

# Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien\*

Matthias Steinhauser

*II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg, 22761 Hamburg*

Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach 2003

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quantenelektrodynamik</b>	<b>7</b>
2.1	Lagrange-Dichte der QED, Feynman-Regeln . . . . .	7
2.2	Green'sche und Vertexfunktionen der QED . . . . .	15
2.3	Einschleifen-Integrale . . . . .	19
2.4	QED-Korrekturen in Einschleifen-Näherung . . . . .	36
2.5	Renormierung der QED . . . . .	42
2.6	Anomales magnetisches Moment des Elektrons . . . . .	52
2.7	Infrarot-Problem, Bremsstrahlung . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Standardmodell der Elektroschwachen Wechselwirkung</b>	<b>57</b>
3.1	Lagrange-Dichte, Feynman-Regeln . . . . .	57
3.2	Renormierung im Eichboson- und Fermion-Sektor . . . . .	62
3.3	Beiträge von Fermion-Schleifen zu Eichbosonselfenergien . . . . .	68
3.4	Myon-Zerfall und W-Masse . . . . .	72

---

\*Basiert auf Aufzeichnungen von W. Hollik, A. Denner, H. Spiesberger, S. Dittmaier, H. Anlauf und W. Kilian

# 1 Vorbemerkungen

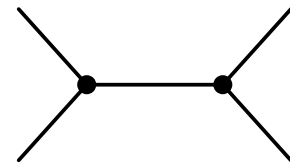
Was sind Strahlungskorrekturen?

Ausgangspunkt: Störungstheoretische Auswertung einer Quantenfeldtheorie, d. h. Wechselwirkungen werden als Störungen zur Theorie freier Felder betrachtet.

Diagrammatische Veranschaulichung: Feynman-Graphen.

Niedrigste Ordnung: „Born'sche Näherung“

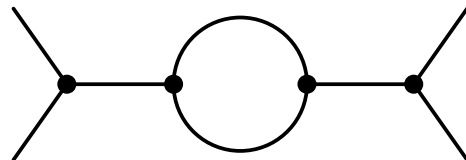
Baumgraphen:



etc.

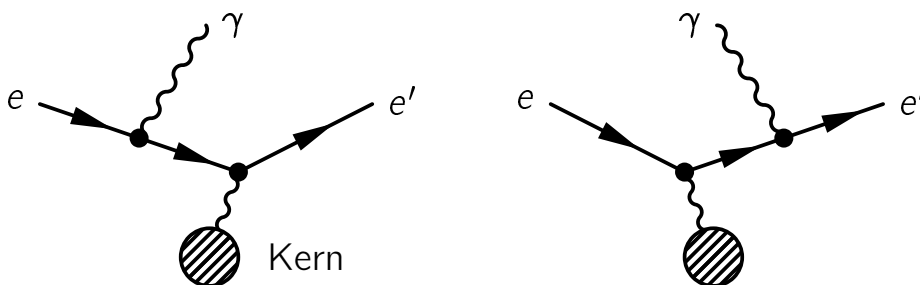
Höhere Ordnungen: „Strahlungskorrekturen“

Schleifendiagramme:



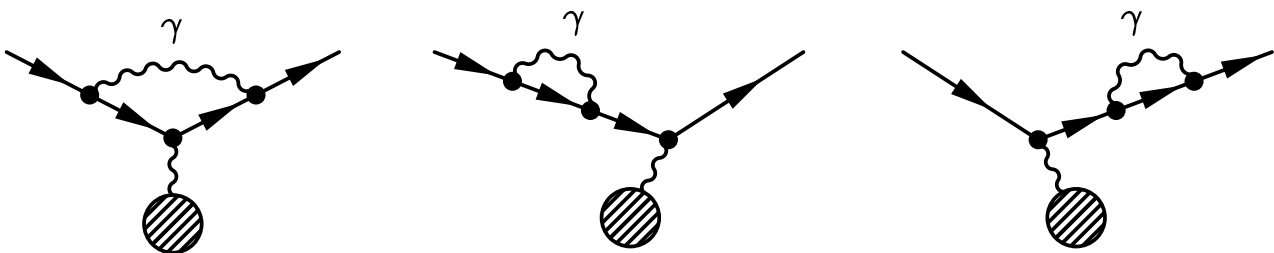
etc.

Historisch: Photonabstrahlung bei Elektron-Kern-Streuung:



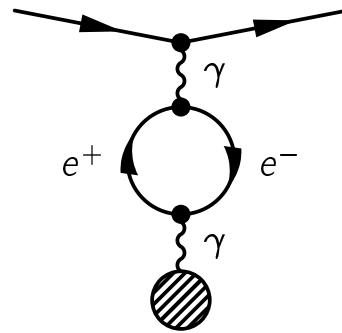
Photonspektrum für  $E_\gamma \rightarrow 0$ :  $d\sigma \sim \frac{dE_\gamma}{E_\gamma} \rightarrow$  Infrarot-Divergenz!

Kompensation der IR-Divergenz durch virtuelle Beiträge:



Weiterer Beitrag in gleicher Ordnung:

„Vakuumpolarisation“



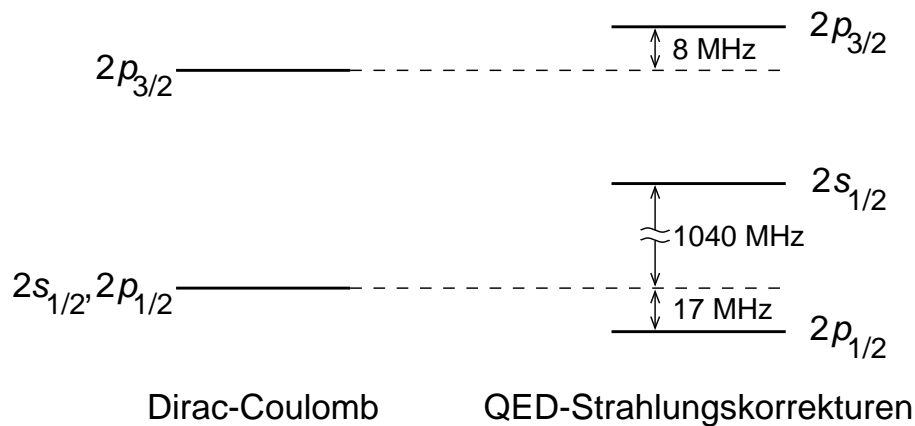
Strahlungskorrekturen führen zu (i.A.) kleinen, beobachtbaren Effekten.

**Beobachtbare Effekte der Quantenelektrodynamik (QED):**

- Lamb-Shift: Verschiebung atomarer Energieniveaus durch Strahlungskorrekturen.

H-Atom:  $\Delta E(2s_{1/2} - 2p_{1/2})_{\text{exp}} = 1057.85 \text{ MHz}$ .

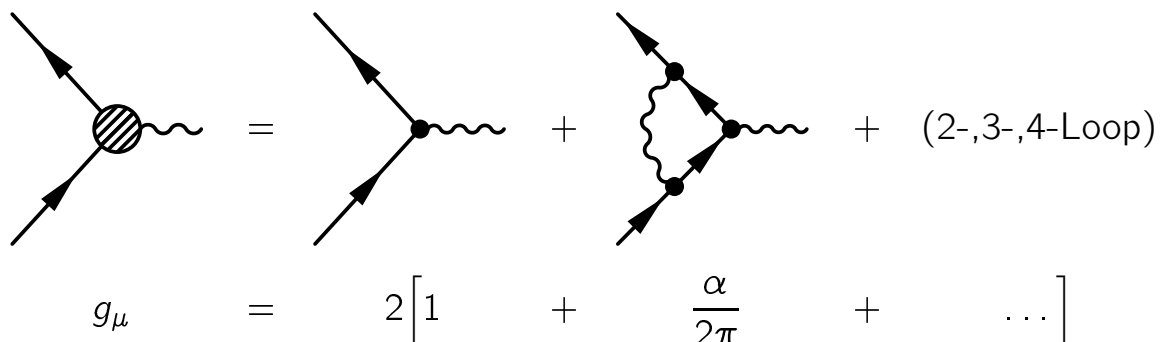
Energieniveaus:



- Anomales magnetisches Moment von  $e, \mu$ :  $\vec{m} = \mp g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s}$ ,

z.B.  $\frac{g_\mu - 2}{2} \Big|_{\text{exp}} = a_\mu^{\text{exp}} = 11\,659\,203(8) \cdot 10^{-10}$ ,  
 $a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = (27.5 \pm 11) \cdot 10^{-10}$ .

Relevante Diagramme:



## Beobachtbare Effekte der elektroschwachen Theorie (SM):

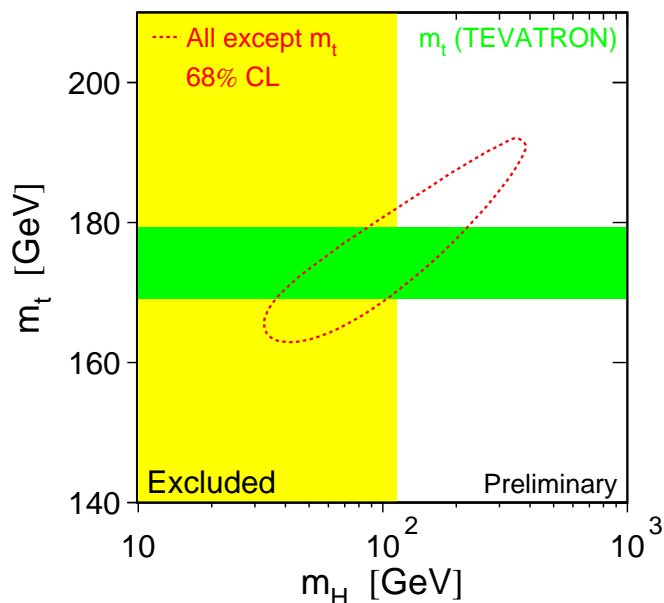
Inputparameter:  $\alpha, G_\mu, M_Z$ , rel. Fehler  $\lesssim 2 \cdot 10^{-5}$   
 $m_f$ , effektive Quarkmassen für  $q \neq \text{top}$  aus  $\alpha(M_Z^2)$   
 $M_H$ , (Higgs-Boson bisher nicht gefunden!)  
 $\alpha_s$  starke Kopplungskonstante; rel. Fehler 2-3%

Observablen:  $M_Z$  (LEP1)  
 $M_W$  (UA2, CDF, D0, LEP2)  
 $\bar{s}_W^2(M_Z^2)$  (LEP1, SLD)  
 $\Gamma_Z, \Gamma_{Z \rightarrow f\bar{f}}$  (LEP1)  
 $m_t$  (CDF, D0)

Theoretische Vorhersagen:  $F(\alpha(M_Z^2), G_\mu, M_Z, m_t, M_H, \alpha_s)$

Fit des SM an Daten liefert:

- gute Übereinstimmung nur nach Einbeziehung von Strahlungskorrekturen,
- Vorhersage von  $m_t$  über Strahlungskorrekturen in Übereinstimmung mit direkter Messung von  $m_t^{\text{exp}} = 174.3 \pm 5.1 \text{ GeV}$ ,
- Ableitung von Schranken für  $M_H$  (genauer:  $\log M_H$ ) aus  $M_H$ -Abhängigkeit der Strahlungskorrekturen (falls das minimale Modell korrekt ist).



$\Rightarrow M_H < 219 \text{ GeV} @ 95\% \text{ c.l.}$

## Allgemeines Vorgehen:

- Theorie formulieren:
  - Felder & Symmetrien
  - ↓
  - Lokale Lagrange-Dichte
  - ↓
- Störungstheorie:
  - Feynman-Regeln
  - ↓
  - Feynman-Graphen
  - ↓
  - Schleifenintegrale
  - ↓
- Technisches Problem: Divergenzen
  - Regularisierung
  - ↓
- Kompensation der Divergenzen und Restaurierung der Symmetrien:
  - Lokale Counterterme
  - ↓
- Fixierung der Parameter:
  - Renormierung
  - ↓
- Vorhersagen der Theorie:
  - Berechnung von Observablen
  - (Zerfallsbreiten, Wirkungsquerschnitte, ...)
- Vergleich mit Experiment

**Konventionen:****Lorentz-Algebra:**

4-Vektor:  $p^\mu = (p^0, \vec{p}),$

Metrik:  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1),$

Skalarprodukt:  $p \cdot q = p^\mu q_\mu = p^\mu q^\nu g_{\mu\nu} = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q} ,$

Gradient:  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} , \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} ,$

Wellenoperator:  $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta .$

**Dirac-Algebra:** (4-dimensional)

Dirac-Matrizen:  $\gamma_\mu, \quad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = +i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger,$   
 $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \text{ etc.}$

Dirac-Slash:  $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu ,$

Antikommutatoren:  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} , \quad (\text{Tr} \{\mathbf{1}\} = 4) ,$   
 $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 .$

**Dirac-Spinoren:**

Dirac-Gleichung:  $(\not{p} - m) u_\sigma(p) = 0, \quad (\not{p} + m) v_\sigma(p) = 0,$

adjungierte Spinoren:  $\bar{u}_\sigma(p) = u_\sigma^\dagger(p) \gamma_0, \quad \bar{v}_\sigma(p) = v_\sigma^\dagger(p) \gamma_0,$

Normierung:  $\bar{u}_\sigma(p) u_{\sigma'}(p) = 2m \delta_{\sigma\sigma'} ,$

$$\bar{v}_\sigma(p) v_{\sigma'}(p) = -2m \delta_{\sigma\sigma'} ,$$

$$\bar{u}_\sigma(p) \gamma_0 u_{\sigma'}(p) = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'} ,$$

$$\bar{v}_\sigma(p) \gamma_0 v_{\sigma'}(p) = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'} .$$

**Einheitensystem:**

SI-Einheiten  $\longrightarrow$  „natürliche Einheiten“,

$\hbar, c \longrightarrow 1 .$

**Fouriertransformation:**

$$f(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \tilde{f}(q), \quad \tilde{f}(q) = \int d^4 x e^{iqx} f(x)$$

**Übung:**

Vergewissern Sie sich, daß (es gilt  $c = 1$ ;  $x^0 = t$ ;  $x^i = (\vec{x})_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

$$\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu,$$

$$\not{p}\not{p} = p^\mu p_\mu \cdot \mathbf{1} = p^2 \cdot \mathbf{1},$$

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2},$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0,$$

$$\gamma^\rho \gamma_\rho = 4 \cdot \mathbf{1},$$

$$\gamma^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho = -2\gamma_\mu,$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu},$$

## 2 Quantenelektrodynamik

Relativistische, quantenfeldtheoretische Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung von  $e^-$  und Photonen.

