \\ a_i(b^{(0)}) &= a_i^{(0)} \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$.

Wir interessieren uns nun für Fall wo $f_i(b, a)$ von der folgenden speziellen Gestalt ist:

$$f_i(b, a) = b_i - \frac{\partial}{\partial a_i} F(a)$$

$a(b)$ ist die Umkehrfunktion von $b(a)$. Unter den genannten Voraussetzungen hat diese spezielle Eigenschaften.

Satz über die Legendre Transformation. Sei

$$f_i(b, a) \equiv b_i - \frac{\partial}{\partial a_i} F(a) = 0.$$

Dann genügen die hierdurch bestimmten Funktionen $a_i(b)$ der Relation

$$a_i(b) = \frac{\partial}{\partial b_i} H(b), \quad (13.17)$$

wobei

$$H(b) = \sum_{j=1}^n b_j a_j(b) - F(a(b)). \quad (13.18)$$

Falls F , und damit auch H und $a(b)$ noch von weiteren Parametern c_α , ($\alpha = 1, \dots, m$) abhängen, so gilt außerdem die weitere Beziehung

$$\frac{\partial H}{\partial c_\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial c_\alpha}. \quad (13.19)$$

Der Satz leistet nicht etwa eine explizite Auflösung der Gleichung für $a(b)$, denn um $H(b)$ wirklich auszurechnen, muß man $a(b)$ schon kennen. Die Voraussetzung des Satzes bedeutet, daß $b(a)$ der Gradient einer Funktion F von a ist,

$$b_i = \frac{\partial}{\partial a_i} F(a)$$

Der Satz über die Legendre Transformation sagt aus, daß dann auch $a(b)$ Gradient einer Funktion H von b ist.

Beweis: Am elegantesten verläuft der Beweis mit Hilfe des äußeren Differentialkalküls. Man kann die partiellen Ableitungen $\partial f(y_1, \dots, y_N)/\partial y_i$ einer Funktion $f(y_1, \dots, y_N)$ von N reellen Variablen in der sogenannten äußeren Ableitung df von f zusammenfassen,

$$df(y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} f(y_1, \dots, y_N) dy_i.$$

Die dy_i kann man als Basisvektoren eines N -dimensionalen Vektorraums auffassen, in dem $df(y)$ seine Werte annimmt. Die partiellen Ableitungen sind die Koeffizienten bezüglich dieser Basis. Die Produktregel für partielle Ableitungen findet sich als Leibniz Regel für die äußere Ableitung d wieder,

Leibniz Regel für die äußere Ableitung

$$d(f(y)g(y)) = df(y)g(y) + f(y)dg(y). \quad (13.20)$$

Man kann auch für dy_i Zahlenwerte substituieren, dann ist $df(y)$ eine Approximation für die Änderung des Funktionswerts $f(y)$, wenn y_i sich um dy_i ändert. Die Approximation wird im Grenzfall kleiner Änderungen dy_i exakt.

Wir betrachten nun die Funktion F aus dem Satz über die Legendre Transformation. Wir lassen eine Abhängigkeit von Parametern c_α zu, sodaß F eine Funktion von a und c ist. Somit ist

$$dF(a, c) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial a_j} F(a, c) da_j + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial c_\alpha} F(a, c) dc_\alpha \quad (13.21)$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
 dH &= d\left(\sum_j b_j a_j - F\right) \\
 &= \sum_j (db_j a_j + b_j da_j) - dF \\
 &= \sum_j (db_j a_j + \left[b_j - \frac{\partial}{\partial a_i} F(a, c)\right] da_j) - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha} F(a, c) dc_\alpha \\
 &= \sum_j a_j db_j - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha} F(a, c) dc_\alpha.
 \end{aligned}$$

Daraus können wir die partiellen Ableitungen von H als Koeffizienten der Differentiale db_j und dc_α ablesen. Es ergibt sich das Resultat des Satzes über die Legendre Transformation.

Der Satz kann nun angewandt werden, um die kanonischen Gleichungen herzuleiten. Es sind folgende Übersetzungen einzusetzen.

$$a_i \implies \dot{q}_i$$

$$b_i \implies p_i$$

$$c_\alpha \implies q_i, \text{ sowie ggf. die Zeit } t$$

$$F(a, c) \implies L(\dot{q}, q, t), \quad (13.22)$$

$$H(b, c) \implies H(p, q, t) \quad (13.23)$$

Gl.(13.17) spezialisiert sich damit zu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

und Gl.(13.19) liefert

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (13.24)$$

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen folgen damit aus den Euler Lagrange Bewegungsgleichung $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$.

Die Gleichung für die totale Zeitabhängigkeit erhält man wie folgt,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} H(p(t), q(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t} H(p(t), q(t), t) \\
 &+ \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} H(p(t), q(t), t) \dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial q_i} H(p(t), q(t), t) \dot{q}_i \right).
 \end{aligned}$$

Setzt man \dot{p}_i und \dot{q}_i aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ein, so kürzen sich die Terme in der Summe heraus, und es bleibt nur der erste Term.

13.3 Phasenraum

Man fasst $(p, q) = (p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s)$ als einen Punkt in einem $2s$ -dimensionalen Raum auf, dem sogenannten *Phasenraum*.

Anfangsbedingungen $(p(t = t_0) = p^{(0)}, q(t = t_0) = q^{(0)})$ bestimmen einen Punkt im Phasenraum. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen legen fest, wie sich dieser Punkt im Laufe der Zeit längs einer *Trajektorie im Phasenraum* bewegt. Betrachten wir einen sehr kleinen Zeitschritt Δt , so wird

$$\begin{aligned} p_i(t_0 + \Delta t) &= p_i(t_0) + \dot{p}_i(t_0)\Delta t, \\ q_i(t_0 + \Delta t) &= q_i(t_0) + \dot{q}_i(t_0)\Delta t. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Da man mit Hilfe der Hamiltonschen Gleichungen $\dot{p}_i(t_0)$ und $\dot{q}_i(t_0)$ berechnen kann, wenn man $p(t_0)$ und $q(t_0)$ kennt, so kann man $p_i(t_0 + \Delta t)$ und $q_i(t_0 + \Delta t)$ berechnen. Dieses Verfahren kann man wiederholen, und damit die ganze Trajektorie bestimmen. Man kann zeigen, daß das Verfahren im Grenzfall kleiner Δt exakt wird.

13.4 Äquivalenz der Hamiltonschen Gleichung zu einem Extremalprinzip

Die Hamiltonschen Gleichungen sind zur Gültigkeit eines Extremalprinzips äquivalent, das wie folgt lautet

$$\int_{t_a}^{t_f} dt \left[\sum_{k=1}^s p_k(t) \dot{q}_k(t) - H(p(t), q(t), t) \right] = \text{Extr.} \quad (13.26)$$

Dabei sind als Vergleichstrajektorien solche mit ganz beliebigen $p_k(t)$ zugelassen, während die $q_k(t)$ Randbedingungen wie beim Hamiltonschen Prinzip erfüllen müssen,

$$q_k(t_a) = q_k^a, \quad (13.27)$$

$$q_k(t_f) = q_k^f. \quad (13.28)$$

Es werden nur Trajektorien mit denselben q^a , q^f verglichen. Im Ausdruck (13.26) ist \dot{q}_k als $dq_k(t)/dt$ zu lesen.

Es ist nach Definition von H ,

$$\sum p_k \dot{q}_k - H(p, q, t) = L(q, \dot{q}, t) \quad (13.29)$$

falls $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$, oder äquivalent, falls

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_k}. \quad (13.30)$$

Das Extremalprinzip ähnelt also dem Hamiltonschen Extremalprinzip. Im Vergleich zum Hamiltonschen Prinzip wird jedoch in (13.26) $p(t)$ unabhängig variiert, während beim Hamiltonschen Prinzip p_k durch \dot{q}_k bestimmt ist. Wir können jedoch das obige Extremalprinzip auf das Hamiltonsche zurückführen, indem wir zunächst die Trajektorie $t \mapsto q(t)$ als fest betrachten, und nur $p(t)$ variieren. Das Extremum ist in der Praxis stets ein Minimum, und wird angenommen, wenn Gl.(13.30) gilt. Es ist also

$$L(\dot{q}, q, t) = \min_p \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(p, q, t) \right] \quad (13.31)$$

Damit gilt Gl.(13.29), und die verbleibende Extremierung von $q(t)$ ist identisch mit der Extremierung im Hamiltonschen Prinzip.

Die Formel (13.31) ist zuweilen selbst nützlich. Sie zeigt insbesondere, dass man Legendre-Transformierte (z.B. L von H) auch mittels einer Minimums-Eigenschaft definieren kann.

Es folgt aus dieser Betrachtung, daß das obige Extremalprinzip auch noch gültig ist, wenn wir die Randwerte $p(t_a)$ und $p(t_f)$ festhalten, vorausgesetzt, es gibt eine physikalische Trajektorie mit den vorgegebenen $p(t_a)$, $q(t_a)$ und $p(t_f)$, $q(t_f)$.