### 2.1 Lagrange-Dichte der QED, Feynman-Regeln

Annahmen: Spin- $\frac{1}{2}$ -Feld  $\psi$  (Elektron), Spin-1-Feld  $A$  (Photon), Lorentzinvarianz, Skaleninvarianz für hohe Energien ( $\rightarrow$  lokale Wechselwirkungen mit Dimension  $\leq 4$ ),

Eichinvarianz:  $\mathcal{L}$  ist invariant unter der lokalen Eichtransformation  $\Lambda(x)$ :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longrightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi(x), & \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)}, \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x).\end{aligned}$$

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{freies Photonfeld}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\cancel{D})\psi - m\bar{\psi}\psi}_{\text{freies Elektronfeld}} + \underbrace{e\bar{\psi}A\psi}_{\text{Wechselwirkung}}$$

Felder:  $\psi$  = Elektron-Positron-Feld (Dirac-Spinor),

$A_\mu$  = Photonfeld (masseloses Vektorfeld),

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  = Feldstärketensor.

Parameter:  $m$  = Elektronmasse,

$e$  = Elektron-Photon-Kopplungskonstante  
(= Elementarladung =  $e^+$ -Ladung)

Abkürzung: kovariante Ableitung  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi$$



## Propagatoren

Propagatoren = Green'sche Funktionen der freien Feldgleichungen ( $e = 0$ ).

### Elektronpropagator:

Freie Feldgleichung:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (\text{„Dirac-Gleichung“}).$$

Definition:

$$(i\cancel{\partial} - m)S(x) = \delta^4(x).$$

Lösung durch Fouriertransformation:

$$S(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{S}(p).$$

$$\longrightarrow \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} (\cancel{p} - m) \tilde{S}(p) = \delta^4(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx},$$

$$\Longrightarrow \tilde{S}(p) = \frac{1}{\cancel{p} - m} = \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2} \quad \text{für } p^2 \neq m^2.$$

$S(x)$  erhält man durch Rücktransformation.

Kausalität liefert Randbedingungen zur Behandlung der Pole bei  $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ .

$\Longrightarrow$  Elektronpropagator:

$$i\tilde{S}(p) = \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\cancel{p} - m + i\epsilon}.$$

( $\epsilon > 0$ , infinitesimal)

**Übung:** Überzeugen Sie sich, daß:

$$(i\cancel{\partial} - m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{S}(p) = \delta^4(x).$$

**Photonpropagator:**

Freie Feldgleichung:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad (-g_{\mu\nu} \square + \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 .$$

Versuch: Definiere Photonpropagator  $D^{\mu\nu}(x)$  über

$$(-g_{\mu\nu} \square + \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\rho}(x) = -\delta_\mu^\rho \delta^4(x) .$$

Fouriertransformation:

$$D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \tilde{D}_{\mu\nu}(q) .$$

$$\longrightarrow \underbrace{(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)}_{M_{\mu\nu}} \tilde{D}^{\nu\rho}(q) = -\delta_\mu^\rho .$$

Achtung:  $q^\mu M_{\mu\nu} = 0 \implies M_{\mu\nu}$  nicht invertierbarGrund: Eichinvarianz von  $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ .

Eichfixierung:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 ,$$

 $\xi =$  Eichparameter (allgemein:  $R_\xi$ -Eichung;  $\xi = 1$ : Feynman-Eichung)Observable hängen nicht von  $\xi$  ab.

Definition:

$$\left[ -g_{\mu\nu} \square + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] D^{\nu\rho}(x) = -\delta_\mu^\rho \delta^4(x) .$$

$$\longrightarrow \left[ q^2 g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) q_\mu q_\nu \right] \tilde{D}^{\nu\rho}(q) = -\delta_\mu^\rho .$$

Berücksichtigung der Kausalität (Verhalten bei  $q^2 \rightarrow 0$ ) liefert den Photonpropagator:

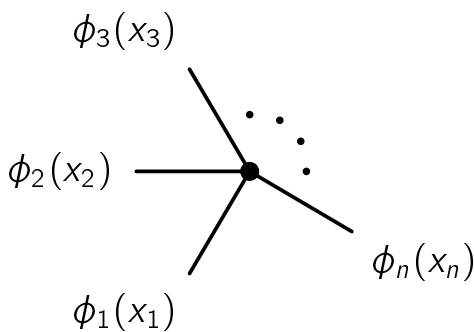
$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\epsilon} (1 - \xi) \right] .$$

## Herleitung von Feynman-Regeln

### Allgemeine Bemerkungen

Vertizes: Jeder Term in  $\mathcal{L}$  mit einem Produkt aus Feldern  $\phi_1, \dots, \phi_n$  liefert einen Vertex mit diesen äußeren Feldern.

Ortsraum: Funktionalableitungen



$$V_{\phi_1 \dots \phi_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_1(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta \phi_n(x_n)} i \int d^4x \mathcal{L} .$$

Impulsraum: Übergang durch Fourier-Transformation  
 $\longrightarrow$   $\delta$ -Funktion für Impulserhaltung an jedem Vertex.

Propagatoren: = inverse 2er-Vertizes.

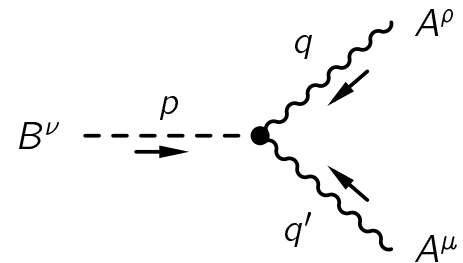
$$P_{\phi\phi^\dagger} = -(V_{\phi\phi^\dagger})^{-1} \Big|_{p^2 \rightarrow p^2 + i\epsilon} .$$

$$= - \left( \begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \bullet \blacktriangleright \text{---} \\ \phi \quad \phi^\dagger \end{array} \right)^{-1} \Big|_{p^2 \rightarrow p^2 + i\epsilon}$$

## Rezept zur Ableitung der Feynman-Regeln aus $\mathcal{L}$

1. Suche alle Produkte in  $i\mathcal{L}$ , die genau eine bestimmte Auswahl von Feldern enthalten; diese bilden die äußeren Linien des Vertex.

Z.B.:  $-g(\partial_\mu A_\nu)A^\mu B^\nu = -g(\partial_\mu A^\rho)g_{\rho\nu}A^\mu B^\nu$  .



2. Ersetze alle Ableitungen durch  $(-i)$  mal die einlaufenden Impulse der Felder, auf die sie wirken.

$$\longrightarrow -g(-iq_\mu)g_{\rho\nu}A^\rho A^\mu B^\nu = ig(q_\mu g_{\rho\nu})A^\rho A^\mu B^\nu .$$

3. Summiere über alle Permutationen der Indizes und Impulse gleicher äußerer Felder.

$$\longrightarrow ig(q_\mu g_{\rho\nu} + q'_\rho g_{\mu\nu})A^\rho A^\mu B^\nu .$$

4. Streiche alle äußeren Felder.

$$\longrightarrow ig(q_\mu g_{\rho\nu} + q'_\rho g_{\mu\nu}) .$$

Bemerkungen:

- 2. entspricht der Fourier-Transformation,
- 3. + 4. entsprechen der Funktionalableitung.

### Übung: Skalar-Vektor-Vertex

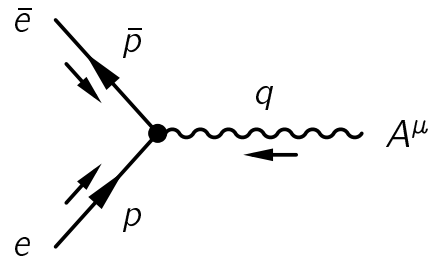
Sei  $A_\mu(x)$  ein Vektorfeld, und  $B(x)$  und  $C(x)$  skalare Felder. Bestimmen Sie die Feynmanregel für die Vertices

(a)  $\mathcal{L}_g = gA^\mu (B\partial_\mu C - C\partial_\mu B)$  .

(b)  $\mathcal{L}_g = gA^\mu A_\mu CD$  .

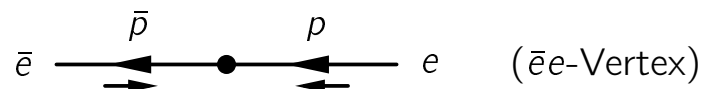
## Feynman-Regeln der QED

$\bar{e}eA$ -Vertex:



1.  $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$
2.  $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$
3.  $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$
4.  $ie\gamma_\mu$

$\bar{e}e$ -Propagator:

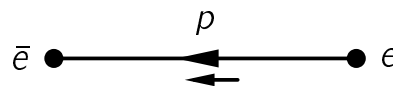


1.  $i\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi$
2.  $i\bar{\psi}(i\gamma_\mu(-ip^\mu) - m)\psi$   
 $= i\bar{\psi}(\not{p} - m)\psi$
3.  $i\bar{\psi}(\not{p} - m)\psi$
4.  $i(\not{p} - m)$

Propagator:

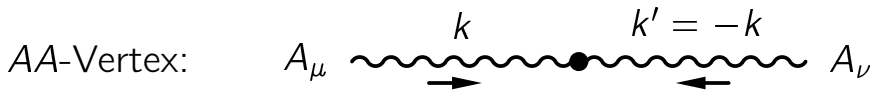
$$- [i(\not{p} - m)]^{-1} = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



AA-Propagator:

$$\begin{aligned}
 1. & -\frac{i}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{i}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\
 & = -\frac{i}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{i}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{i}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\
 & = \frac{i}{2}A_\nu g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu - \frac{i}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A_\nu \partial^\mu \partial^\nu A_\mu + \underbrace{\partial_\rho(\dots)}_{\text{„Oberflächenterm“}} \\
 & \hspace{15em} \rightarrow \text{kein Beitrag}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2. & \frac{i}{2}A_\nu g^{\mu\nu}(-ik_\alpha)(-ik^\alpha)A_\mu - \frac{i}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A_\nu(-ik^\mu)(-ik^\nu)A_\mu \\
 & = A_\mu A_\nu \frac{i}{2} \left[ -k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \right]
 \end{aligned}$$

3. Faktor 2! wegen Symmetrisierung

$$4. -i \left[ k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \right] = - (P_{AA}^{-1})^{\mu\nu} \tag{*}$$

**Übung:** Bestimmen Sie den Propagator aus (\*) mit Hilfe des Ansatzes:

$$P_{AA}^{\mu\nu} = i\tilde{D}^{\mu\nu} = a \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + b \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad P_{AA}^{\mu\nu} (P_{AA}^{-1})_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu.$$

Lösung: Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert

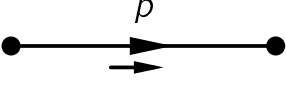
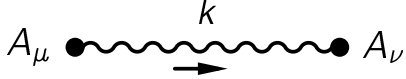
$$\begin{aligned}
 aik^2 &= 1, & a - b \frac{1}{\xi} &= 0, \\
 \implies a &= \frac{-i}{k^2}, & b = \xi a &= -\xi \frac{i}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Ergebnis:

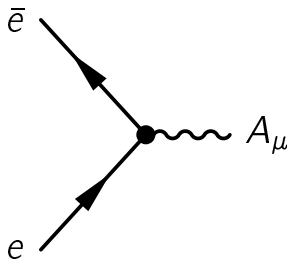
$$i\tilde{D}^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[ -g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right]$$

## Feynman-Regeln der QED (Zusammenfassung):

Propagatoren:

	$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$
	$\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[ -g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right]$

Vertex:

	$ie\gamma_\mu$
---	----------------

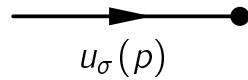
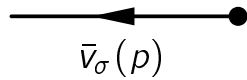
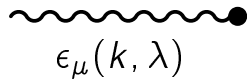
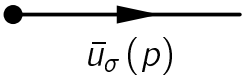
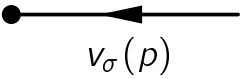
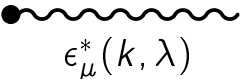
Impulse:

- Impulserhaltung an jedem Vertex,
- Integration über jeden freien Schleifenimpuls:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ .

Dirac-Ketten:

- Reihenfolge der Dirac-Matrizen und -Spinoren verläuft entgegen der Pfeilrichtung im Feynman-Graphen,
- Faktor  $(-1)$  und Dirac-Spurbildung in Fermion-Schleifen,
- Faktor  $(-1)$  für Vertauschung äußerer Fermionlinien.

Für S-Matrixelemente:

äußere Linien:	$e^-$	$e^+$	$\gamma$
einlaufend:			
auslaufend:			

## 2.2 Green'sche und Vertexfunktionen der QED

### a) Photonpropagator

Darstellung der Korrekturen zur Photon-Zweipunktfunction durch die Verkettung von irreduziblen Vertexfunktionen (Selbstenergie-Einsetzungen) und freien Propagatoren: Dyson-Reihe

$$\begin{aligned}
 \text{Diagramm: } \mu \text{---} \bigcirc \text{---} \nu &= \text{Diagramm: } \mu \text{---} \text{---} \nu + \text{Diagramm: } \mu \text{---} \text{---} \text{---} \nu + \text{Diagramm: } \mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu + \dots \\
 G_{\mu\nu}^{AA} &= i\tilde{D}_{\mu\nu} + i(\tilde{D}\Sigma\tilde{D})_{\mu\nu} + i(\tilde{D}\Sigma\tilde{D}\Sigma\tilde{D})_{\mu\nu} + \dots
 \end{aligned}$$

Selbstenergie: Summe aller Schleifendiagramme, die zwei Photonpropagatoren verbinden können und nicht selbst aus zwei durch einen Photonpropagator verbundenen Stücken bestehen.

$$-i\Sigma_{\mu\nu}(k) = \mu \text{---} \text{---} \nu$$

Zerlegung nach Lorentz-Kovarianten:

$$\Sigma_{\mu\nu}^{AA}(k) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \underbrace{\Sigma_T^{AA}(k^2)}_{\text{Transversalanteil}} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \underbrace{\Sigma_L^{AA}(k^2)}_{\text{Longitudinalanteil}}$$

**Übung:** Nehmen Sie an, daß die Funktionen  $\Sigma_T^{AA}(k^2)$  und  $\Sigma_L^{AA}(k^2)$  bekannt sind. Bestimmen Sie damit den korrigierten Photonpropagator als Summe der Dyson-Reihe!

Lösung:

$$G_{\mu\nu}^{AA}(k) = -i \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) (k^2 + \Sigma_T^{AA}(k^2))^{-1} - i \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left( \frac{k^2}{\xi} + \Sigma_L^{AA}(k^2) \right)^{-1}$$

Bemerkung: Photonpropagator in der QED ist eichinvariant  $\implies$  Aufsummation sinnvoll  
 SM  $\rightarrow$  Eichbosonpropagatoren sind nicht eichinvariant.



**Photonselbstenergie:**

Störungsentwicklung:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_{\mu\nu}^{AA}(k) &= \text{Diagram 1} \\
 &+ \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 &+ \mathcal{O}(e^6)
 \end{aligned}$$

Einschleifen-Näherung:

$$\begin{aligned}
 \mu \text{---} \text{Diagram} \text{---} \nu &= -i\Sigma_{\mu\nu}^{(2)AA}(k) + \mathcal{O}(e^4) \\
 &= (-1) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ ie\gamma_\mu \frac{i}{\not{q} - m} ie\gamma_\nu \frac{i}{\not{q} + \not{k} - m} \right\}, \\
 \Rightarrow \Sigma_{\mu\nu}^{(2)AA}(k) &= -ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu (\not{q} + \not{k} + m) \}}{(q^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2]}.
 \end{aligned}$$

UV-Verhalten:  $q^2 \rightarrow \infty$ 

$$\begin{aligned}
 \int d^4q &\sim \int_0^\infty dq q^3 d\Omega; \quad q^2 - m^2, (q+k)^2 - m^2 \sim q^2 \\
 \rightarrow \int \frac{d^4q}{q^4} \{1, q, q^2\} &\sim \int dq \{q^{-1}, 1, q\}
 \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$  Logarithmisch, linear, quadratisch divergente Integrale!

Saubere Definition der Integrale durch „Regularisierung“ erforderlich!

(= Modifikation der Theorie, so daß divergente Integrale definiert, also endlich sind).

## b) Elektronpropagator

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \bigcirc \longleftarrow \bullet \\ p \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \bullet \\ p \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \bigoplus \longleftarrow \bullet \end{array} + \dots \\
 G^{\bar{e}e}(p) = iS(p) + i(S(p) \underbrace{\Sigma^{\bar{e}e}(p)}_{\text{Elektronselfenergie}} S(p)) + \dots
 \end{array}$$

Zerlegung nach Kovarianten:

$$\Sigma^{\bar{e}e}(p) = \not{p} \underbrace{\Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2)}_{\text{Vektoranteil}} + m \underbrace{\Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2)}_{\text{Skalaranteil}}$$

Einschleifen-Näherung: (Feynman-Eichung  $\xi = 1$ )

$$\begin{array}{c} q-p \\ \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \\ p \quad \alpha \quad q \quad \beta \quad p \end{array} = i\Sigma^{\bar{e}e}(p) + \mathcal{O}(e^4)$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} ie\gamma_\alpha \frac{i}{\not{q} - m} ie\gamma_\beta \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(q-p)^2 - \underbrace{\lambda^2}_{\substack{\text{Infinitesimale Photon-} \\ \text{„masse“ zur Regularisie-} \\ \text{rung der IR-Divergenz}}}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{\bar{e}e}(p) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\alpha (\not{q} + m) \gamma^\alpha}{(q^2 - m^2)[(q-p)^2 - \lambda^2]}$$

UV-Verhalten:  $\int \frac{dq}{q} \{1, q\} \Rightarrow$  logarithmische, lineare Divergenz.

**c) Photon-Elektron-Vertex**

$$\Gamma_{\mu}^{A\bar{e}e}(k, -p', p) = ie\gamma_{\mu} + ie \underbrace{\Lambda_{\mu}(p', p)}_{\text{Vertexkorrektur}} .$$

Einschleifen-Näherung: (Feynman-Eichung  $\xi = 1$ )

$$= ie\Lambda_{\mu}(p', p) + \mathcal{O}(e^5)$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} ie\gamma_{\alpha} \frac{i}{\not{q} + \not{p}' - m} ie\gamma_{\mu} \frac{i}{\not{q} + \not{p} - m} ie\gamma_{\beta} \cdot \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 - \lambda^2}$$

$$\rightarrow \Lambda_{\mu}(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_{\alpha}(\not{q} + \not{p}' + m)\gamma_{\mu}(\not{q} + \not{p} + m)\gamma_{\alpha}}{(q^2 - \lambda^2)[(q + p)^2 - m^2][(q + p')^2 - m^2]}$$

UV-Verhalten:  $\int \frac{dq}{q} \Rightarrow$  logarithmische Divergenz.

**Übung:**

Überlegen Sie sich eine Faustformel zur Bestimmung des Divergenzgrades eines beliebigen Einschleifen-Diagramms in der QED (in Feynman-Eichung).

## 2.3 Einschleifen-Integrale

### Regularisierung:

„Erweiterung“ der Theorie durch Modifikation des UV-Verhaltens, so daß divergente Integrale endlich werden.

Einführung eines neuen freien Parameters  $\delta$ , so daß sich formal die ursprüngliche Theorie ergibt für  $\delta \rightarrow \delta_0$ .

$I^{\text{reg}}(\delta)$  ist endlich für allgemeines  $\delta$ , aber  $I^{\text{reg}}(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow \delta_0} \infty$  für ursprünglich divergente Integrale. Für ursprünglich konvergente Integrale muß  $\lim_{\delta \rightarrow \delta_0} I^{\text{reg}}(\delta)$  das richtige Ergebnis liefern.

### Renormierung:

Korrekturterme zur Lagrangedichte zur Restaurierung der Eichinvarianz und „Beseitigung“ der Divergenzen durch Neudefinition der Inputparameter:

$$\begin{array}{ccccc}
 m_0 & = & m & + & \delta m \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{ursprüngliche,} & & \text{renormierte} & & \text{„Massen-} \\
 \text{„nackte“ Masse} & & \text{Masse} & & \text{Counterterm“} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \infty & & \text{endlich} & & \infty
 \end{array}
 \quad \text{für } \delta \rightarrow \delta_0$$

→ Vollständige Absorption der Divergenzen in einer endlichen Anzahl von Parametern. In *renormierbaren Theorien* (z.B. QED, SM) bleibt die Anzahl der Parameter in allen Ordnungen gleich.

### Ergebnis:

- $\delta \rightarrow \delta_0$  durchführbar nach Renormierung.  
 $\implies$  Endliche Ergebnisse ausgedrückt durch renormierte Parameter.
- Unabhängigkeit von der Art der Regularisierung.

## Dimensionale Regularisierung

Berechnung von Loop-Integralen in  $D = 4 - \epsilon$  Dimensionen:

(Achtung: oft auch  $D = 4 - 2\epsilon$ )

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \longrightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} .$$

Integrale, die für  $D = 4$  UV-divergent sind, sind konvergent für hinreichend kleines  $D$ .

→ Analytische Fortsetzung zu beliebigem komplexem  $D$ !

(Erwartung: Divergenzen → Singularitäten in der komplexen  $D$ -Ebene.)

( $\mu$  = beliebige Referenzmasse)

### Rechenregeln (in $D$ Dimensionen)

Metrik:  $g^{\mu\nu}$  ist  $D$ -dimensional:  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1$ ;

$$\delta_{\mu}^{\mu} = g_{\mu}^{\mu} = D .$$

Dirac-Matrizen:  $\gamma^{\mu}$  sind entsprechend zu verallgemeinern:

(in geradzahligen Dimensionen  $D$  :  $\dim(\gamma^{\mu}) = 2^{D/2}$ ),

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} ,$$

$$\text{Tr} \{\mathbf{1}\} = 4 . \quad (\text{per Definition})$$

Vorteile: Lorentzinvarianz, Eichinvarianz, Einfachheit.

Probleme:  $\gamma_5$ -Algebra, SUSY → keine konsistente Definition in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen möglich.

### Übung:

Zeigen Sie, ausgehend von  $g_{\mu}^{\mu} = D$  und  $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}$  in  $D$  Dimensionen:

$$\gamma^{\rho} \gamma_{\rho} = D \cdot \mathbf{1} ,$$

$$\gamma^{\rho} \gamma_{\mu} \gamma_{\rho} = (2 - D) \gamma_{\mu} ,$$

$$\gamma^{\rho} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} = 4g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} + (D - 4) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} .$$

### Bemerkungen zur mathematischen Definition

Einbettung in  $\infty$ -dimensionalen Raum:

- Äußere Impulse  $\vec{e}_j$  spannen „Parallelraum“ auf:

$$\vec{k} = \vec{k}_{\parallel} + \vec{k}_{\perp}, \quad \vec{k}_{\parallel} = \sum_{j=1}^J k^j \vec{e}_j = \text{paralleler Anteil},$$

$$\vec{k}_{\perp} = \text{orthogonaler Anteil}.$$

- Funktionen  $f(\vec{k})$  hängen nicht von der Richtung von  $\vec{k}_{\perp}$  ab.

Definition:

$$\int d^D k f(\vec{k}) := \Omega_{D-J} \cdot \int dk^1 \dots dk^J \int dk_{\perp} k_{\perp}^{D-J-1} f(\vec{k})$$

$$\Omega_{D-J}: \text{Raumwinkel in } (D - J) \text{ Dimensionen, } \Omega_{D-J} = \frac{2\pi^{(D-J)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-J}{2}\right)}.$$

→ Analytische Fortsetzung zu komplexem  $D$  möglich.

Eigenschaften:

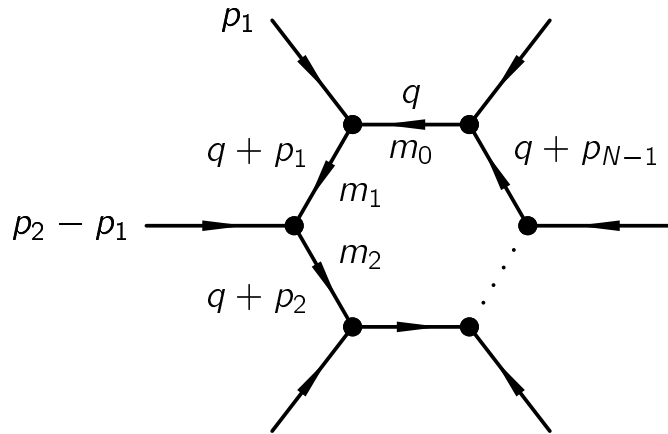
- Linearität,
- Skalierungseigenschaft:  $\int d^D k f(\lambda \vec{k}) = \lambda^{-D} \int d^D k f(\vec{k})$  für  $\lambda > 0$ ,
- Translationsinvarianz,
- Unabhängigkeit von der Paralleldimension  $J$ ,
- $\int d^D k (\vec{k}^2)^{\alpha} = 0$  für alle  $\alpha$  (Definition!),
- Partielle Integration:  $\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^{\mu}} f(\vec{k}^2) = 0$  (Oberflächenintegral),
- Isotropie:  $\int d^D k k^i k^j f(\vec{k}^2) = \frac{\delta^{ij}}{D} \int d^D k \vec{k}^2 f(\vec{k}^2)$ .

Bemerkung: dimensionale Regularisierung bewirkt eine effektive Modifikation der Physik bei Skalen, die wesentlich größer oder wesentlich kleiner sind als  $\mu$  und regularisiert dadurch gleichzeitig UV- und IR-Singularitäten.

## Standardisierte Einschleifen-Integrale

Allgemeines  $N$ -Punkt-Tensorintegral:

$$T_{\mu_1 \dots \mu_M}^N(p_1, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q_{\mu_1} \dots q_{\mu_M}}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon] \dots [(q + p_{N-1})^2 - m_{N-1}^2 + i\epsilon]} .$$



Konvention:  $T^1 \rightarrow A$ ,  $T^2 \rightarrow B$ ,  $T^3 \rightarrow C, \dots$

Skalare Integrale ( $M = 0$ ):  $A_0, B_0, C_0, \dots$

Kovariantzerlegung von Tensorintegralen:

$$B^\mu = p_1^\mu B_1 ,$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_1^\nu B_{11} ,$$

$$C^\mu = p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2 ,$$

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} C_{00} + p_1^\mu p_1^\nu C_{11} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) C_{12} + p_2^\mu p_2^\nu C_{22} ,$$

$$C^{\mu\nu\rho} = (p_1^\mu g^{\nu\rho} + p_1^\nu g^{\mu\rho} + p_1^\rho g^{\mu\nu}) C_{001} + (p_2^\mu g^{\nu\rho} + \dots) C_{002} \\ + p_1^\mu p_1^\nu p_1^\rho C_{111} + (p_1^\mu p_1^\nu p_2^\rho + p_1^\mu p_2^\nu p_1^\rho + p_2^\mu p_1^\nu p_1^\rho) C_{112} \\ + (p_1^\mu p_2^\nu p_2^\rho + \dots) C_{122} + p_2^\mu p_2^\nu p_2^\rho C_{222} ,$$

...