13.5 Poisson-Klammern

Betrachte Funktionen $f(p, q, t)$ auf dem $2s$ -dimensionalen Phasenraum, die noch außerdem von der Zeit abhängen können. Man definiert die sogenannten Poisson-Klammer $\{g, f\}$ zweier solcher Funktionen durch

$$\{g, f\} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k}. \quad (13.32)$$

Die Poisson-Klammer hat die folgenden Eigenschaften, die man leicht nachrechnet. Für reelle Zahlen α, β gilt

Linearität $\{\alpha g + \beta h, f\} = \alpha\{g, f\} + \beta\{h, f\},$

Antisymmetrie $\{g, f\} = -\{f, g\},$

Jacobi-Identität $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$

Setzt man die Definitionen ein, so heben sich im Ausdruck auf der linken Seite der Jacobi-Identität die Terme paarweise heraus.

Mit Hilfe der Poisson-Klammern lassen sich Bewegungsgleichungen sehr elegant schreiben. Observable in der kanonischen Formulierung der Mechanik sind Funktionen $f(p, q, t)$ auf dem Phasenraum, die außerdem noch explizit zeitabhängig sein können. Wir berechnen ihre totale Zeitableitung,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}f(p(t), q(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}f(p(t), q(t), t) + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i}f(p(t), q(t), t)\dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial q_i}f(p(t), q(t), t)\dot{q}_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}f(p(t), q(t), t) + \sum_i \left(-\frac{\partial}{\partial p_i}f(p(t), q(t), t)\frac{\partial}{\partial q_i}H(p(t), q(t), t) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_i}f(p(t), q(t), t)\frac{\partial}{\partial p_i}H(p(t), q(t), t) \right) \end{aligned} \quad (13.33)$$

Einsetzen der Definition der Poisson-Klammer liefert das Schlußresultat

$$\frac{d}{dt}f = \frac{\partial}{\partial t}f + \{H, f\}. \quad (13.34)$$

Die Gleichung für die totale Zeitabhängigkeit von H ist ein Spezialfall hiervon, denn wegen der Antisymmetrie ist $\{H, H\} = 0$. Die kanonischen Variablen sind spezielle Observable f . Die Gleichung (13.34) gilt also auch für sie. Durch Einsetzen der Definition der Poisson-Klammer sieht man, daß sich die Gleichung in diesem Fall auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen reduziert.

Wir berechnen schließlich die Poisson-Klammern der kanonischen Variablen. Aus der Definition ergibt sich

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad (13.35)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad (13.36)$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \quad (13.37)$$

Das Kroneckersymbol δ_{ij} ist durch

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1 \text{ falls } i = j, \\ &= 0 \text{ sonst}\end{aligned}\tag{13.38}$$

definiert.

13.6 Kanonische Transformationen

Im Lagrange Formalismus hat man die Möglichkeit, durch eine Variablentransformation

$$(q_1, \dots, q_s) \mapsto (Q_1, \dots, Q_s)$$

im s -dimensionalen Ortsraum die Bewegungsgleichungen in eine möglichst handhabbare Form zu bringen. Wir hatten am Beispiel der Bewegung im Zentralfeld gesehen, daß sich das Problem durch Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten vereinfacht.

Im kanonischen Formalismus wird eine wesentlich größere Klasse von Variablentransformationen betrachtet, die sogenannten *kanonischen Transformationen*. Dies sind Variablentransformationen im $2s$ -dimensionalen Phasenraum. Man führt s neue Koordinaten Q_k und s neue Impulse P_k , ein, die Funktionen der alten Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_s)$ und Impulse $p = (p_1, \dots, p_s)$ sind,

$$P_k = P_k(p, q),\tag{13.39}$$

$$Q_k = Q_k(p, q)\tag{13.40}$$

und umgekehrt.

$$p_k = p_k(P, Q),\tag{13.41}$$

$$q_k = q_k(P, Q).\tag{13.42}$$

Nicht jede Transformation im Phasenraum ist jedoch eine kanonische Transformation. Zusätzlich wird gefordert, daß sie eine *erzeugende Funktion* F auf dem Phasenraum besitzt. F kann außerdem noch von der Zeit t abhängen. Gewöhnlich betrachtet man jedoch F nicht als Funktion der p_k und q_k oder der P_k und Q_k , sondern als Funktion einer neuen und einer alten Variablen. Es gibt vier Möglichkeiten. Wir konzentrieren uns auf erzeugende Funktionen

der alten und neuen Koordinaten, $F_1(q, Q)$. Voraussetzung für diese Wahl ist, daß das Koordinatenpaar (q, Q) eindeutig einen Punkt im Phasenraum bestimmt. Die erzeugende Funktion definiert Variablentransformationen gemäß folgender Formeln

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q, Q, t), \quad (13.43)$$

$$P_i = -\frac{\partial}{\partial Q_i} F_1(q, Q, t). \quad (13.44)$$

Man muß sich F_1 als gegeben und die Ableitungen als ausgeführt denken, sodaß man einen Satz algebraischer Gleichungen erhält, die alte und neue Variablen in Beziehung setzen. Will man etwa die q_k als Funktion von (P, Q) haben, so muss man den zweiten Satz von algebraischen Gleichungen lösen.

Die Bedeutung kanonischer Transformationen liegt darin, daß die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten und Impulse wieder die Hamiltonsche Form haben,

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'(P, Q, t)}{\partial Q_k}, \quad (13.45)$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H'(P, Q, t)}{\partial P_k}, \quad (13.46)$$

mit einer neuen Hamiltonfunktion

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (13.47)$$

Dabei ist H' als Funktionen der neuen Variablen P, Q aufzufassen, d.h. die Argumente p und q von H und F_1 sind als Funktionen von P und Q zu betrachten.

¹

Die Behauptung folgt daraus, daß die alten und die neuen Hamiltonschen Gleichungen zum gleichen Extremalprinzip äquivalent sind, denn es gilt, wie wir gleich zeigen werden

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - H'(P, Q) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \quad (13.48)$$

¹Im Spezialfall, wo die Erzeugende F nicht explizit von t abhängt, ist $H' = H$. Jedoch muss man die Variablen q, p , von denen H abhängt, durch P, Q ausdrücken um H' zu bekommen. Die beiden Ausdrücke sind also im physikalischen Sinn gleich, aber sie sind nicht die gleichen Funktionen ihrer jeweiligen Argumente.

Daher ist die Bedingung

$$\int_{t_a}^{t_f} dt \left[\sum p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right] = \text{Extr.}$$

äquivalent zu

$$\int_{t_a}^{t_f} dt \left[\sum P_i \dot{Q}_i - H'(P, Q, t) \right] = \text{Extr.}$$

Wir benutzen hier die frühere Bemerkung, daß es erlaubt ist, Koordinaten und Impulse an den Rändern t_a, t_f festzuhalten, vorausgesetzt es existiert eine Trajektorie mit den vorgesehenen Randwerten. Dann trägt das Integral über dF_1/dt nur eine Konstante bei, die das Extremum nicht beeinflusst.

Um Gleichung (13.48) zu beweisen, berechnen wir mit Hilfe von Gl.(13.43,13.44)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) &= \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} F_1 + \dot{Q}_i \frac{\partial}{\partial Q_i} F_1 \right) + \frac{\partial}{\partial t} F_1 \\ &= \sum (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) + \frac{\partial}{\partial t} F_1. \end{aligned} \quad (13.49)$$

Setzt man dies auf der rechten Seite von Gl.(13.48) ein, so sieht man, daß die Gleichung kraft Definition (13.47) von H' richtig ist.

Man kann außerdem zeigen, daß eine kanonische Transformation die Eigenschaft hat, daß die neuen Variablen die kanonischen Poisson-Klammern haben, siehe Gl.(13.51) der folgenden Bemerkung.

Beispiel: Die erzeugende Funktion $F_1(q, Q, t) = \sum q_i Q_i$ erzeugt die kanonische Transformation

$$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i.$$

Bemerkung für Fortgeschrittene Man kann einer gegebenen Variablentransformation ansehen, ob sie eine kanonische Transformation ist. In der Sprache des äußeren Differentialkalküls ist eine kanonische Transformation dadurch ausgezeichnet, daß die sogenannte *kanonische 2-Form*

$$\omega^2 \equiv \sum_{i=1}^s dp_i \wedge dq_i$$

invariant ist

$$\sum_{i=1}^s dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^s dP_i \wedge dQ_i.$$

Die kanonische Zweiform ist geschlossen, $d\omega^{(2)} = 0$, und kann als äußere Ableitung einer 1-Form geschrieben werden. Nach der Leibniz-Regel ist nämlich

$$d(\sum p_i dq_i) = \sum dp_i \wedge dq_i$$

und entsprechend für $d(\sum P_i dQ_i)$. Die Invarianz der kanonischen Zweiform sagt daher, daß

$$d(\sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i) = 0.$$

Angenommen, der Phasenraum ist \mathbf{R}^{2s} , so folgt daraus, daß es eine Funktion F auf dem Phasenraum gibt mit der Eigenschaft

$$\sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i = dF. \quad (13.50)$$

(Poincaré Lemma). Allgemeiner gilt dies lokal, d.h. in einer Umgebung eines beliebigen Punkts des Phasenraums. F ist die erzeugende Funktion.