Allgemein: Aufbau von  $T_{\mu_1 \dots \mu_M}^N$  aus allen symmetrischen Tensorstrukturen  $M$ . Stufe, die sich aus den  $p_1^\mu, \dots, p_{N-1}^\mu$  und  $g^{\mu\nu}$  bilden lassen.

## Hilfsintegral

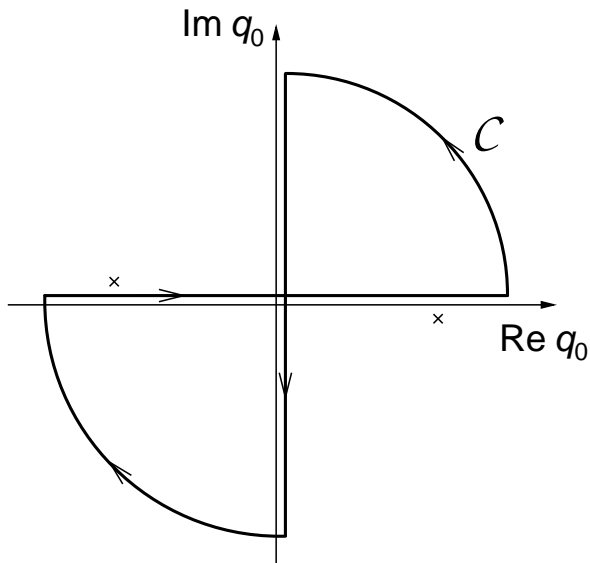
$$I_n(A) = \int d^D q \frac{1}{(q^2 - A + i\epsilon)^n}, \quad D < 2n, \quad A > 0.$$

### 1. Schritt: Wick-Drehung

Pole in  $q_0$ -Ebene:

$$0 = q^2 - A + i\epsilon = q_0^2 - \vec{q}^2 - A + i\epsilon,$$

$$q_0 = \pm \sqrt{\vec{q}^2 + A - i\epsilon} = \pm \sqrt{\vec{q}^2 + A} \mp i\epsilon'.$$



$$\oint_C dq_0 (q^2 - A + i\epsilon)^{-n} = 0,$$

Kreisbeiträge verschwinden:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \dots = \int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 \dots$$

Euklidische Koordinaten:

$$q_0 = iq_{E,0}, \quad q^k = q_E^k,$$

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 = -q_{E,0}^2 - \vec{q}_E^2 = -q_E^2 \leq 0,$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 \dots = i \int_{-\infty}^{\infty} dq_{E,0} \dots$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_n(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \int d^{D-1} \vec{q} (q_0^2 - \vec{q}^2 - A + i\epsilon)^{-n} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} dq_{E,0} \int d^{D-1} \vec{q}_E (-q_{E,0}^2 - \vec{q}_E^2 - A + i\epsilon)^{-n} \\ &= i \int d^D q_E (-1)^n (q_E^2 + A - i\epsilon)^{-n} \end{aligned}$$



## 2. Schritt: Integration in Polarkoordinaten

$$\int d^D q_E = \int_{\Omega_D} d\Omega_D \int_0^\infty dq_E q_E^{D-1} = \int_{\Omega_D} d\Omega_D \int_0^\infty dq_E^2 \frac{1}{2} (q_E^2)^{\frac{D}{2}-1},$$

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} = D\text{-dimensionaler Raumwinkel.}$$

[Herleitung:  $\sqrt{\pi}^D = \left(\int_0^\infty dx e^{-x^2}\right)^D = \int dx_1 \dots dx_D e^{-\sum x_i^2}$   
 $= \int d\Omega_D \int_0^\infty dx x^{D-1} e^{-x^2} = \int d\Omega_D \frac{1}{2} \int_0^\infty dx^2 (x^2)^{(D-2)/2} e^{-x^2} = \int d\Omega_D \frac{1}{2} \Gamma(D/2)$ ]

$$\begin{aligned} \rightarrow I_n(A) &= i(-1)^n \Omega_D \int_0^\infty dq_E^2 \frac{1}{2} (q_E^2)^{\frac{D}{2}-1} (q_E^2 + A - i\epsilon)^{-n} \\ &= i(-1)^n \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dx \frac{1}{2} x^{\frac{D}{2}-1} (x + A - i\epsilon)^{-n} \\ &= i(-1)^n \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} (A - i\epsilon)^{\frac{D}{2}-n} \underbrace{\int_0^\infty dy y^{\frac{D}{2}-1} (1+y)^{-n}}_{= B\left(\frac{D}{2}, n - \frac{D}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\left[ \text{Beta-Funktion: } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \right]$$

$$= i(-1)^n \pi^{D/2} \frac{\Gamma\left(n - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(n)} (A - i\epsilon)^{\frac{D}{2}-n}.$$

Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion:

- $\Gamma(z)$  ist meromorph, Pole bei  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ ;  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  ist analytisch,
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,
- $\Gamma(n+1) = n!$  für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ,
- $\Gamma(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{z} - \gamma_E + \mathcal{O}(z)$  mit  $\gamma_E = -\Gamma'(1) = 0.5772\dots$  (Euler-Konstante)

→ Analytische Fortsetzung in  $D$  und  $A$  möglich!

⇒ UV-Divergenzen treten als Pole in  $(D-4)$  auf.

## Skalare Integrale

**1-Punkt-Funktion**  $A_0(m)$ :

$$\begin{aligned} A_0(m) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q (q^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} I_1(m^2) \\ &= -m^2 \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\frac{D-4}{2}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) \end{aligned}$$

**Übung:** Entwickeln Sie  $A_0(m)$  für  $D \rightarrow 4$ !

Hinweise: Bestimmen Sie zunächst die Taylorentwicklung von  $x^y$  für  $y \rightarrow 0$ ,  $\Gamma(z-1)$  für  $z \rightarrow 0$  sowie  $1/(D-2)$  für  $D \rightarrow 4$  und zeigen Sie damit

$$\begin{aligned} \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\frac{D-4}{2}} &= 1 + \frac{D-4}{2} \log\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \mathcal{O}((D-4)^2) , \\ \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) &= -\left(\frac{2}{4-D} - \gamma_E + 1\right) + \mathcal{O}(D-4) . \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} A_0(m) &= m^2 \left[ \underbrace{\frac{2}{4-D} - \gamma_E + \log 4\pi - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)}_{=: \Delta} + 1 \right] + \mathcal{O}(D-4) \\ &= m^2 \left[ \Delta - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 1 \right] + \mathcal{O}(D-4) . \end{aligned}$$

Beachte:  $(D-4) A_0(m) = -2m^2 + \mathcal{O}(D-4)$ .

**2-Punkt-Funktion:**

$$B_0(p_1, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \left\{ \underbrace{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)}_{=: a} \underbrace{[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]}_{=: b} \right\}^{-1}$$

Feynman-Trick:  $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx [a(1-x) + bx]^{-2}$ , (Übung)

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \left\{ (q^2 - m_0^2 + i\epsilon)(1-x) + [(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]x \right\}^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ (q^2 + x(2qp_1) + x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) - m_0^2 + i\epsilon) \right\}^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{(q + xp_1)^2}_{=: q'^2} \underbrace{-x^2 p_1^2 + x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) - m_0^2 + i\epsilon}_{=: -A} \right\}^{-2}$$

$$\rightarrow B_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dx \underbrace{\int d^D q' (q'^2 - A + i\epsilon)^{-2}}_{= I_2(A)}$$

$$B_0 = (4\pi\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \int_0^1 dx [x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon]^{\frac{D-4}{2}}$$

$$= \Delta - \int_0^1 dx \log \left[ \frac{x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right] + \mathcal{O}(D-4)$$

Beachte:  $(D-4) B_0 = -2 + \mathcal{O}(D-4)$ .

Bemerkungen:

- $B_0(p_1, m_0, m_1)$  hängt nur von  $p_1^2, m_0, m_1$  ab.  
 $\rightarrow$  Alternative Notation:  $B_0(p_1^2, m_0, m_1)$ .
- Symmetrie:  $B_0(p_1^2, m_0, m_1) = B_0(p_1^2, m_1, m_0)$ .

**Berechnung von  $B_0$  für Spezialfälle:**

- $p_1 = p$ ,  $m_0 = 0$ ,  $m_1 = m$ :

$$\begin{aligned}
 B_0(p^2, 0, m) &= \Delta - \int_0^1 dx \log \left[ \frac{x^2 p^2 - x(p^2 - m^2) - i\epsilon}{\mu^2} \right] \\
 &= \Delta + \log \mu^2 - \underbrace{\int_0^1 dx \log x}_{= -1} - \underbrace{\int_0^1 dx \log [m^2 - p^2 + x p^2 - i\epsilon]}_{= \frac{1}{p^2} \cdot \int_{m^2 - p^2 - i\epsilon}^{m^2 - i\epsilon} dy \log y} \\
 &= \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 2 + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \log \left( \frac{m^2 - p^2 - i\epsilon}{m^2} \right)
 \end{aligned}$$

**Übung:** Berechnen Sie  $B_0(0, 0, m)$ ,  $B_0(m^2, 0, m)$  und  $B_0(p^2, 0, 0)$ !

Lösung:

$$\begin{aligned}
 B_0(0, 0, m) &= \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1, \\
 B_0(m^2, 0, m) &= \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 2, \\
 B_0(p^2, 0, 0) &= \Delta - \log \left( \frac{-p^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right) + 2.
 \end{aligned}$$

- $p_1 = p, m_0 = m_1 = m, |p^2| \ll m^2$ :

$$\begin{aligned}
 B_0(p^2, m, m) &= \Delta - \int_0^1 dx \log \left[ \frac{x^2 p^2 - x p^2 + m^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right] \\
 &= \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \int_0^1 dx \log \left[ 1 + \frac{p^2}{m^2} x(x-1) - i\epsilon' \right] \\
 &= \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dx x(1-x) + \mathcal{O} \left( \frac{p^4}{m^4} \right) \\
 &= \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{p^2}{6m^2} + \mathcal{O} \left( \frac{p^4}{m^4} \right) .
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_0(0, m, m) = \Delta - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) ,$$

$$B'_0(0, m, m) = \left. \frac{\partial}{\partial p^2} B_0(p^2, m, m) \right|_{p^2=0} = \frac{1}{6m^2} .$$

**Übung:** Führen Sie  $A_0(m)$ ,  $B_0(0, 0, m)$  und  $B_0(m^2, 0, m)$  auf  $B_0(0, m, m)$  zurück!

Lösung:

$$A_0(m) = m^2 B_0(0, 0, m) = m^2 (B_0(0, m, m) + 1)$$

$$B_0(m^2, 0, m) = B_0(0, m, m) + 2 .$$

**Übung:** Zeigen Sie für  $\lambda \ll m$ :

$$B'_0(m^2, \lambda, m) \equiv \left. \frac{\partial B_0(p^2, \lambda, m)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m^2} = -\frac{1}{m^2} \left[ \log \frac{\lambda}{m} + 1 \right] + \mathcal{O} \left( \frac{\lambda^2}{m^4} \right) .$$

**3-Punkt-Funktion**  $C_0(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2)$ :Integral ist UV-konvergent.  $\rightarrow D = 4$ .

$$C_0 = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \left\{ \underbrace{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)}_{=: a} \underbrace{[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]}_{=: b} \underbrace{[(q + p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon]}_{=: c} \right\}^{-1}$$

$$\text{Feynman-Trick: } \frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [a(1-x-y) + bx + cy]^{-3},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ (q^2 - m_0^2 + i\epsilon)(1-x-y) + [(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]x \right. \\ &\quad \left. + [(q + p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon]y \right\}^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ q^2 + x2qp_1 + y2qp_2 + x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) \right. \\ &\quad \left. + y(p_2^2 - m_2^2 + m_0^2) - m_0^2 + i\epsilon \right\}^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ (q + xp_1 + yp_2)^2 - x^2p_1^2 - y^2p_2^2 - xy2p_1p_2 \right. \\ &\quad \left. + x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + y(p_2^2 - m_2^2 + m_0^2) - m_0^2 + i\epsilon \right\}^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (q'^2 - A + i\epsilon)^{-3}, \quad q' := q + xp_1 + yp_2. \end{aligned}$$

$$\rightarrow C_0 = \frac{2}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \underbrace{\int d^4q' (q'^2 - A + i\epsilon)^{-3}}_{= I_3(A)}.$$

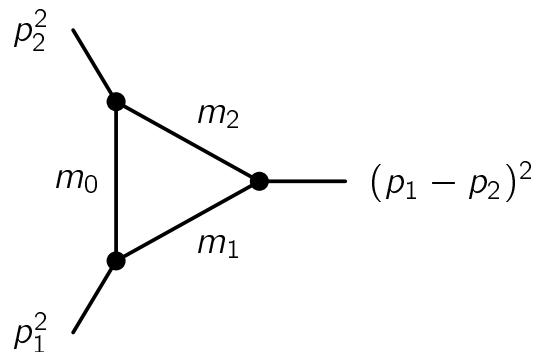
$$C_0 = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [x^2 p_1^2 + y^2 p_2^2 + xy 2p_1 p_2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) - y(p_2^2 - m_2^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon]^{-1}.$$

Beachte:  $(D-4)C_0 = \mathcal{O}(D-4)$ .  $C_0$  ist UV-endlich.