Falls F als Funktion von q und Q aufgefasst werden kann, $F(p, q) = F_1(q, Q)$, so können wir aus Gl.(13.50) ihre partiellen Ableitungen nach q_i und Q_i ablesen. Das Resultat ist Gl.(13.43, 13.44). In der Anwendung betrachten wir kanonische Transformationen, die von einem Parameter t abhängen. Bei den obigen Differentiationen ist t als konstant betrachtet.

Aus der Invarianz der kanonischen Zweiform folgt, daß die Poisson-Klammern denselben Wert haben, gleich ob man sie mit Hilfe der alten oder der neuen Koordinaten berechnet. Daraus folgt insbesondere, daß die neuen Koordinaten die kanonischen Poisson-Klammern haben

$$\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, Q_j\} = 0. \quad (13.51)$$

Bezeichnen wir die Koordinaten (p, q) mit ξ^α , so hat die kanonische Zweiform die Gestalt

$$\omega^2 = \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta.$$

Ist $(\omega^{\alpha\beta})$ die zu $(\omega_{\alpha\beta})$ inverse Matrix, so kann die Definition der Poisson-Klammer auch wie folgt geschrieben werden.

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \xi^\beta}.$$

Aus der Invarianz der Matrix $\omega = (\omega_{\alpha\beta})$ folgt die Invarianz der inversen Matrix $(\omega^{\alpha\beta})$. Damit ist klar, daß die Invarianz von ω die Invarianz der Poisson-Klammern nach sich zieht.

Für weitere mathematische Details wird auf das Buch von Arnold verwiesen.²

Dem ungeübten Leser zuliebe sei jedoch im Folgenden das Transformationsverhalten im Einzelnen diskutiert. Gehen wir von Koordinaten $\{\xi^\alpha\}$ im Phasenraum zu irgendwelchen neuen Koordinaten $\xi'^\gamma = \xi'^\gamma(\xi)$ über, so ist nach den Rechenregeln für die äussere Differentiation

$$d\xi^\alpha = \sum_{\gamma} S^{\alpha}_{\gamma} d\xi'^{\gamma}, \quad (13.52)$$

$$S^{\alpha}_{\gamma} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi'^{\gamma}}. \quad (13.53)$$

Somit

$$\omega^2 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta = \sum_{\gamma,\delta} \frac{1}{2} \omega'_{\gamma\delta} d\xi'^{\gamma} \wedge d\xi'^{\delta}, \quad (13.54)$$

$$\omega'_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha\beta} S^{\alpha}_{\gamma} S^{\beta}_{\delta} \omega_{\alpha\beta}. \quad (13.55)$$

Ist $\xi \mapsto \xi'$ eine *kanonische Transformation* so ist definitionsgemäss ω^2 invariant, d.h.

$$\omega'_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} \quad (13.56)$$

Betrachten wir als nächstes partielle Ableitungen und das Inverse der Matrix $(\omega_{\alpha\beta})$. Nach den Regeln der Differentiationsrechnung ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\gamma} T^{\gamma}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi'^{\gamma}}, \quad (13.57)$$

$$T^{\gamma}_{\alpha} = \frac{\partial \xi'^{\gamma}}{\partial \xi^\alpha}. \quad (13.58)$$

²V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Springer 1978, Kap 44, 45, 47

Somit transformieren sich die Poissonklammern unter einer ganz beliebigen Variablentransformation wie folgt

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \xi^\beta} = \sum_{\gamma, \delta} \omega'^{\gamma\delta} \frac{\partial f}{\partial \xi'^\gamma} \frac{\partial g}{\partial \xi'^\delta}, \quad (13.59)$$

$$\omega'^{\gamma\delta} = \sum_{\alpha\beta} T^\gamma_\alpha T^\delta_\beta \omega^{\alpha\beta}. \quad (13.60)$$

Die Matrizen T und S sind Inverse voneinander, $T = S^{-1}$. Dies sieht man, indem man dieselbe Transformation hin und zurück ausführt, $\xi \mapsto \xi' \mapsto \xi$.

Betrachten wir nun speziell kanonische Transformationen. Dann gilt Gl.(13.56). Setzen wir die Definition (13.55) von ω' in Gl.(13.56) ein, und nehmen das Inverse der Matrizen auf beiden Seiten dieser Gleichung, so folgt wegen $S^{-1} = T$, dass

$$\omega'^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta} \quad (13.61)$$

d.h. die Invarianz der inversen symplektischen Matrix. Damit lautet Gl.(13.59) für kanonische Transformationen

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \xi^\beta} = \sum_{\gamma, \delta} \omega^{\gamma\delta} \frac{\partial f}{\partial \xi'^\gamma} \frac{\partial g}{\partial \xi'^\delta}, \quad (13.62)$$

Dies ist die behauptete Invarianz der Poisson-Klammern unter kanonischen Transformationen.

Mathematisch Gebildete brauchen solch mühsame Rechnungen nicht zu machen. Für sie genügt der Hinweis auf die koordinatenunabhängige Bedeutung der Gleichungen.

Kapitel 14

Hamilton-Jacobi Theorie

Die Hamilton-Jacobi Theorie ist eine der schönsten physikalischen Theorien und wird allgemein als die Krönung der klassischen Physik betrachtet. Die Hamilton-Jacobi Theorie besteht aus einem Verfahren eine geeignete kanonische Transformation zu finden und damit die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in eine lösbare Form zu bringen, wie am Anfang von Kapitel 13 diskutiert.

14.1 Mechanik als Kontrollproblem

Bezeichnung: Als Trajektorie im Ortsraum bezeichnen wir eine vorgegebene Funktion $q(t)$ der Zeit, die den Bewegungsgleichungen genügt. Ein Punkt (q_t, t) liegt genau dann auf der Trajektorie, wenn $q(t) = q_t$. Graphisch kann eine Trajektorie durch eine Bahnkurve mit Zeitmarkierungen dargestellt werden.

Gegeben ein Anfangspunkt (q_t, t) und der Endpunkt (Q, t_f) einer Trajektorie, so ist nach dem Hamilton'schen Prinzip die Trajektorie in der Regel eindeutig bestimmt. Damit ist auch der Impuls P am Enpunkt zur Zeit t_f bestimmt. Gegeben (Q, t_f) so können wir diesen als Funktion $P(q_t, t)$ des Anfangspunkts auffassen.

Betrachten wir nun verschiedene Punkte (q_t, t) auf derselben Trajektorie als Anfangspunkte einer Teiltrajektorie, so ist der Endimpuls P all dieser Teiltrajektorien immer derselbe, sodass

$$P(q_t, t) = P = const \quad \text{unabhängig von } t \quad (14.1)$$

Dies ist eine *Bestimmungsgleichung für die Trajektorie*, d.h. für $q(t) \equiv q_t$ für beliebige Zeiten t .

14.1.1 Problemstellung A

Vorgegeben sei Q, t_f , gesucht die $P(q_t, t)$

Angenommen, wir wären in der Lage, die Funktion $P(q_t, t)$ zu berechnen. Dann könnten wir alle Trajektorien durch (Q, t_f) als Lösung der obigen algebraischen Gleichung bekommen.

Ist dies für Q beliebig durchgeführt so erhält man alle Trajektorien schlechthin, indem man P beliebige Werte annehmen läßt.

14.1.2 Problemstellung B

Kontrollproblem Vorgegeben Q, t_f, q_t, t . Gesucht p_t

Angenommen, man befindet sich (mit seinem Auto ...) zur Zeit t bei q_t und möchte auf möglichst kostengünstigen Weg - d.h. so, dass ein gewisses Kostenfunktional minimiert wird - nach Q fahren mit Ankunftszeit t_f . Die Kenntnis des Impulses p_t zur Zeit t sagt dann, wie schnell man in welche Richtung weiterfahren soll Probleme dieser Art sind bei der Steuerung industrieller Produktionsprozesse wichtig. Man nennt q_t den Zustand des Systems, und p_t die Kontrolle (oder auch Input). Gesucht ist also die richtige Kontrolle, sodass das vorgegebene Ziel Q zur Zeit t_f kostengünstigst erreicht wird.

Wir werden zeigen, dass man sowohl P als auch p_t berechnen kann, wenn man die Kosten S (Wirkung) der optimalen (physikalischen) Trajektorie als Funktion von q_t, t, Q, t_f kennt.

Beispiel: Antriebsloses Raumschiff auf Flug zum Mond. Es soll am Ort Q ankommen (nahe des Mondes) zur Zeit t_f . Abweichung von der vorausberechneten Trajektorie treten auf infolge von Störungen. Zur Zeit t befindet es sich am Ort q_t . Weicht der gemessene Wert p_{ist} ab von p_{soll} , so muß es durch Impulsänderung auf diesen Wert gebracht werden. Die Geschwindigkeit wird durch den Impuls bestimmt. Sei

$$L_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 \Rightarrow \quad (14.2)$$

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = m \frac{p(t)}{q(t)} \quad (14.3)$$

Hamiltonsches Prinzip: Die durch q_t, t, Q, t_f bestimmte Trajektorie ist gegeben durch die Bedingung

$$\int_t^{t_f} L(q(\tau)\dot{q}(\tau))d\tau = \text{Extremum} , \quad (14.4)$$

Extremum bezüglich aller differenzierbaren Funktionen q mit vorgegebenen Endpunkten $q(t) = q_t$ und $q(t_f) = Q$. Der extremale Wert des Ausdrucks (14.4) definiert die Wirkung als physikalische Größe

$$S(q_t, t, Q, t_f) = \text{extr}_{s.o.} \int_t^{t_f} L(q(\tau), \dot{q}(\tau))d\tau \quad (14.5)$$

$$= \int_t^{t_f} L(q(\tau), \dot{q}(\tau))d\tau \quad (14.6)$$

entlang einer physikalischen Trajektorie durch (q_t, t) und (Q, t_f) .