Bemerkungen zur  $C_0$ -Funktion:

- Alternative Notation:

$$C_0(\underbrace{p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2}_{\text{unabhängige Skalarprodukte}}, m_0, m_1, m_2)$$



- Diskrete Symmetrien durch Permutation äußerer Beine, z.B.:  
 $C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) = C_0((p_1 - p_2)^2, p_2^2, p_1^2, m_1, m_2, m_0)$ .
- Allgemeine Lösung des  $\int dx \int dy$ -Integrals durch:
  1. Linearisierung des Nenners in  $x$  bzw.  $y$  durch Euler-Transformation, d.h. z.B.  $x \rightarrow x + \alpha y$  und Wahl von  $\alpha$ , so daß kein  $y^2$ -Term übrig bleibt.  
 $\rightarrow$   $y$ -Integration!
  2. Zerlegung der quadratischen Formen in Linearfaktoren.  
 $\rightarrow$  Integrale der Form:  $\int dx \frac{\log(ax + b)}{cx + d}$ .
  3. Endergebnis ausdrückbar durch  $\log$ ,  $\log^2$ ,  $\text{Li}_2$ .

$$\text{Dilogarithmus: } \text{Li}_2(x) = - \int_0^1 \frac{dt}{t} \log(1 - xt), \quad |\arg(1 - x)| < \pi.$$

Beispiel ( $m_0 =: \lambda$ ,  $m_1 = m_2 =: m$ ;  $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ ,  $(p_1 - p_2)^2 =: t$ ;  $\lambda \ll m$ ):

$$C_0(m^2, t, m^2, \lambda, m, m)$$

$$= \frac{x_t}{m^2(1 - x_t^2)} \left\{ \ln x_t \left[ 2 \ln(1 + x_t) - \frac{1}{2} \ln x_t - 2 \ln \frac{\lambda}{m} \right] + \frac{\pi^2}{6} + 2 \text{Li}_2(-x_t) \right\},$$

$$x_t = \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{t + i\epsilon}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{t + i\epsilon}} + 1}.$$

## Tensorintegrale

### Allgemeines Verfahren:

Algebraische Reduktion der Tensorkoeffizienten  $B_1, B_{11}, B_{00}, C_1, \dots$  auf skalare Integrale  $A_0, B_0, C_0, \dots$ .

- Gut geeignet für analytische Rechnungen, automatisierbar
- Nachteil: Problematisch bei der numerischen Auswertung

Vorgehen: Rekursiver Algorithmus.

**1. Schritt:** Kontraktion der Integraldarstellung und der Kovariantenzerlegung von  $T_{\mu_1 \dots \mu_M}^N$  mit den äußeren Impulsen  $p_i^{\mu_1}$  und der Metrik  $g^{\mu_1 \mu_2}$ .

(a) im Integranden:

$$\bullet \quad p_i^{\mu_1} q_{\mu_1} = \underbrace{\frac{1}{2} [(q + p_i)^2 - m_i^2]}_{\text{kürzt } i. \text{ Nenner}} - \underbrace{\frac{1}{2} (q^2 - m_0^2)}_{\text{kürzt 0. Nenner}} - \underbrace{\frac{1}{2} (p_i^2 - m_i^2 + m_0^2)}_{\text{Tensor } (M-1). \text{ Stufe}}$$

(N - 1)-Punkt-Integrale

$$\bullet \quad g^{\mu_1 \mu_2} q_{\mu_1} q_{\mu_2} = \underbrace{(q^2 - m_0^2)}_{\text{kürzt 0. Nenner}} + \underbrace{m_0^2}_{\text{Tensor } (M-2). \text{ Stufe}}$$

(N - 1)-Punkt-Integral

$\implies$  Alle Kontraktionen von  $T_{\mu_1 \dots \mu_M}^N$  sind auf Tensorintegrale der Stufen  $(M - 2)$  und  $(M - 1)$  der  $(N - 2)$ - und  $(N - 1)$ -Punkt-Integrale zurückführbar.

(b) in der Kovariantenzerlegung: Linearkombination von Tensorkoeffizienten.

**2. Schritt:** Auflösung des linearen Gleichungssystems nach den Tensorkoeffizienten.



$B_\mu(p, m_0, m_1)$ :

Abkürzung:  $\langle \dots \rangle_q := \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \dots$

$$\begin{aligned} B_\mu(p, m_0, m_1) &= \left\langle \frac{q_\mu}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q \\ &= p_\mu B_1(p^2, m_0, m_1) . \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $p^\mu$  liefert:

$$\begin{aligned} p^2 B_1 &= \left\langle \frac{pq}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q \\ &= \left\langle \frac{\frac{1}{2}[(q+p)^2 - m_1^2] - \frac{1}{2}(q^2 - m_0^2) - \frac{1}{2}(p^2 - m_1^2 + m_0^2)}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{q^2 - m_0^2} \right\rangle_q - \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{(q+p)^2 - m_1^2} \right\rangle_q \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle \frac{p^2 - m_1^2 + m_0^2}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q \\ &= \frac{1}{2} A_0(m_0) - \frac{1}{2} A_0(m_1) - \frac{1}{2} (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_0 . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_1(p^2, m_0, m_1) = \frac{1}{2p^2} [A_0(m_0) - A_0(m_1) - (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_0(p^2, m_0, m_1)] .$$

Divergender Anteil von  $B_1$ :  $B_1 = -\frac{1}{2}\Delta + \text{endlicher Anteil}$

$$\Rightarrow (D-4) B_1 = 1 + \mathcal{O}(D-4) .$$

Beispiel:

$$B_1(p^2, m, m) = -\frac{1}{2} B_0(p^2, m, m) .$$

**Übung:** Berechnen Sie  $A_{\mu\nu}(m) = \left\langle \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - m^2} \right\rangle_q$ !

$B_{\mu\nu}(p, m_0, m_1)$ :

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(p, m_0, m_1) &= \left\langle \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q \\ &= g_{\mu\nu} B_{00}(p^2, m_0, m_1) + p_\mu p_\nu B_{11}(p^2, m_0, m_1). \end{aligned}$$

Kontraktion mit  $g^{\mu\nu}$ :

$$DB_{00} + p^2 B_{11} = \left\langle \frac{(q^2 - m_0^2) + m_0^2}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q = A_0(m_1) + m_0^2 B_0.$$

Kontraktion mit  $p^\mu$ :

$$\begin{aligned} &p_\nu (B_{00} + p^2 B_{11}) \\ &= \left\langle \frac{q_\nu \left\{ \frac{1}{2}[(q+p)^2 - m_1^2] - \frac{1}{2}(q^2 - m_0^2) - \frac{1}{2}(p^2 - m_1^2 + m_0^2) \right\}}{(q^2 - m_0^2)[(q+p)^2 - m_1^2]} \right\rangle_q \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \frac{q_\nu}{q^2 - m_0^2} \right\rangle_q}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \frac{q_\nu}{(q+p)^2 - m_1^2} \right\rangle_q}_{= \left\langle \frac{q'_\nu - p_\nu}{q'^2 - m_1^2} \right\rangle_{q'}} - \frac{1}{2} (p^2 - m_1^2 + m_0^2) \underbrace{B_\nu}_{= p_\nu B_1} \\ &= p_\nu \left[ \frac{1}{2} A_0(m_1) - \frac{1}{2} (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1 \right]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Lineares Gleichungssystem für  $B_{11}$ ,  $B_{00}$ :

$$\begin{aligned} DB_{00} + p^2 B_{11} &= A_0(m_1) + m_0^2 B_0, \\ B_{00} + p^2 B_{11} &= \frac{1}{2} A_0(m_1) - \frac{1}{2} (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1. \end{aligned}$$

**Übung:** Drücken Sie  $B_{00}$  bzw.  $B_{11}$  durch  $A_0$ ,  $B_0$  und  $B_1$  aus und betrachten Sie den Grenzfall  $D \rightarrow 4$ ! Bestimmen Sie auch die divergenten Anteile.

Lösung:

$$B_{00} = \frac{1}{2(D-1)} [A_0(m_1) + 2m_0^2 B_0 + (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1] ,$$

$$B_{11} = \frac{1}{2(D-1)p^2} [(D-2)A_0(m_1) - 2m_0^2 B_0 - D(p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1] .$$

Verhalten für  $D \rightarrow 4$ :

$$B_{00} = \frac{1}{6} \left[ A_0(m_1) + 2m_0^2 B_0 + (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1 + m_0^2 + m_1^2 - \frac{p^2}{3} \right] ,$$

$$B_{11} = \frac{1}{6p^2} \left[ 2A_0(m_1) - 2m_0^2 B_0 - 4(p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1 - m_0^2 - m_1^2 + \frac{p^2}{3} \right] .$$

Divergente Anteile:

$$B_{00} = -\frac{1}{12} [p^2 - 3(m_0^2 + m_1^2)] \Delta + \text{endliche Anteile},$$

$$B_{11} = \frac{1}{3} \Delta + \text{endliche Anteile}.$$

$$\rightarrow (4-D)B_{00} = \frac{1}{6} [p^2 - 3(m_0^2 + m_1^2)] + \mathcal{O}(D-4) ,$$

$$(4-D)B_{11} = -\frac{2}{3} + \mathcal{O}(D-4) .$$

$C_\mu(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2)$ :

$$C_\mu = \left\langle \frac{q_\mu}{(q^2 - m_0^2)[(q + p_1)^2 - m_1^2][(q + p_2)^2 - m_2^2]} \right\rangle_q$$

$$= p_{1,\mu} C_1 + p_{2,\mu} C_2 .$$

Kontraktion mit  $p_1^\mu$ :

$$p_1^2 C_1 + p_1 p_2 C_2$$

$$= \left\langle \frac{\frac{1}{2}[(q + p_1)^2 - m_1^2] - \frac{1}{2}(q^2 - m_0^2) - \frac{1}{2}(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2)}{(q^2 - m_0^2)[(q + p_1)^2 - m_1^2][(q + p_2)^2 - m_2^2]} \right\rangle_q$$

$$= \frac{1}{2} B_0(p_2^2, m_0, m_2) - \frac{1}{2} B_0((p_1 - p_2)^2, m_1, m_2) - \frac{1}{2} (p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) C_0 .$$

Kontraktion mit  $p_2^\mu$ : wie mit  $p_1^\mu$ , aber  $1 \leftrightarrow 2$  .

→ Gleichungssystem für  $C_{1,2}$ :

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} B_0(p_2^2, m_0, m_2) - \frac{1}{2} B_0((p_1 - p_2)^2, m_1, m_2) - \frac{1}{2} f_1 C_0 \\ \frac{1}{2} B_0(p_1^2, m_0, m_1) - \frac{1}{2} B_0((p_1 - p_2)^2, m_1, m_2) - \frac{1}{2} f_2 C_0 \end{pmatrix}$$

mit:  $f_i = p_i^2 - m_i^2 + m_0^2$ ,  $i = 1, 2$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} B_0(p_2^2, m_0, m_2) - \frac{1}{2} B_0((p_1 - p_2)^2, m_1, m_2) - \frac{1}{2} f_1 C_0 \\ \frac{1}{2} B_0(p_1^2, m_0, m_1) - \frac{1}{2} B_0((p_1 - p_2)^2, m_1, m_2) - \frac{1}{2} f_2 C_0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

$C_{1,2}$  sind UV-konvergent.

$$\rightarrow (D - 4) C_{1,2} = \mathcal{O}(D - 4) .$$

## 2.4 QED-Korrekturen in Einschleifen-Näherung

### (a) Photonselbstenergie

$$\Sigma_{\mu\nu}^{AA} = -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu (\not{q} + \not{k} + m) \}}{(q^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2]} .$$

**Übung:** Berechnung der Spur im Zähler:

$$\text{Tr} \{ \dots \} = 4(2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) + 4(q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu - qk g_{\mu\nu}) + 4m^2 g_{\mu\nu} .$$

$g_{\mu\nu}$ -Term:

$$-4(q^2 + qk - m^2) = -2(q^2 - m^2) - 2[(q+k)^2 - m^2] + 2k^2 .$$

Zurückführung auf Standardintegrale:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu}^{AA} &= -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{4(2q_\mu q_\nu + q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu)}{(q^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu\nu} \left[ \frac{-2}{(q+k)^2 - m^2} + \frac{-2}{q^2 - m^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2k^2}{(q^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2]} \right] \right\} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ 4(2B_{\mu\nu} + k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu) \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu\nu} [-2A_0(m) - 2A_0(m) + 2k^2 B_0] \right\} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ 8g_{\mu\nu} B_{00} + 8k_\mu k_\nu B_{11} + 8k_\mu k_\nu B_1 \right. \\ &\quad \left. - 4g_{\mu\nu} A_0(m) + 2k^2 g_{\mu\nu} B_0 \right\} , \\ \Sigma_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ g_{\mu\nu} \left[ 2B_{00} - A_0(m) + \frac{1}{2} k^2 B_0 \right] + k_\mu k_\nu \left[ 2B_{11} + 2B_1 \right] \right\} , \end{aligned}$$

wobei:  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137.0\dots =$  Feinstrukturkonstante,  $B\dots = B\dots(k^2, m, m)$  .

Zerlegung in  $\Sigma_T^{AA}$  und  $\Sigma_L^{AA}$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mu\nu}^{AA}(k) &= \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Sigma_T^{AA}(k^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Sigma_L^{AA}(k^2), \\ \Sigma_T^{AA}(k^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2B_{00} + \frac{1}{2}k^2 B_0 - A_0(m) \right], \\ \Sigma_L^{AA}(k^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2B_{00} + 2k^2(B_{11} + B_1) + \frac{1}{2}k^2 B_0 - A_0(m) \right].\end{aligned}$$

**Übung:** Reduktion der Tensorkoeffizienten

$$\begin{aligned}\Sigma_T^{AA}(k^2) &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[ (k^2 + 2m^2)B_0(k^2, m, m) - \frac{1}{3}k^2 - 2m^2 B_0(0, m, m) \right], \\ \Sigma_L^{AA}(k^2) &\equiv 0.\end{aligned}$$

**Allgemeine Struktur von  $\Sigma_{\mu\nu}^{AA}$ :**

- $\Sigma_L^{AA}(k^2) \equiv 0$  gilt in jeder Schleifen-Ordnung als Folge der Erhaltung des elektromagnetischen Stromes:  $\partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) = 0 \Rightarrow k^\mu \Sigma_{\mu\nu}^{AA}(k) \equiv 0$ ,
- $\Sigma_{\mu\nu}^{AA}(k)$  ist für  $k \rightarrow 0$  analytisch, woraus wegen  $\Sigma_L^{AA}(k^2) \equiv 0$  folgt:  
 $\Sigma_T^{AA}(0) = 0$ .

$\Rightarrow$  Allgemeine Form des Photonpropagators:

$$G_{\mu\nu}^{AA}(k) = \frac{-i}{k^2(1 + \Pi^{AA}(k^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \xi \frac{i}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

mit der „Vakuumpolarisation“:

$$\Pi^{AA}(k^2) = \frac{1}{k^2} \Sigma_T^{AA}(k^2).$$

**Grenzfälle von  $\Sigma_T^{AA}(k^2)$ :**

- kleine Impulsüberträge:  $|k^2| \ll m^2$ .

$$B_0(k^2, m, m) = \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{k^2}{6m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k^4}{m^4}\right),$$

$$\rightarrow \Sigma_T^{AA}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \left( \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{k^4}{m^4}\right),$$

$$\Pi^{AA}(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right).$$

- große Impulsüberträge:  $|k^2| \gg m^2$ .

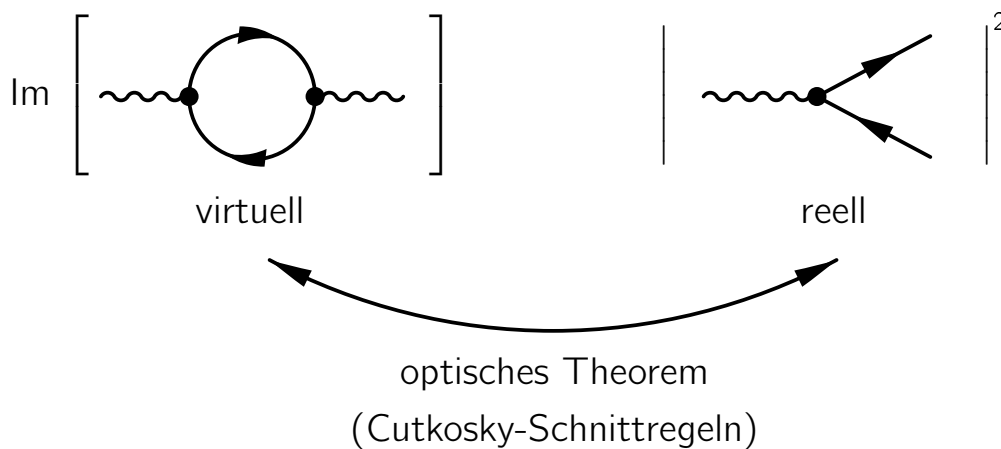
$$B_0(k^2, m, m) \sim B_0(k^2, 0, 0) = \Delta - \log \left( \frac{-k^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right) + 2,$$

$$\rightarrow \Sigma_T^{AA}(k^2) \sim \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \left[ \Delta - \log \frac{|k^2|}{\mu^2} + i\pi\Theta(k^2) + \frac{5}{3} \right].$$

**Bedeutung von  $\text{Im} \{ \Sigma_T^{AA}(k^2) \}$ :**

$$\text{Im} \{ \Sigma_T^{AA}(k^2) \} : \begin{cases} = 0 & \text{für } k^2 < (m_1 + m_2)^2 = 4m^2, \\ > 0 & \text{für } k^2 > (m_1 + m_2)^2 = 4m^2. \end{cases}$$

Physikalische Bedeutung: für  $k^2 > (m_1 + m_2)^2$  ist reelle Paarerzeugung möglich.



**(b) Elektronselfenergie**

$$\Sigma^{\bar{e}e}(p) = ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\alpha (\not{q} + m) \gamma^\alpha}{(q^2 - m^2)[(q-p)^2 - \lambda^2]} .$$

**Übung:** Berechnen Sie die Elektronselfenergie! Führen Sie dazu für obigen Ausdruck die Tensorreduktion durch und zerlegen Sie das Resultat nach den Kovarianten  $\Sigma_V^{\bar{e}e}$  und  $\Sigma_S^{\bar{e}e}$ .

**Lösung:**

Dirac-Algebra:

$$\gamma_\alpha (\not{q} + m) \gamma^\alpha = (2 - D) \not{q} + Dm .$$

Zurückführung auf Standardintegrale:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\bar{e}e}(p) &= ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(2 - D) \not{q} + Dm}{(q^2 - m^2)[(q-p)^2 - \lambda^2]} \\ &= -\frac{e^2}{16\pi^2} [(2 - D) \gamma^\mu B_\mu(-p, m, \lambda) + Dm B_0(p^2, m, \lambda)] \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi} [(D - 2) \not{p} B_1(p^2, m, \lambda) + Dm B_0(p^2, m, \lambda)] , \\ \Sigma^{\bar{e}e}(p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \{ \not{p} [2B_1(p^2, m, \lambda) + 1] + m [4B_0(p^2, m, \lambda) - 2] \} . \end{aligned}$$

Kovariantenzerlegung:

$$\begin{aligned} \Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} [2B_1(p^2, m, \lambda) + 1] \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{p^2} [A_0(m) - (p^2 + m^2)B_0(p^2, m, \lambda) + p^2] , \\ \Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} [4B_0(p^2, m, \lambda) - 2] . \end{aligned}$$



**(c) Photon-Elektron-Vertexkorrektur**

$$\Lambda_\mu(p', p) = -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\alpha (\not{q} + \not{p}' + m) \gamma_\mu (\not{q} + \not{p} + m) \gamma^\alpha}{(q^2 - \lambda^2)[(q+p)^2 - m^2][(q+p')^2 - m^2]} .$$

Zurückführung auf  $C_0$ ,  $C_\mu$ ,  $C_{\mu\nu}$  bzw.  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  möglich analog zu Selbstenergien.

Aber: längere Rechnung  $\rightarrow$  z.B. Computeralgebra!

**Beispiel: Vertexkorrektur für On-Shell-Elektronen**

$$\bar{u}(p') \cdot \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram: A fermion line with incoming momentum } p' \text{ and outgoing momentum } p. \text{ A photon loop is attached to the vertex, with momentum } k \text{ and index } \mu. \end{array} \right\} \cdot u(p) \quad \text{für } p^2 = p'^2 = m^2,$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p') \Lambda_\mu(p', p) u(p) \\ &= \bar{u}' \gamma_\mu u \cdot \frac{\alpha}{4\pi} [4B_0(m^2, m, 0) - 3B_0(k^2, m, m) + 2(2m^2 - k^2)C_0 - 2] \\ & \quad + \bar{u}' u \cdot (p + p')_\mu \cdot \frac{m}{4m^2 - k^2} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} [B_0(k^2, m, m) - 2B_0(m^2, m, 0) \\ & \quad \quad \quad + B_0(0, 0, m) + 1] . \end{aligned}$$

**Berechnung des UV-divergenten Anteils von  $\Lambda_\mu(p', p)$ :**

Integral logarithmisch divergent für  $q \rightarrow \infty$ .

$\rightarrow$   $p, p'$  irrelevant für UV-divergente Terme!

$$\Lambda_\mu(p', p)|_{\text{div}} = \Lambda_\mu(0, 0)|_{\text{div}} = -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\alpha \not{q} \gamma_\mu \not{q} \gamma^\alpha}{(q^2 - \lambda^2)(q^2 - m^2)^2} \Big|_{\text{div}} .$$

Dirac-Algebra:  $\gamma_\alpha \not{q} \gamma_\mu \not{q} \gamma^\alpha = (D-2)(q^2 \gamma_\mu - 2\not{q} q_\mu)$ .

Kovariantenzerlegung:  $\Lambda_\mu(0, 0) = \Lambda_0 \gamma_\mu \rightarrow \Lambda_0 = \frac{1}{D} \gamma^\mu \Lambda_\mu(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \Lambda_0|_{\text{div}} &= -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(D-2)^2}{D} \frac{q^2}{(q^2 - \lambda^2)(q^2 - m^2)^2} \Big|_{\text{div}} \\ &= -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - m^2)^2} \Big|_{\text{div}} = \frac{e^2}{16\pi^2} B_0(0, m, m)|_{\text{div}} , \end{aligned}$$

$$\Lambda_\mu(p', p) = \frac{\alpha}{4\pi} \Delta \gamma_\mu + \text{UV-endliche Terme.}$$

**Berechnung von  $\Lambda_\mu(p, p)$ :**

Trick:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial p^\mu} (1) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[ (\not{q} + \not{p} - m) \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} \right] \\
&= \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} + (\not{q} + \not{p} - m) \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} \\
\Rightarrow &\frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} = - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m}.
\end{aligned}$$

Anwendung:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu(p, p) &= -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - \lambda^2} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} \gamma^\alpha \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - \lambda^2} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{q} + \not{p} - m} \gamma^\alpha \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} \underbrace{ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q' - p)^2 - \lambda^2} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{q}' - m} \gamma^\alpha}_{= \Sigma^{\bar{e}e}(p)}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Ward-Identität: } \Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{\bar{e}e}(p).$$

Bemerkung: Die Ward-Identität ist eigentlich eine Renormierungsbedingung (Eichsymmetrie) und muß daher für die renormierten Vertexfunktionen gelten. In dimensionaler Regularisierung mit On-Shell-Renormierung ist sie automatisch erfüllt.

## 2.5 Renormierung der QED

**Frage:** Stellen die Parameter  $m$ ,  $-e$  die physikalische Masse bzw. Ladung des Elektrons dar?

a) Elektronmasse:  $m_{\text{phys}}^2 = \text{Pol im Elektronpropagator}$ .

niedrigste Ordnung: 
$$G_0^{\bar{e}e}(-p, p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2},$$

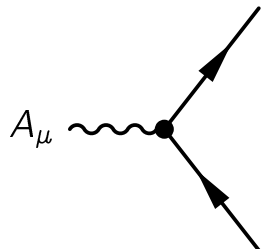
mit Korrekturen: 
$$G_0^{\bar{e}e}(-p, p) = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma^{\bar{e}e}(p)}$$

$$= \frac{i}{\not{p}(1 + \Sigma_V^{\bar{e}e}) - m(1 - \Sigma_S^{\bar{e}e})}.$$

→ physikalische Masse: 
$$m_{\text{phys}} = \frac{1 - \Sigma_S^{\bar{e}e}}{1 + \Sigma_V^{\bar{e}e}} m \neq m.$$

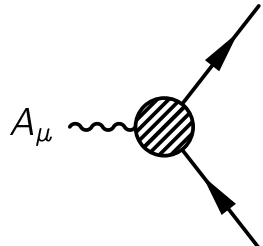
b) Elektronladung:  $e_{\text{phys}} = ee\gamma$ -Kopplung für On-Shell-Elektronen und -Photonen.

niedrigste Ordnung:



$$= ie\gamma_\mu,$$

mit Korrekturen:

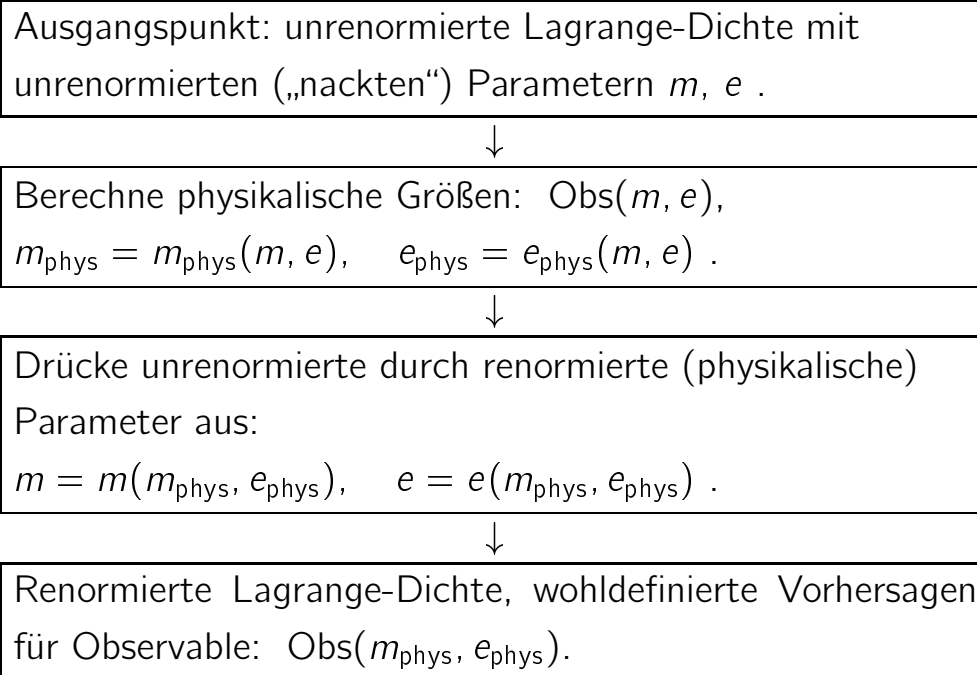


$$= i \underbrace{(e - \delta e)}_{= e_{\text{phys}} \neq e} \gamma_\mu.$$

**Fazit:** Strahlungskorrekturen beeinflussen die physikalische Interpretation der Parameter in der Lagrange-Dichte

⇒ Redefinition (= **Renormierung**) der Parameter notwendig!