Man nennt $q(\tau)$ den Zustand des Systems zur Zeit τ und $p(\tau)$ (hier) Input oder Kontrolle.

Die *Dynamik* des Systems ist definiert durch Gl (14.3) mit vorgegebenem $m(q)$. Diese Gleichung bestimmt die zeitliche Änderung des Zustands als Funktion des Inputs.

$\int Ld\tau$ für beliebige $q(\tau)$ heisst Kosten-Funktional. 'Optimale Kontrolle' macht das Kostenfunktional minimal.

$S(q, t, Q, t_f)$ ist der Preis der optimalen Trajektorie.

14.1.3 Mechanik

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, die Bewegung eines Massenpunkts geschieht entlang der optimalen Trajektorie in diesem Sinn (wobei L die Lagrange-funktion ist).

Beispiel 1 Raumschiff zum Mond, siehe oben.

Beispiel 2 Biologisches Problem: In einer Zelle soll ein gewisses Substrat (chem. Reaktionspartner), z.B. ein Enzym, stets in einer vorgeschriebenen Konzentration c_{soll} vorhanden sein. Die tatsächliche Konzentration zur Zeit

t sei $c_{ist}(t)$. Wir definieren die Abweichung $q(t) = c_{ist}(t) - c_{soll}$. Der Enzymverbrauch sei $v(t)$, und die Produktionsrate sei $p(t)$. Die Zelle kann die Produktionsrate regulieren, $v(t)$ ist hingegen durch äußere Umstände vorgegeben. Es ist offenbar

$$\dot{q}(t) = \sigma(p(t) - v(t)) \quad (14.7)$$

wo σ eine vom Zellvolumen abhängige Konstante ist. Eine gewisse Toleranz der Größenordnung $k^{-\frac{1}{2}}$ in c_{ist} sei zulässig, die Unwünschbarkeit großer Abweichungen wollen wir quantifizieren indem wir jeder Abweichung einen Preis $\frac{1}{2}kq^2(t)$ zuordnen. Außerdem hat jede Produktion auch ihren Preis - sie verbraucht Energie etc.. Diese wollen wir als αp^2 ansetzen, wo α eine Konstante ist. Damit ist das Kostenfunktional

$$\int dt [\alpha p^2(t) + \frac{1}{2}kq^2(t)] = \int dt \left[\frac{\alpha}{\sigma^2}(\dot{q} + \sigma v)^2 + \frac{1}{2}kq^2(t) \right] \quad (14.8)$$

Die optimale Produktionsrate $p(t)$ ist so, daß dieser Ausdruck ein Minimum wird. Spezialfall $v = 0$ vgl. Übungen.

Behauptung: Das Problem ist gelöst, wenn die Wirkung (=Preis der optimalen Trajektorie) bekannt ist.

14.2 Die Wirkung als physikalische Größe

Betrachte $S(q_t, t, Q, t_f)$ als Funktion der Anfangs- und Endbedingung (q_t, t) resp. (Q, t_f) .

14.2.1 Ein Freiheitsgrad

Sei $q(\tau)$ eine physikalische Trajektorie und $q(\tau) + \delta q(\tau)$ eine benachbarte Trajektorie.

Beide sollen dem Bewegungsgesetz genügen, insbesondere $q(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(\tau), \dot{q}(\tau)) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(\tau), \dot{q}(\tau)) = 0 \quad (14.9)$$

Änderung des Wirkungsfunktionals bei ganz beliebigem δq wurde schon früher berechnet, für feste Anfangs- und Endzeiten t, t_f .

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \Big|_t^{t_f} + \int_t^{t_f} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{=0} \delta q \, d\tau \quad (14.10)$$

Nun ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \quad \delta q(t_f) \equiv \delta Q \quad \delta q(t) \equiv \delta q_t \quad (14.11)$$

$$\delta S = P\delta Q - p_t\delta q_t \quad (14.12)$$

Hieraus

$$\frac{\partial}{\partial q_t} S(q_t, t, Q, t_f) = -p_t \quad \frac{\partial}{\partial Q} S(q_t, t, Q, t_f) = P \quad (14.13)$$

Wir sehen also, daß die Kenntnis der Wirkung uns auch die Werte des Anfangsimpulses $p_t = p(t)$ und Endimpulses $P = p(t_f)$ gibt, in Abhängigkeit von (q_t, t) und (Q, t_f) .

Die Gleichung (14.1) für die *Trajektorie* durch (Q, t_f) schreibt sich dann

$$\frac{\partial}{\partial Q} S(q(t), t, Q, t_f) = P = \text{const} \quad (14.14)$$

Bestimmungsgleichung für $q(t)$, t beliebig:

Bisher war t, t_f fest. Gesucht ist $\frac{\partial}{\partial t} S(q, t, Q, t_f)$, die Änderung der Wirkung bei Verschiebung des Anfangspunkts längs der Trajektorie.

$$\delta S = \frac{d}{dt} S(q(t), t, Q, t_f) = -L(q_t, \dot{q}_t) \quad (14.15)$$

nach Gl (14.6). Dies ist noch nicht die gesuchte Größe, da auch der Anfangsort q_t geändert wird. Die Kettenregel gibt

$$\frac{d}{dt} S(q(t), t, Q, t_f) = \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (14.16)$$

Lösen wir nach $\frac{\partial S}{\partial t}$ auf, und setzen (14.13) und (14.15) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q_t, t, Q, t_f) = -L(q_t, \dot{q}_t) + p_t \dot{q}_t = H(p_t, q_t, t) \quad (14.17)$$

Ebenso kann man herleiten

$$\frac{\partial S}{\partial t_f} = -H(P, Q) \quad (14.18)$$

Mehrere Freiheitsgrade können genauso behandelt werden. Das Resultat lautet

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = -p_i \quad \frac{\partial S}{\partial Q_j} = P_j \quad \frac{\partial S}{\partial t} = H \quad (14.19)$$

$$S = S(q, t, Q_j, t_f) \quad (14.20)$$

14.3 Hamilton-Jacobi Differentialgleichung

Problem: Bestimmung der Wirkung. Einsetzen der Wirkung von Gl (14.13) für p_t in (14.17) liefert

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial S}{\partial q_t}, q_t, t\right) = 0 \quad S = S(q_t, t, Q, t_f) \quad (14.21)$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für S , da H bekannt ist. In der Literatur wird häufig S als Funktion der *oberen* Grenze t_f betrachtet. Das gibt andere Vorzeichen,

$$\frac{\partial S}{\partial t_f} + H\left(\frac{\partial S}{\partial Q}, Q, t_f\right) = 0 \quad (14.22)$$

Gl (14.21) heißt Hamilton-Jacobi Differentialgleichung für $-S$.

14.3.1 Mehrere Freiheitsgrade

In diesem Fall ist zu lesen

$$-\frac{\partial S}{\partial q} = \left(-\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = (p_1, \dots, p_s) . \quad (14.23)$$

Q, t_f kommen in der Differentialgleichung nicht vor. Daraus folgt, dass mit S auch

$$S(q_t, t, Q, t_f) + A \quad (14.24)$$

die Hamilton-Jacobi Differentialgleichung für beliebige $Q = (Q_1, \dots, Q_s)$ und A löst.

14.3.2 Vollständige Lösung

Die vollständige Lösung hängt von ebensovielen (nämlich $s+1$) freien Koordinaten ab (hier Q_1, \dots, Q_s, A) wie Variablen vorhanden sind (hier q_1, \dots, q_s, t). Die vollständige Lösung ist nicht eindeutig bestimmt. $S(q, t, Q, t_f)$ ist ein *Spezialfall* einer vollständigen Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung.

14.3.3 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung hängt von einer freien Funktion ϕ von s Argumenten ab. Hat man irgendeine vollständige Lösung so gibt es Verfahren um daraus die allgemeine Lösung zu finden.

14.3.4 Anfangsbedingungen

Anfangsbedingungen sind nötig, um die freie Funktion in der allgemeinen Lösung, und damit S eindeutig zu bestimmen. Betrachte $S(q_t, t, Q, t_f)$ für $t \rightarrow t_f$. Aus (14.6) oder (14.15) ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \frac{1}{t - t_f} S(q, t, Q, t_f) = -L(Q, \dot{Q}) \quad (14.25)$$

$$\frac{q_i - Q_i}{t - t_f} \rightarrow \dot{Q} \quad (14.26)$$

14.4 Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung durch Separation der Variablen

Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems (z.B. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten o.a., je nach Symmetrie des Problems) läßt sich die Hamilton-Jacobi Gleichung lösen durch einen Ansatz der Form (falls H t -unabhängig)

$$-S = \sum_{k=1}^s F_k(q_k) - Et + A \quad (14.27)$$

Falls der Ansatz funktioniert, hängt eine solche Lösung noch von $s + 1$ willkürlichen Koordinaten $\alpha_1, \dots, \alpha_s, A$ ab.:

vollständige Lösung. I.a. wird eine solche Lösung *nicht* den Randbedingungen der Form (14.25) genügen, und ist damit nicht mit $S(q, t, Q, t_f)$ zu identifizieren. Nach obigem müßte man aus der vollständigen Lösung der Form (14.27) die allgemeine Lösung finden und die darin enthaltene andere freie Funktion durch die Randbedingung (14.25) bestimmen. Tatsächlich erübrigt sich dies, wenn man nur die Trajektorien haben will, wie später gezeigt wird. Es wird genügen, *irgendeine* vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung zu kennen, die nicht notwendig als Wirkung interpretierbar sein muß. (In der optimalen Kontrolltheorie muß man allerdings (14.25) lösen.)

Einsetzen eines Ansatzes (14.27) in (14.21) gibt gewöhnliche Differentialgleichungen für $F_k(q_k)$, die sich leicht durch Integration lösen lassen. Illustration durch Beispiele siehe später.

14.5 Zeittranslation als kanonische Transformation

Reformulierung der bisherigen Betrachtungen: betrachte Abbildung des Phasenraumes auf sich.

$$T_{t \rightarrow t_f} : \left. \begin{array}{l} p_t = p(t) \\ q_t = q(t) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{t_f} = P \\ q_{t_f} = Q \end{array} \right. \quad \text{zunächst } t \text{ fest} \quad (14.28)$$

Koordinaten und Impulse, die das Teilchen zur Zeit t_f haben wird, wenn es zur Zeit t p, q hat. Es sind P und Q durch p, q und t eindeutig bestimmt. t beliebig: $q(t)$ Trajektorie, $p(t)$ zugehöriger Impuls. Endimpuls P und Koordinate Q hängen nur von der Trajektorie ab, aber nicht davon zu welcher Zeit t ich durch Messung von p und q feststelle, daß sich das Teilchen auf der Trajektorie befindet:

$$\frac{d}{dt}P = 0 \quad \frac{d}{dt}Q = 0 \quad (14.29)$$

Dies hat die Form von Hamiltonschen Gleichungen $\dot{P} = \frac{\partial H'}{\partial Q}$, $\dot{Q} = -\frac{\partial H'}{\partial P}$ mit $H' = 0$.

Wir zeigen, dass $T_{t \rightarrow t_f}$ eine kanonische Transformation ist, wobei P, Q die neuen Impulse und Koordinaten sind, d.h. es existiert eine erzeugende Funktion $F(q, Q, t)$, sodaß

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad H' - H = \frac{\partial F}{\partial t} \quad H' = 0 \text{ s.o.} \quad (14.30)$$

Vergleich mit Gl. (14.19) zeigt, dass dies erfüllt ist mit

$$F(q, Q, t) = -S(q, t, Q, t_f) \quad (14.31)$$

d.h. die Wirkung ist die erzeugende Funktion der Zeittranslation. Die Lösung der neuen Hamiltonschen Gleichung ist trivial.

$$\left. \begin{array}{l} P_i = \text{const} = \frac{\partial S}{\partial Q_i}(q, t, Q, t_f) \\ Q = \text{const} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Bestimmungsgleichung für } q(t) \\ \text{Trajektorie durch } P, Q, t_f \end{array} \quad (14.32)$$

Das ist wiederum Gl (14.14) für die Trajektorie. Die Methode beruht darauf, daß man durch eine geschickte kanonische Transformation die Hamiltonsche Gleichung in eine trivial zu lösende Form gebracht hat. Eine geeignete kanonische Transformation ist diejenige mit der Wirkung $S(q, t, Q, t_f)$ als erzeugende Funktion.

14.6 Allgemeine Theorie

Verallgemeinerung: $-S(q, t, Q, t_f)$ ist eine spezielle vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Betrachte eine *beliebige* vollständige Lösung $F(q_1, \dots, q_s, t, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ der Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) = 0 \quad (14.33)$$

Nach Definition einer vollständigen Lösung hängt sie von s willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sowie einer additiven Konstante A , die wir weglassen, ab.

Spezialfall:

$$F = -S \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \equiv (Q_1, \dots, Q_s) \quad (14.34)$$

Wir betrachten nun eine kanonische Transformation mit $F(q, \alpha)$ als erzeugende Funktion, wobei

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \equiv Q \quad \text{neue Koordinaten} \quad (14.35)$$

Die neuen Impulse bezeichnen wir mit

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \equiv P \quad \text{neue Impulse} \quad (14.36)$$

Dann gilt noch die früher abgeleitete Eigenschaft der kanonischen Transformation.

$$P = -\frac{\partial}{\partial Q} F \quad p = \frac{\partial}{\partial q} F \quad (14.37)$$

$$\beta_i = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(q, t, \alpha) \quad H' = H + \frac{\partial}{\partial t} F(q, t, \alpha) \quad (14.38)$$

Da F der Hamilton-Jacobi-Gleichung genügt, ist die neue Hamiltonfunktion

$$H' = 0 \quad (14.39)$$

Damit werden die Hamilton Gleichungen für die neuen Koordinaten α und Impulse β

$$\frac{d}{dt} \alpha_i = 0 \quad \frac{d}{dt} \beta_i = 0 \quad (14.40)$$

Diese sind wiederum trivial zu lösen

$$\left. \begin{array}{l} \beta_i = \text{const} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(q, t, \alpha) \\ \alpha_i = \text{const} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Bestimmungsgleichung für} \\ \text{Trajektorie } q(t) \end{array} \quad (14.41)$$

Die Funktion $q(t)$ wird von $2s$ willkürlichen Konstanten α_i, β_i abhängen, diese sind wie üblich durch Anfangsbedingungen zu bestimmen. Wir haben also die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung gefunden. Spezialfall einer vollständigen Lösung: $F(q, t, \alpha) \equiv -S(q, t, Q, t_f)$ mit $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \equiv (Q_1, \dots, Q_s)$. In diesem Fall haben die neuen Koordinaten $\alpha \equiv Q$ und neuen Impulse $\beta \equiv P$ eine einfache anschauliche Bedeutung wie oben erklärt. Diese geht bei beliebigem F verloren. Dafür hat man den Vorteil eingetauscht, eine beliebige vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung verwenden zu können, die einfacher zu finden ist als die spezielle Lösung die die Randbedingung (14.25) erfüllt.

Literatur: Oft werden α_i als neue Impulse und $-\beta_i$ als neue Koordinaten bezeichnet. Das ist eine Konvention, da es keinen wesentlichen Unterschied zwischen verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen gibt - vgl. früheres Resultat daß $q \rightarrow -p$ und $p \rightarrow q$ eine kanonische Transformation ist.

14.7 Zusammenfassung des Verfahrens zur Lösung der Bewegungsgleichung nach Hamilton-Jacobi

1. Man beschaffe sich die Hamiltonfunktion $H(p, q, t)$
2. Man finde eine vollständige Lösung $F(q, t, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung $\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) = 0$ die von s willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ abhängt (ausschließlich einer zusätzlichen additiven Konstanten A).
3. Die Trajektorie $q(t)$ ist dann gegeben als Lösung der algebraischen Gleichungen

$$\beta_i = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(q, t, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \quad (14.42)$$

Sie hängen von $2s$ willkürlichen Koordinaten α_i, β_i ab.

Im Falle einer t -unabhängigen Hamiltonfunktion wird man die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung zunächst durch den Ansatz

$$F(q, t, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{k=1}^s F_k(q_k) - Et \quad (14.43)$$

versuchen. Dies bezeichnet man als ‘Separation der Variablen’. Wichtig ist eine geschickte Wahl der q_k .

Bemerkung: Das Verfahren wird in ähnlicher Form in der Quantenmechanik benutzt, um Lösungen Ψ der zeitunabhängigen Schrödingergleichung zu finden, beispielsweise für das Wasserstoffatom. Jedoch ist S nicht die Entsprechung der Wellenfunktion Ψ selbst, sondern ihres Logarithmus $i \ln \Psi$. Deshalb macht man in der Hamilton-Jacobi Theorie einen Summenansatz statt des in der Quantenmechanik verwandten Produktansatzes.

14.7.1 Beispiel: Kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes

Wir benutzen kartesische Koordinaten

$$(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z) = \mathbf{r} \quad (p_1, p_2, p_3) = (p_x, p_y, p_z) = \mathbf{p} \quad (14.44)$$

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 \quad (14.45)$$

Damit wird die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für $F(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}[\nabla F(\mathbf{r}, t)]^2 = 0 \quad (14.46)$$

Ansatz:

$$F(\mathbf{r}, t) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) - Et \quad (14.47)$$

Eingesetzt:

$$\frac{1}{2m}[F_1'^2(x) + F_2'^2(y) + F_3'^2(z)] - E = 0 \quad (14.48)$$

Einsetzen gibt

$$E = \frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \frac{1}{2m}\alpha^2 \quad (14.49)$$

Durch Integration

$$F_1(x) = \alpha_1 x + const \quad F_2(y) = \alpha_2 y + const \quad F_3(z) = \alpha_3 z + const \quad (14.50)$$

Somit

$$F(\mathbf{r}, t, \alpha) = \vec{\alpha} \mathbf{r} - \frac{1}{2m}\alpha^2 t + const \quad \text{vollständige Lösung} \quad (14.51)$$

Bemerkung Diese Lösung genügt nicht der Randbedingung (14.25).

Die Trajektorie ist $\beta_i = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(\mathbf{r}, t, \alpha) = -q_i + \frac{1}{2m} \alpha_i t$. Die Lösung in Vektorschreibweise lautet

$$\mathbf{r}(t) = -\beta + \frac{1}{2m} \alpha t \quad (14.52)$$

α, β sind aus den Randbedingungen zu bestimmen: $-\beta = \mathbf{r}(0)$, $\alpha = 2m\dot{\mathbf{r}}(0)$.

14.8 Ricatti-Lösungsverfahren für die Hamilton-Jacobi Gleichung

Wir betrachten dasselbe Problem, machen jedoch einen anderen Ansatz:

$$F(\mathbf{r}, t) = \pi(t)(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2.$$

Zu bestimmen ist $\pi(t)$.

Eingesetzt,

$$\pi'(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2 + \frac{1}{2m} \pi^2(t) (2(\mathbf{r} - \mathbf{R}))^2 = 0.$$

Dies führt auf eine Ricatti-Differentialgleichung

$$\pi'(t) + \frac{2}{m} \pi^2(t) = 0 \quad (14.53)$$

Lösung durch Trennung der Veränderlichen: $\int \frac{d\pi}{\pi^2} = -\int \frac{2}{m} dt$, also:

$$-\frac{1}{\pi} = -\frac{2}{m}(t - t_f) \quad (14.54)$$

$$\pi(t) = \frac{m}{2} \frac{1}{t - t_f} \quad (14.55)$$

t_f ist eine freie Konstante. Somit

$$F(\mathbf{r}, t, \mathbf{R}) = \frac{m}{2} \frac{1}{t - t_f} (\mathbf{r} - \mathbf{R})^2 \quad (14.56)$$

Die vollständige Lösung hängt von den Parametern von R_x, R_y, R_z ab, und nach Gl.(14.56) ausserdem von t_f ab.

Nebenbemerkung: Die vollständige Lösung ist nicht eindeutig!

Gl.(14.56) erfüllt auch die Randbedingung (14.25). Daher wurde hier tatsächlich die Wirkung $S = -F$ gefunden, d.h. die Kosten der optimalen Trajektorie mit gegebenen Anfangs- und Endpunkten.

Das Verfahren der Ricatti-Gleichung eignet sich für allgemeine in den Variablen q, p quadratische Hamiltonfunktionen. Dies ist der in der Anwendung der optimalen Kontrolltheorie auf Steuerungsprobleme in der industriellen Fertigung wichtigste Fall.

Kapitel 15

Einige Resultate von Bedeutung für andere Zweige der Physik

15.1 Liouvillescher Satz

Der Liouvillesche Satz in seiner allgemeinen Form sagt aus, daß sich das Volumenelement im Phasenraum unter einer kanonischen Transformation von Variablen $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ zu neuen Variablen $(Q, P) \equiv (Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)$ nicht ändert,

$$dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s. \quad (15.1)$$

Wir nehmen an, daß die kanonische Transformation durch eine erzeugende Funktion $F(q, Q)$ bestimmt ist, sodaß

$$P_k = -\frac{\partial}{\partial Q_k} F(q, Q), \quad (15.2)$$

$$p_k = +\frac{\partial}{\partial q_k} F(q, Q), \quad (15.3)$$

$$(15.4)$$

Dies setzt voraus, daß statt $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ oder $(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)$ auch $(q_1, \dots, q_s, Q_1, \dots, Q_s)$ als unabhängige Variable im Phasenraum genommen werden können. Mit anderen erzeugenden Funktionen läuft der Beweis analog.

Beweis des allgemeinen Liouvilleschen Satzes. Wir können nach den Regeln der Integralrechnung zu Variablen $(q_1, \dots, q_s, Q_1, \dots, Q_s)$ transformieren. Es ist einerseits

$$dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = dq_1 \dots dq_s dQ_1 \dots dQ_s |J^{(1)}(q, Q)|. \quad (15.5)$$

Dabei ist $J^{(1)}$ die Jacobiante

$$J^{(1)} = \det \left(\frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial Q_j} \right).$$

Andererseits

$$dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = dq_1 \dots dq_s dQ_1 \dots dQ_s |J^{(2)}(q, Q)|.$$

Dabei ist $J^{(2)}$ die Jacobiante,

$$J^{(2)} = \det \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \det \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial Q_j} \right) \quad (15.6)$$

$$= (-1)^s J^{(1)} \quad (15.7)$$

Vergleich der beiden Ausdrücke zeigt, daß die Gleichheit (15.1) gilt. q.e.d.

Für Zwecke der klassischen statistischen Mechanik braucht man einen Spezialfall dieses Resultats. Manchmal wird dieser Spezialfall als *der* Liouvillesche Satz bezeichnet. Er besagt, daß unter der Zeitentwicklung von Punkten (q, p) im Phasenraum zur Zeit t_0 zu (Q, P) zur Zeit t ein Gebiet im Phasenraum in ein Gebiet mit gleichgroßem Volumen abgebildet wird. Es gilt also wiederum Gl. (15.1). Diese spezielle Form des Liouvilleschen Satzes folgt aus der allgemeinen, weil, wie wir wissen, die Zeittranslation eine kanonische Transformation ist. Erzeugende Funktion ist dabei die Wirkung,

$$F(q, Q) = -S(q, t_0, Q, t).$$

15.2 Kleine Schwingungen

Wir betrachten Lösungen der Bewegungsgleichungen für ein System mit Lagrange-funktion $L = T - V$, dessen Potential zweimal stetig differenzierbar sei und ein isoliertes Minimum bei $q = q^{(0)}$ habe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $V(q^{(0)}) = 0$ ist.

Wir betrachten hier nur Trajektorien, die im betrachteten Zeitintervall in einer Umgebung von $q^{(0)}$ verbleiben. Es sei bemerkt, daß Trajektorien mit genügend kleiner Energie E für alle Zeiten in der Nähe von $q^{(0)}$ bleiben werden, wenn sie zur Zeit $t = 0$ ihren Anfangspunkt nahe $q^{(0)}$ haben. Dies folgt aus der Minimumeigenschaft und der Tatsache, daß stets $E \geq V(q)$ sein muß.

Es wird sich zeigen, daß die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen unter diesen Voraussetzungen eine Superposition harmonischer Schwingungen ist. Die Koordinaten seien $q = (q_1, \dots, q_N)$. Wir führen neue Koordinaten

$$\xi_j = q_j - q_j^{(0)} \quad (15.8)$$

ein, und betrachten das Potential V als Funktion von ξ mit einem Minimum bei $\xi = 0$. Jedes mechanische System, dessen Potential differenzierbar ist und ein Minimum hat, läßt also kleine Schwingungen um das Minimum als Trajektorien zu. Anwendungsbeispiele sind Molekül-Schwingungen und Schallwellen in Kristallen.

Bemerkung: Ist ein Potential nach unten beschränkt, so hat es ein Minimum. Dieses braucht aber nicht isoliert zu sein. Das Minimum eines mexikanischen Huts ist ein Beispiel. Es treten in diesem Fall sogenannte Nullmoden auf - Eigenwerte $\omega^2 = 0$ in der Analyse unten. Dieser Fall kann mit behandelt werden, wenn man gebührende Sorgfalt walten läßt. Darauf soll jedoch hier nicht eingegangen werden.

Bekanntlich hat eine reelle Funktion $f(x)$ einer reellen Variable x genau dann ein isoliertes Minimum bei $x = 0$, wenn die Ableitung $f'(0) = 0$ ist, und wenn außerdem $f''(0) > 0$ ist. Dies verallgemeinert sich auf den N -dimensionalen Fall wie folgt. Ist η ein beliebiger nichtverschwindender N -dimensionaler Vektor, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ und x ein reeller Parameter, so muß gelten

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x\eta)|_{x=0} = 0; \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x\eta)|_{x=0} > 0. \quad (15.10)$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, daß die Richtungsableitung in jede beliebige Richtung am Minimum verschwinden muß. Aus der Bedingung (15.9) folgt, daß alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial q_k} V$ bei $q^{(0)}$, verschwinden müssen, denn diese Größe ist gleich der linken Seite von Gl.(15.9) wenn wir ein η

wählen, dessen k -te Komponente 1 ist, und die anderen 0. Aufgrund der Annahme $V(\xi = 0) = 0$ hat die Taylorentwicklung des Potentials um $\xi = 0$ dann die folgende Form

$$V(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \xi_i \xi_j + \dots \quad (15.11)$$

mit $k_{ij} = k_{ji}$. Wir interessieren uns für Trajektorien $t \mapsto \xi(t)$, die so nahe bei $\xi = 0$ liegen, daß die höheren Terme in der Entwicklung vernachlässigt werden können.

Die zweite Ableitung in Gl.(15.10) berechnet man nach der Kettenregel zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x\eta) = \sum_{i,j} \eta_i k_{ij} \eta_j > 0. \quad (15.12)$$

Dies besagt, daß $k = (k_{ij})$ eine positive symmetrische Matrix sein muß.

Wir machen die vereinfachende Annahme, daß die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\xi}_i^2 \quad (15.13)$$

hat. Als Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen ergeben sich dann

$$m_i \ddot{\xi}_i + \sum_j k_{ij} \xi_j = 0. \quad (15.14)$$

Dies ist ein System von N gewöhnlichen *gekoppelten linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung* mit konstanten Koeffizienten für die N Funktionen $\xi_i(t)$ der Zeit.

Nach der allgemeinen mathematischen Theorie lassen sich solche Differentialgleichungen durch einen Exponentialansatz lösen,

$$\xi_i(t) = C_i e^{-i\omega t}. \quad (15.15)$$

Setzen wir den Ansatz (15.15) in die Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich die Bedingung

$$-m_i \omega^2 C_i + \sum_j k_{ij} C_j = 0. \quad (15.16)$$

Wir vereinfachen die Gleichung, indem wir statt C_i und k_{ij} die Größen

$$m_i^{-\frac{1}{2}} k_{ij} m_j^{-\frac{1}{2}} = \kappa_{ij}, \quad (15.17)$$

$$m_j^{\frac{1}{2}} C_j = c_j \quad (15.18)$$

einführen. Dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\sum_j \kappa_{ij} c_j = \omega^2 c_i. \quad (15.19)$$

Diese Gleichung besagt, daß $c = (c_1, \dots, c_N)$ ein Eigenvektor der Matrix κ und ω^2 der zugehörige Eigenwert sein muß.

Wir sind also auf ein Eigenwertproblem von der gleichen Art geführt worden, wie es in der Quantenmechanik bei der Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung auftreten wird. Wie dort vereinfacht sich die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems, wenn man Symmetrien ausnutzen kann. Die folgenden Abschnitte werden dies noch illustrieren.

Nach der allgemeinen mathematischen Theorie hat eine (strikt) positive $N \times N$ -Matrix N linear unabhängige Eigenvektoren c^α , ($\alpha = 1, \dots, N$) und die zugehörigen Eigenwerte $(\omega^\alpha)^2$ sind strikt positiv. Insbesondere sind also die ω^α reell. Man nennt sie die *Eigenfrequenzen* des mechanischen Systems. Im Prinzip kann man die Eigenfrequenzen als Lösungen der sogenannten *Säkulargleichung*

$$\det(\kappa - \omega^2 \mathbf{1}) = 0 \quad (15.20)$$

bestimmen. Dies ist eine algebraische Gleichung N -ten Grads für ω^2 . Die Eigenvektoren können orthonormal gewählt werden,

$$\sum_i c_i^\alpha \bar{c}_i^\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (15.21)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen ist eine Superposition von linear unabhängigen Lösungen der Form (15.15), die wir mit α durchnummerieren. Weil die Koeffizienten k_{ij} reell sind, ist mit jeder komplexen Lösung auch ihr komplex konjugiertes Lösung; die allgemeine reelle Lösung hat daher die Form

$$\xi_i(t) = \sum_\alpha \Re e a_\alpha C_i^\alpha e^{-i\omega^\alpha t} \quad (15.22)$$

mit N willkürlichen komplexen Koeffizienten a_α .

Die allgemeine Lösung ist nur dann eine periodische Funktion der Zeit, wenn alle ω^α in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Die Periode der allgemeinen Lösung ist dann das kleinste gemeinsame Vielfache der Perioden der Einzellösungen.

15.2.1 Normalkoordinaten

Die Auslenkungen ξ sind Vektoren in einem N -dimensionalen Raum. Wir können zu neuen Koordinaten anstelle der Komponenten ξ_i von ξ übergehen, indem wir ξ nach irgendeiner beliebigen Basis entwickeln. Die neuen Koordinaten sind dann Komponenten Q_i von ξ bezüglich dieser Basis. Wir wählen als Basis die C^α , die sich aus den N linear unabhängigen (N -komponentigen) Eigenvektoren c^α gemäß $C_i^\alpha = m_i^{-\frac{1}{2}} c_i^\alpha$ ergeben.

$$\xi_i = \sum_{\alpha} Q^\alpha C_i^\alpha = m_i^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} Q^\alpha c_i^\alpha \quad (15.23)$$

Die C^α können als reell angenommen werden, denn mit jedem Eigenvektor c^α ist auch der komplex konjugierte Vektor Eigenvektor zum selben Eigenwert. Mit Hilfe der Orthonormalitätsbedingung (15.21) erhält man eine entsprechende Bedingung für die neue Basis

$$\sum_i m_i C_i^\alpha C_i^\beta = \sum_i c_i^\alpha c_i^\beta = \delta_{\alpha\beta} . \quad (15.24)$$

Die neuen Koordinaten Q^α sind dann reell, und werden als *Normalkoordinaten* bezeichnet. Die Schwingungen in nur einer Normalkoordinate werden als Normalschwingungen oder auch als Moden bezeichnet. Sie sind Lösungen von der Form (15.15) für die ursprünglichen Koordinaten.

Durch Einsetzen des Ausdrucks (15.23) für die alten Koordinaten berechnen wir die Lagrangefunktion in neuen Koordinaten. Mit Hilfe der Bedingung (15.24) und der definierenden Gleichung (15.19) des Eigenwertproblems ergibt sich

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} [(\dot{Q}^\alpha)^2 - (\omega^\alpha Q^\alpha)^2] . \quad (15.25)$$

Dies ist eine Summe von Termen, in die nur eine Koordinate eingeht. Deshalb entkoppeln die zugehörigen Bewegungsgleichungen,

$$\ddot{Q}^\alpha + (\omega^\alpha)^2 Q^\alpha = 0.$$

Dies ist der Zweck der Transformation zu Normalkoordinaten. Die Normalschwingungen werden durch α numeriert und haben die folgende Form. Es ist

$$Q^\alpha(t) = \Re e A e^{i\omega^\alpha t}, \quad (15.26)$$

während alle andern Normalkoordinaten verschwinden; $Q^\beta(t) \equiv 0$ für $\beta \neq \alpha$.

15.2.2 Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren

Betrachten wir zwei 1-dimensionale harmonische Oszillatoren der gleichen Masse m und Federkonstanten D , die außerdem durch eine Feder der Federkonstanten D' gekoppelt sind. Die Auslenkungen aus der Ruhelage seien ξ_1 und ξ_2 . Die Rückstellkraft für Massenpunkt 1 ist

$$F_1 = -D\xi_1 - D'(\xi_1 - \xi_2),$$

und die Rückstellkraft auf Massenpunkt 2 ist

$$F_2 = -D\xi_2 - D'(\xi_2 - \xi_1).$$

Das Potential dazu ist

$$V(\xi_1, \xi_2) = \frac{D}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{D'}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2. \quad (15.27)$$

Man rechnet leicht nach, daß in der Tat

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} V(\xi_1, \xi_2). \quad (15.28)$$

Die Matrix $k = (k_{ij})$ hat also die Gestalt

$$k = \begin{pmatrix} D' + D & -D' \\ -D' & D' + D \end{pmatrix}. \quad (15.29)$$

Die Säkulargleichung (15.20) lautet

$$\det(m^{-1}k - \omega^2 \mathbf{1}) = 0,$$

oder explizit,

$$\omega^4 - 2\omega^2(d' + d) + (d' + d)^2 - d'^2 = 0,$$

mit den Abkürzungen $d = D/m$, $d' = D'/m$. Die beiden Lösungen sind

$$\omega_{\pm}^2 = d' + d \pm d' \quad (15.30)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren zu den beiden Eigenfrequenzen \sqrt{d} und $\sqrt{d + 2d'}$ können wie in der linearen Algebra üblich bestimmt werden.

Es ist jedoch einfacher, die Symmetrie des Problems auszunutzen. Das Problem ist invariant unter der linearen Transformation P , die die Koordinaten ξ_1 und ξ_2 vertauscht,

$$\xi \mapsto P\xi \quad (15.31)$$

$$(P\xi)_1 = \xi_2 \quad (15.32)$$

$$(P\xi)_2 = \xi_1 \quad (15.33)$$

Man wählt neue Koordinaten, die der Symmetrie des Problems angepaßt sind und unter P bis auf einen Faktor in sich selbst übergehen

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2), \quad (15.34)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2). \quad (15.35)$$

Die Lagrangefunktion rechnet man um auf

$$L = \frac{m}{2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2] \quad (15.36)$$

$$\omega_1^2 = \frac{D}{m} = \omega_-^2, \quad (15.37)$$

$$\omega_2^2 = \frac{D + 2D'}{m} = \omega_+^2. \quad (15.38)$$

Man sieht durch Vergleich mit Gl. (15.25), daß die q_α , $\alpha = 1, 2$, bis auf einen Faktor \sqrt{m} schon die Normalkoordinaten sind. Die zugehörigen Normal-schwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 sind parallele bzw. gegenläufige Bewegungen der beiden Massenpunkte. Die Bewegungsgleichungen für die Normalkoordinaten sind entkoppelt und die Lösungen lauten

$$q_1(t) = a_1 e^{-i\omega_1 t} \quad (15.39)$$

$$q_2(t) = a_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (15.40)$$

Rücktransformation liefert die allgemeine Lösung für die ursprünglichen Koordinaten.

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t}) \quad (15.41)$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\omega_1 t} - a_2 e^{-i\omega_2 t}) \quad (15.42)$$

Ein interessantes Phänomen bei gekoppelten harmonischen Oszillatoren ist die Schwebung. Wir betrachten dazu den Realteil der Lösung und wählen die Anfangsbedingungen wie folgt.

$$\xi_1(0) = A \quad \dot{\xi}_1(0) = 0 \quad (15.43)$$

$$\xi_2(0) = 0 \quad \dot{\xi}_2(0) = 0 \quad (15.44)$$

$$(15.45)$$

Die Lösung lautet dann

$$\xi_1(t) = \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (15.46)$$

$$\xi_2(t) = \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (15.47)$$

Sind die beiden Oszillatoren nur schwach aneinander gekoppelt, also $D' \ll D$ gilt

$$\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_1 \quad (15.48)$$

$$\omega_1 - \omega_2 \approx 0. \quad (15.49)$$

Die beiden Oszillatoren schwingen beide mit der mittleren Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ mit der sich sehr langsam ändernden Amplitude $A \cos[(\omega_2 - \omega_1)t/2]$ bzw. $A \sin[(\omega_2 - \omega_1)t/2]$. Das An- und Abschwellen der Amplitude nennt man Schwebung, die Energie schwingt mit der Schwebungsfrequenz $\omega_2 - \omega_1$ von einem Oszillator zum anderen.

15.2.3 Gitterschwingungen

Wir betrachten ein kubisches Gitter, dessen Gitterplätze wir durch Vektoren

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

mit ganzzahligen n_i numerieren. Jedem Gitterpunkt sei ein Massenpunkt der Masse m zugeordnet. Die Auslenkung des Massenpunktes bei \mathbf{n} aus seiner Ruhelage werde mit $\xi_{\mathbf{n}}$ bezeichnet. Das Potential V habe ein Minimum, wenn alle Auslenkungen $\xi_{\mathbf{n}}$ verschwinden. Ist die Gitterkonstante a , so ist die Position des Massenpunkts am Gitterpunkt \mathbf{n} gleich

$$\mathbf{x}_{\mathbf{n}} = a\mathbf{n} + \xi_{\mathbf{n}} \quad (15.50)$$

Das Potential kann von den Positionen aller Massenpunkte abhängen. Wir betrachten es als Funktion der Auslenkungen $\xi_{\mathbf{n}}$, die kollektiv als ξ bezeichnet werden sollen. Am Minimum sind alle $\xi_{\mathbf{n}} = 0$.

Wir können das Potential um sein Minimum entwickeln. Wegen der Minimum-Eigenschaft verschwinden alle partiellen ersten Ableitungen. Somit

$$V(\xi) = V(0) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \sum_{i, i'=1}^3 \xi_{\mathbf{n}}^i v_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^{ij} \xi_{\mathbf{n}'}^{i'} \quad (15.51)$$

$$+ \text{Terme höherer Ordnung} , \quad (15.52)$$

mit

$$v_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_{\mathbf{n}}^i \partial \xi_{\mathbf{m}}^j} V(\xi) |_{\xi=0} . \quad (15.53)$$

Wenn man die höheren Ordnungen vernachlässigt, arbeitet man mit der harmonischen Näherung. Der Term nullter Ordnung ist die Ruheenergie des Systems, sie trägt zur Dynamik nichts bei und kann deswegen Null gesetzt werden, $V(0) = 0$.

Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall eines Potentials, das Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn beschreibt. Wir bezeichnen mit $\hat{\mu}$ den Einheitsvektor in μ -Richtung, $\mu = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Dabei ist die -1 -Richtung entgegengesetzt zur 1 -Richtung. Die sechs nächsten Nachbarn von \mathbf{n} sind dann $\mathbf{n} + \hat{\mu}$. Summen über μ gehen über alle sechs Richtungen, außer wenn durch die Bedingung " $\mu > 0$ " Einschränkung auf die drei "positiven" Richtungen (mit nichtnegativen Einträgen in den Vektor $\hat{\mu}$) angezeigt wird.

Wir nehmen an, daß das Potential in harmonischer Näherung nur von der Differenz der Auslenkungen nächster Nachbarn abhängt, und daß maximale Isotropie herrscht. Die letzte Annahme wird zur Folge haben, daß longitudinal und transversal polarisierte Schallwellen einer gegebenen Wellenlänge dieselbe Frequenz haben. In realen Kristallen ist das gewöhnlich nicht der Fall.

Wir nehmen also ein Potential der Form

$$V(\xi) = \frac{D}{2} \sum_{\mu > 0} (\xi_{\mathbf{n} + \hat{\mu}} - \xi_{\mathbf{n}})^2 \quad (15.54)$$

an. Die Rückstellkraft auf den Massenpunkt bei \mathbf{n} ist damit

$$F_{\mathbf{n}} = -D \sum_{\mu} (\xi_{\mathbf{n}} - \xi_{\mathbf{n} + \hat{\mu}}) , \quad (15.55)$$

was der Kraft auf einen Massenpunkt entspricht, der durch Federn der Federkonstante D mit seinen nächsten Nachbarn verbunden ist.

Die zugehörige Lagrangefunktion $L = T - V$ ist durch

$$L = \sum_{\mathbf{n}} \left(\frac{m}{2} \dot{\xi}_{\mathbf{n}}^2 - \frac{D}{2} \sum_{\mu > 0} (\xi_{\mathbf{n}+\hat{\mu}} - \xi_{\mathbf{n}})^2 \right) \quad (15.56)$$

gegeben. Die Doppelsumme über \mathbf{n} und $\mu > 0$ ist einer Summe über alle ungeordneten Paare nächster Nachbarn äquivalent.

Um nicht mit ∞ vielen Massenpunkten zu tun zu haben, kann man periodische Randbedingungen einführen. Dies ist in der Festkörperphysik üblich. Es passiert jedoch nichts Schlimmes, wenn wir einen unendlich ausgedehnten Kristall annehmen, obwohl wir dann ∞ viele Koordinaten $\xi_{\mathbf{n}}$ haben.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m \ddot{\xi}_{\mathbf{n}} = -D \sum_{\mu} (\xi_{\mathbf{n}} - \xi_{\mathbf{n}+\hat{\mu}}). \quad (15.57)$$

Wir numerieren die Normalschwingungen durch \mathbf{k} . Sie sind von der Form des Ansatzes (15.15),

$$\xi_{\mathbf{n}} = C_{\mathbf{n}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$$

Wir benutzen hier eine neue Notation und schreiben $\omega(\mathbf{k})$ anstelle von ω^{α} um zu betonen, daß die Frequenz eine Funktion von \mathbf{k} sein wird.

Man kann nun wieder die Symmetrie des Problems ausnutzen. Die Lagrangefunktion (15.56) ist invariant unter Verschiebungen

$$\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n} + \sum_{\mu > 0} b_{\mu} \hat{\mu}$$

mit ganzzahligen b_{μ} und entsprechender Permutation der Variablen $\xi_{\mathbf{n}}$. Wir machen daher einen der Symmetrie angepaßten Ansatz für $C_{\mathbf{n}}$ derart, daß sich $C_{\mathbf{n}}$ bei einer Translation nur um einen Phasenfaktor ändert. Wir nehmen \mathbf{k} als reellen 3-dimensionalen Vektor und setzen

$$C_{\mathbf{n}} = \mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \quad (15.58)$$

mit einem beliebigen Einheitsvektor \mathbf{a} . Der Lösungsansatz lautet damit

$$\xi_{\mathbf{n}} = \mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} - i\omega(\mathbf{k})t} \quad (15.59)$$

Wählt man für \mathbf{a} einen der drei Basisvektoren in \mathbf{R}^3 so sind dies tatsächlich bis auf einen Faktor m schon die Normalkoordinaten, abgesehen davon, daß sie komplex sind. Die Lösungen kommen jedoch in komplex konjugierten Paaren, so daß man leicht reelle Lösungen daraus baut.

Man berechnet nun

$$\sum_{\mu} (C_{\mathbf{n}} - C_{\mathbf{n}+\hat{\mu}}) = \mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \sum_{\mu} (1 - e^{ik_{\mu}}) = 2\mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \sum_{\mu>0} (1 - \cos k_{\mu});$$

$$k_{\mu} \equiv \hat{\mu} \cdot \mathbf{k}$$

Daraus folgt daß der Ansatz die Bewegungsgleichung erfüllt, vorausgesetzt die Frequenz hat den Wert

$$\omega(\mathbf{k})^2 = \frac{2D}{m} \sum_{\mu>0} (1 - \cos k_{\mu}) . \quad (15.60)$$

Die Lösungen sind ebene Wellen die in \mathbf{k} -Richtung ausbreiten und in \mathbf{a} -Richtung polarisiert sind; sie sind physikalisch als Schallwellen zu interpretieren. Die zugehörige Frequenz ist durch die Dispersionsrelation (15.60) gegeben. Für kleine $|\mathbf{k}|$ ist $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{D}{m}} |\mathbf{k}|$.

15.3 Einige Grundbegriffe der Chaostheorie NOCH NICHT GESCHRIEBEN