## Prinzipielles Vorgehen



## Vorgehen in der Störungstheorie

$$m_{\text{phys}} = m + f_1(m, e) + f_2(m, e) + \dots ,$$

$$e_{\text{phys}} = e + g_1(m, e) + g_2(m, e) + \dots .$$

Ansatz:

$$m = m_{\text{phys}} + \delta m = m_{\text{phys}} + \delta m_1 + \delta m_2 + \dots ,$$

$$e = e_{\text{phys}} + \delta e = e_{\text{phys}} + \delta e_1 + \delta e_2 + \dots .$$

( $\delta m, \delta e$  : „Counterterme“)

1-Loop:  $\delta m_1 = -f_1(m_{\text{phys}}, e_{\text{phys}})$  ,  
 $\delta e_1 = -g_1(m_{\text{phys}}, e_{\text{phys}})$  .

$N$ -Loop: Iterative Lösung.

## Multiplikative Renormierung

Ursprüngliche (unrenormierte, nackte) Größen:  $A_0^\mu, \psi_0, m_0, e_0, \xi_0$ .

Renormierte Größen:  $A^\mu, \psi, m, e, \xi$ .

Multiplikative Renormierung: Renormierungskonstanten  $Z_i = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$

$$\begin{aligned} A_0^\mu &= \sqrt{Z_A} A^\mu, & \psi_0 &= \sqrt{Z_\psi} \psi, & \text{Feldrenormierung} \\ m_0 &= Z_m m, & e_0 &= Z_e e, & \text{Parameterrenormierung} \\ &= m + \delta m, & &= e + \delta e, & \\ \xi_0 &= Z_\xi \xi. & & & \text{Eichparameterrenormierung} \end{aligned}$$

„Multiplikative Renormierung“ bedeutet:

Änderung der nackten Lagrange-Dichte durch (multiplikative) Renormierungskonstanten, aber *keine Einführung neuer Terme*.

Renormierte Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_{0\nu})(\partial^\mu A_0^\nu) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi_0}\right)(\partial_\mu A_0^\mu)(\partial_\nu A_0^\nu) \\ &\quad + \bar{\psi}_0(i\partial - m_0)\psi_0 \\ &\quad + e_0 \bar{\psi}_0 \not{A}_0 \psi_0 \\ &= -\frac{1}{2}Z_A(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{Z_\xi \xi}\right)Z_A(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\ &\quad + Z_\psi \bar{\psi}(i\partial - Z_m m)\psi \\ &\quad + Z_e Z_\psi \sqrt{Z_A} e \bar{\psi} \not{A} \psi. \end{aligned}$$

(On-Shell-) Renormierung ist die Bestimmung der  $Z_i$  so, daß  $m$  und  $e$  die physikalische Masse und Ladung sind. Die Pole der Zweipunktfunktionen sollen Residuum 1 haben.

Bemerkung 1: Die Feldrenormierungen  $Z_A, Z_\psi$  sind physikalisch irrelevant, denn die Residuen der Einteilchenpole kürzen sich aus Observablen heraus.

Bemerkung 2: Es ist nicht notwendig,  $m = m_{\text{phys}}$  und  $e = e_{\text{phys}}$  zu setzen. Daher sind auch andere Renormierungsschemata möglich (z.B.:  $\overline{\text{MS}}$ , MOM).

**Einschleifen-Entwicklung:**

$$Z_i = 1 + \delta Z_i, \quad \delta Z_i = \mathcal{O}(\alpha).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) && -\delta Z_A \cdot \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \\ &+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) && + \left[\delta Z_A \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) + \delta Z_\xi \frac{1}{\xi}\right] \cdot \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\ &+ \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi && + \delta Z_\psi \cdot \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \delta m \cdot \bar{\psi}\psi \\ &+ e\bar{\psi}A\psi && + (\delta Z_e + \delta Z_\psi + \frac{1}{2}\delta Z_A) \cdot e\bar{\psi}A\psi \\ & && + \mathcal{O}(\delta Z_i^2) \\ = \mathcal{L}|_{A_0 \rightarrow A, \psi_0 \rightarrow \psi, \dots} && + \underbrace{\delta \mathcal{L}}_{\text{„Counterterme“}} \end{aligned}$$

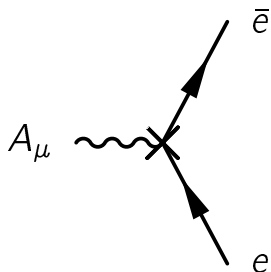
⇒ Feynman-Regeln:

„alte Feynman-Regeln“ mit renormierten Parametern + („neue“) Feynman-Regeln für Counterterm-Vertizes.

⇒ Zusätzliche Feynman-Graphen: Einschleifen-Counterterm-Vertizes **(Übung!)**

$$A^\mu \text{ --- } \overset{k}{\text{---}} \text{---} A^\nu \quad -i\delta Z_A \left[ k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \right] + i\delta Z_\xi \frac{1}{\xi} k^\mu k^\nu,$$

$$e \text{ --- } \overset{p}{\text{---}} \text{---} \bar{e} \quad +i\delta Z_\psi(\cancel{p} - m) - i\delta m,$$



$$+ie\gamma_\mu (\delta Z_e + \delta Z_\psi + \frac{1}{2}\delta Z_A).$$

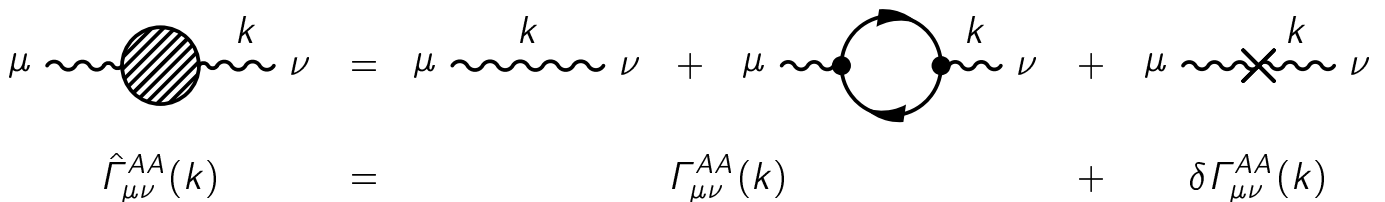
## Renormierte Vertexfunktionen (1-Loop)

### a) AA-Vertex:

Renormierte Zweipunktfunktion in Einschleifenordnung:

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\mu\nu}^{AA}(k) &= i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) + i\left(\tilde{D}(k)\hat{\Sigma}^{AA}(k)\tilde{D}(k)\right)_{\mu\nu} + \dots \\ &= i\tilde{D}_{\mu}^{\rho}(k)\left(-i\tilde{D}_{\mu\sigma}^{-1}(k) - i\hat{\Sigma}_{\mu\sigma}^{AA}(k)\right)i\tilde{D}_{\nu}^{\sigma}(k) + \dots \\ &\equiv i\tilde{D}_{\mu}^{\rho}(k)\hat{\Gamma}_{\mu\sigma}^{AA}(k)i\tilde{D}_{\nu}^{\sigma}(k) + \dots\end{aligned}$$

Abspaltung der äußeren Propagatoren: Renormierte Vertexfunktion



$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{AA}(k) = \Gamma_{\mu\nu}^{AA}(k) + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{AA}(k)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{AA}(k) &= -i(k^2 g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu}) - \frac{i}{\xi}k_{\mu}k_{\nu} \\ &\quad -i\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right)\Sigma_T^{AA}(k^2) - \frac{i}{\xi}\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\Sigma_L^{AA}(k^2) \\ &\quad -i(k^2 g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu})\delta Z_A - \frac{i}{\xi}k_{\mu}k_{\nu}(\delta Z_A - \delta Z_{\xi}) \\ &= -i\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right)\left[k^2 + \underbrace{\Sigma_T^{AA}(k^2) + k^2\delta Z_A}_{=:\hat{\Sigma}_T^{AA}(k^2)}\right] \\ &\quad - \frac{i}{\xi}\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\left[k^2 + \underbrace{\Sigma_L^{AA}(k^2) + k^2(\delta Z_A - \delta Z_{\xi})}_{=:\hat{\Sigma}_L^{AA}(k^2)}\right].\end{aligned}$$

Renormierte Photonselfenergie:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_T^{AA}(k^2) &= \Sigma_T^{AA}(k^2) + k^2\delta Z_A, \\ \hat{\Sigma}_L^{AA}(k^2) &= \underbrace{\Sigma_L^{AA}(k^2)}_{\equiv 0} + k^2(\delta Z_A - \delta Z_{\xi}).\end{aligned}$$

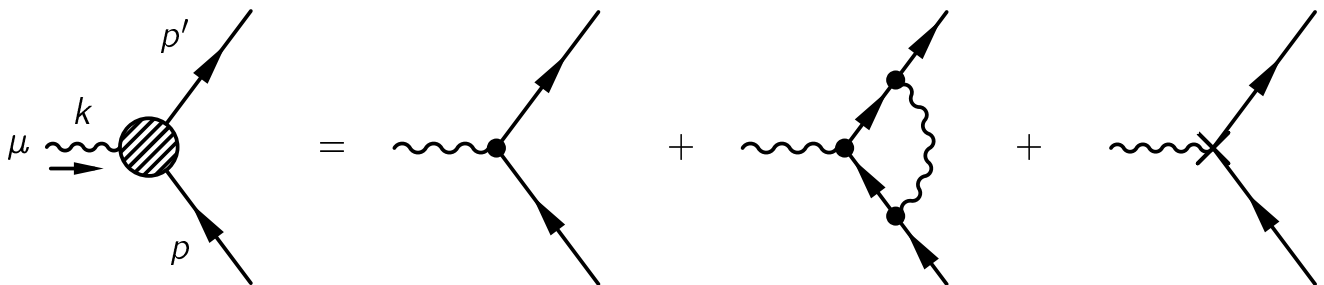
**b)  $\bar{e}e$ -Vertex:**

$$\hat{\Gamma}^{\bar{e}e}(-p, p) = \Gamma^{\bar{e}e}(-p, p) + \delta\Gamma^{\bar{e}e}(-p, p)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\bar{e}e}(-p, p) &= i(\not{p} - m) + i\Sigma^{\bar{e}e}(p) + i\delta Z_\psi(\not{p} - m) - i\delta m \\ &= i\not{p} \left[ 1 + \underbrace{\Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) + \delta Z_\psi}_{=: \hat{\Sigma}_V^{\bar{e}e}(p^2)} \right] + im \left[ -1 + \underbrace{\Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2) - \delta Z_\psi - \frac{\delta m}{m}}_{=: \hat{\Sigma}_S^{\bar{e}e}(p^2)} \right]. \end{aligned}$$

Renormierte Elektronselfstenergie:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_V^{\bar{e}e}(p^2) &= \Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) + \delta Z_\psi, \\ \hat{\Sigma}_S^{\bar{e}e}(p^2) &= \Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2) - \delta Z_\psi - \frac{\delta m}{m}. \end{aligned}$$

**c)  $A\bar{e}e$ -Vertex:**

$$\hat{\Gamma}^{A\bar{e}e}(k, -p', p) = \Gamma^{A\bar{e}e}(k, -p', p) + \delta\Gamma^{A\bar{e}e}(k, -p', p)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_\mu^{A\bar{e}e}(k, -p', p) &= ie\gamma_\mu + \underbrace{ie\Lambda_\mu(p', p) + ie\gamma_\mu(\delta Z_e + \delta Z_\psi + \frac{1}{2}\delta Z_A)}_{=: ie\hat{\Lambda}_\mu(p', p)}. \end{aligned}$$

Renormierte Vertexkorrektur:

$$\hat{\Lambda}_\mu(p', p) = \Lambda_\mu(p', p) + \gamma_\mu(\delta Z_e + \delta Z_\psi + \frac{1}{2}\delta Z_A).$$



## Renormierungsbedingungen und -konstanten

### a) Massenrenormierung des Elektrons:

Pol des Elektronpropagators  $\hat{G}^{\bar{e}e}$  bei  $p^2 = m^2$ :

$$\hat{G}^{\bar{e}e}(-p, p)^{-1} u(p) = -\hat{\Gamma}^{\bar{e}e}(-p, p) u(p) \stackrel{!}{=} 0 .$$

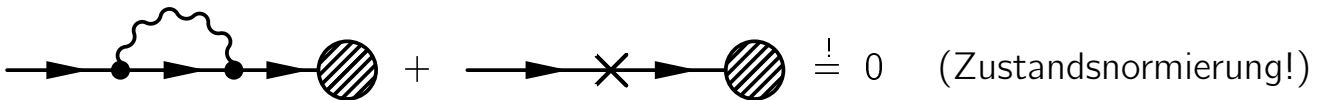
Benutzung der Dirac-Gleichung  $(\not{p} - m)u(p) =$  liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \hat{\Sigma}_V^{\bar{e}e}(m^2) + \hat{\Sigma}_S^{\bar{e}e}(m^2) \right] u(p) \\ &= \left[ \Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}(m^2) - \frac{\delta m}{m} \right] u(p) . \\ \rightarrow \quad \frac{\delta m}{m} &= \Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}(m^2) . \end{aligned}$$

### b) Wellenfunktionsrenormierung des Elektrons:

Residuum des Elektronpropagators bei  $\not{p} = m$  soll 1 sein.

[ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma}^{\bar{e}e}(-p, p) = i(\not{p} - m)$  für  $p^2 \rightarrow m^2$ ]



$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Zustandsnormierung!})$$

$$\Rightarrow \left[ \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{i}{\not{p} - m} \hat{\Sigma}^{\bar{e}e}(p) \right] u(p) \stackrel{!}{=} 0 .$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{1}{\not{p} - m} (\not{p} \Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) + m \Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2) + \delta Z_\psi (\not{p} - m) - \delta m) \right] u(p) \\ &= \left[ \Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + \delta Z_\psi + m \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{1}{\not{p} - m} \left( \Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2) - \frac{\delta m}{m} \right) \right] u(p) \\ &= \left[ \Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + \delta Z_\psi \right. \\ &\quad \left. + \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{m(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (\Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) - \Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}(p^2) - \Sigma_S^{\bar{e}e}(m^2)) \right] u(p) \\ &= \left[ \delta Z_\psi + \Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + 2m^2 (\Sigma_V^{\bar{e}e}'(m^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}'(m^2)) \right] u(p) . \end{aligned}$$

$$\rightarrow \delta Z_\psi = -\Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) - 2m^2 (\Sigma_V^{\bar{e}e}'(m^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}'(m^2)) .$$

**Übung:** Drücken Sie  $\delta Z_\psi$  durch die skalaren Zweipunkt-Funktionen aus!

Lösung:

$$\delta Z_\psi = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ -B_0(0, m, m) + 4m^2 B'_0(m^2, m, \lambda) \right] .$$

### c) Wellenfunktionsrenormierung des Photons:

Residuum des Photonpropagators für  $k^2 = 0$  soll 1 sein:

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Zustandsnormierung!})$$

$$\Rightarrow \left[ \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \hat{\Sigma}_{\nu\rho}^{AA}(k) \right] \epsilon^\rho(k) \stackrel{!}{=} 0 .$$

Benutzung von  $k_\rho \epsilon^\rho(k) = 0$  liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \hat{\Sigma}_T^{AA}(k^2) = \hat{\Pi}^{AA}(0) \\ &= \Sigma_T^{AA'}(0) + \delta Z_A = \Pi^{AA}(0) + \delta Z_A . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta Z_A = -\Sigma_T^{AA'}(0) = -\Pi^{AA}(0) .$$

### d) Eichparameterrenormierung:

$$\hat{\Sigma}_L^{AA}(k^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{in Analogie zu} \quad \Sigma_L^{AA}(k^2) \equiv 0 .$$

$$\Rightarrow \delta Z_\xi = \delta Z_A .$$

Bemerkungen:

- Wie  $\xi$  hat auch  $Z_\xi = 1 + \delta Z_\xi$  keinen Einfluß auf physikalische Observable.
- Die Bedingung  $\hat{\Sigma}_L^{AA}(k^2) \equiv 0$  führt auf Grund der Identität  $\Sigma_L^{AA}(k^2) \equiv 0$  in jeder Schleifen-Ordnung auf die Beziehung:  $Z_\xi = Z_A$ .

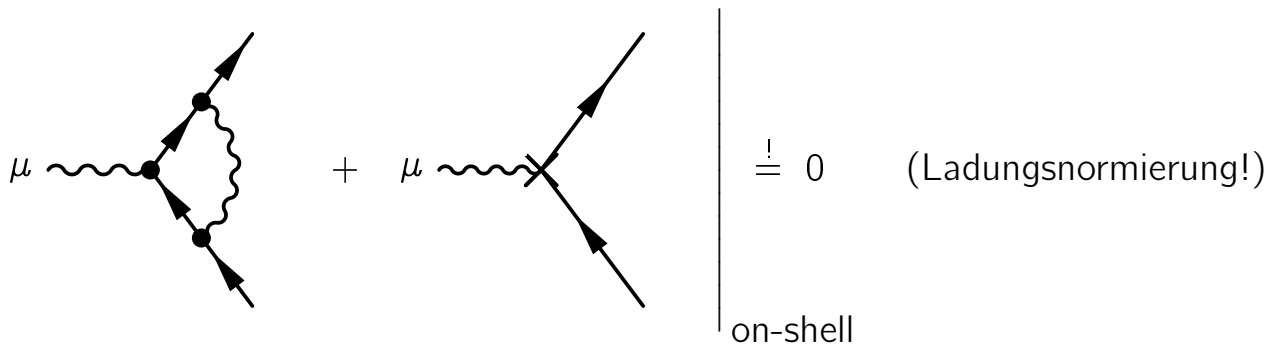
$$\Rightarrow \text{Keine Renormierung des Eichfixierungstermes } \mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 .$$

### e) Ladungsrenormierung:

$e \stackrel{!}{=} \text{physikalische Ladung, die in klassischer Thomson-Streuung gemessen wird.}$

(Compton-Streuamplitude für  $E_\gamma \rightarrow 0$ ;  $\rightarrow A\bar{e}e$ -Amplitude für  $p' = p$ ).

$$\bar{u}(p) \hat{\Gamma}_\mu(0, -p, p) u(p) \stackrel{!}{=} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) .$$



$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{u}(p) \hat{\Lambda}_\mu(p, p) u(p) \\
 &= \bar{u}(p) \left[ \Lambda_\mu(p, p) + \gamma_\mu (\delta Z_e + \delta Z_\psi + \frac{1}{2} \delta Z_A) \right] u(p) .
 \end{aligned}$$

Benutzung der beiden Beziehungen:

- $\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{\bar{e}e}(p) = \gamma_\mu \Sigma_V^{\bar{e}e}(p^2) + 2p_\mu [\not{p} \Sigma_V^{\bar{e}e}'(p^2) + m \Sigma_S^{\bar{e}e}'(p^2)] ,$
- $\bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) = \frac{p_\mu}{m} \bar{u}(p) u(p)$

und der Dirac-Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) \left[ \underbrace{\Sigma_V^{\bar{e}e}(m^2) + 2m^2 (\Sigma_V^{\bar{e}e}'(m^2) + \Sigma_S^{\bar{e}e}'(m^2))}_{=0} + \delta Z_\psi + \delta Z_e + \frac{1}{2} \delta Z_A \right] . \\
 \Rightarrow \quad \delta Z_e &= -\frac{1}{2} \delta Z_A .
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Identität  $Z_e = Z_A^{-1/2}$  ist eine Folge der Eichinvarianz und damit im On-Shell-Schema bei dimensionaler Regularisierung automatisch erfüllt.

**Renormierte Vakuumpolarisation**

$$\hat{\Pi}^{AA}(k^2) = \Pi^{AA}(k^2) - \Pi^{AA}(0) =: f(k^2, m).$$

**Reine QED:**

$$\Pi^{AA}(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right),$$

für  $|k^2| \gg m^2$ :

$$\Pi^{AA}(k^2) \sim \frac{\alpha}{3\pi} \left( \Delta - \log \frac{|k^2|}{\mu^2} + i\pi\Theta(k^2) + \frac{5}{3} \right).$$

$$\longrightarrow \hat{\Pi}^{AA}(k^2) \sim \frac{\alpha}{3\pi} \left( -\log \frac{|k^2|}{m^2} + \frac{5}{3} + i\pi\Theta(k^2) \right).$$

**Realistisch(er):** alle (geladenen) Fermionen tragen bei: $f = e, \mu, \tau, \underbrace{u, d, s, c, b, t}$ ; Ladungen:  $Q_f$ . $\times 3 = N_c^f = \text{Colourfaktor.}$ 

$$\hat{\Pi}^{AA}(k^2) = \sum_f N_c^f Q_f^2 f(k^2, m_f). \quad (N_c^{e,\mu,\tau} = 1)$$

Z.B. für  $k^2 \gtrsim (10 \text{ GeV})^2$ :

$$\hat{\Pi}^{AA}(k^2) \sim \sum_{f \neq \text{top}} \frac{\alpha}{3\pi} N_c^f Q_f^2 \left( -\log \frac{|k^2|}{m_f^2} + \frac{5}{3} + i\pi\Theta(k^2) \right) + \hat{\Pi}_{\text{top}}^{AA}(k^2).$$

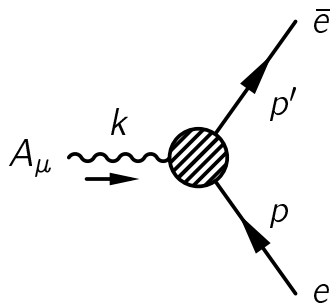
Problem: Quarkmassen?  $m_u, m_d, m_s = ?$ Ausweg:  $\hat{\Pi}_{\text{had}}^{AA}(s)_{\text{exp.}}$  wird praktisch bestimmt durch Messung des Verhältnisses $R(s) := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{had})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$  und mittels der „Dispersionsrelation“:

$$\hat{\Pi}_{\text{had}}^{AA}(s) = \left\{ \begin{array}{c} \Sigma \text{ über alle hadronischen} \\ \text{Zwischenzustände:} \\ \downarrow \\ \text{Diagramm: } e^+e^- \text{ (Wellenlinien)} \rightarrow \text{Hadronen (Schraffur)} \end{array} \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} s \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \frac{R(s')}{s - s' - i\epsilon}.$$

## 2.6 Anomales magnetisches Moment des Elektrons

Situation: Wechselwirkung von Elektronen mit „quasi-statischen“ elektromagnetischen Feldern ( $k \rightarrow 0$ ).

Betrachte  $A\bar{e}e$ -Vertex für reelle Teilchen!



für  $k^2 = 0$ ,  $p'^2 = p^2 = m^2$ .

„Gordon-Zerlegung“:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p') \hat{\Gamma}_{\mu}^{A\bar{e}e}(k, -p', p) \Big|_{k^2=0} u(p) \\ &= i \bar{u}(p') \left[ e \frac{(p' + p)_{\mu}}{2m} + g \frac{e}{2m} \cdot \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2} i(p' - p)^{\nu} \right] u(p) \end{aligned}$$

$e$  : Ladung des Elektrons (Renormierungsbedingung!)

$g \frac{e}{2m} = g\mu_B$  : magnetisches Moment des Elektrons ( $g =$  „ $g$ -Faktor“)

**Born-Niveau:**

$$\bar{u}(p') \Gamma_{\mu,0}^{A\bar{e}e} u(p) = ie \bar{u}(p') \gamma_{\mu} u(p) .$$

Benutze „Gordon-Identität“:

$$\bar{u}(p') \gamma_{\mu} u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[ (p' + p)_{\mu} + i \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^{\nu} \right] u(p) .$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \bar{u}(p') \Gamma_{\mu,0}^{A\bar{e}e} u(p) &= i \bar{u}(p') \left[ e \frac{(p' + p)_{\mu}}{2m} + 2 \frac{e}{2m} \cdot \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2} i(p' - p)^{\nu} \right] u(p) , \\ \implies g_0 &= 2 . \end{aligned}$$

**Übung:** Berechnen Sie den Einschleifen-Beitrag zu  $g$ ! Führen Sie die Gordon-Zerlegung für  $\Gamma_{\mu,1}^{A\bar{e}e} \equiv ie \hat{\Lambda}_{\mu}(p', p)$  durch, und leiten Sie die Beziehung  $m^2 [B'_0(m^2, m, \lambda) + C_0(m^2, 0, m^2, \lambda, m, m)] = -1$  her.

Einschleifen-Näherung für  $g$ 

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p') \hat{F}_{\mu,1}^{A\bar{e}e}(k, -p', p) \Big|_{k^2=0} u(p) \\
&= ie \bar{u}(p') \hat{\Lambda}_{\mu}(p', p) \Big|_{k^2 \rightarrow 0} u(p) \\
&= ie \bar{u}(p') \Lambda_{\mu}(p', p) \Big|_{k^2 \rightarrow 0} u(p) + ie \delta Z_{\psi} \bar{u}(p') \gamma_{\mu} u(p) \\
&= ie \bar{u}' \gamma_{\mu} u \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 4B_0(m^2, m, 0) - 3B_0(0, m, m) + 4m^2 C_0 - 2 \right] \\
&\quad + ie \bar{u}' u \cdot \frac{(p' + p)_{\mu}}{2m} \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left[ B_0(0, m, m) - 2B_0(m^2, m, 0) + B_0(0, 0, m) + 1 \right] \\
&\quad + ie \bar{u}' \gamma_{\mu} u \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \left[ -B_0(0, m, m) + 4m^2 B'_0(m^2, m, \lambda) \right]}_{= \delta Z_{\psi}} \\
&= ie \bar{u}' \gamma_{\mu} u \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 4B_0(m^2, m, 0) - 4B_0(0, m, m) + 4m^2 B'_0(m^2, m, \lambda) \right. \\
&\quad \left. + 4m^2 C_0 - 2 \right] \\
&\quad + ie \bar{u}' u \cdot \frac{(p' + p)_{\mu}}{2m} \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 2B_0(0, m, m) - 2B_0(m^2, m, 0) + 2 \right] \\
&= ie \bar{u}' u \cdot \frac{(p' + p)_{\mu}}{2m} \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 2B_0(m^2, m, 0) - 2B_0(0, m, m) \right. \\
&\quad \left. + 4m^2 B'_0(m^2, m, \lambda) + 4m^2 C_0 \right] \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \\
&\quad + \frac{ie}{2m} \bar{u}' i\sigma_{\mu\nu} (p' - p)^{\nu} u \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 4B_0(m^2, m, 0) - 4B_0(0, m, m) \right. \\
&\quad \left. + 4m^2 B'_0(m^2, m, \lambda) + 4m^2 C_0 - 2 \right] \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{ie}{2m} \bar{u}' i\sigma_{\mu\nu} (p' - p)^{\nu} u \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \underbrace{\left[ 4B_0(m^2, m, 0) - 4B_0(0, m, m) - 6 \right]}_{= 2} \\
&= i \bar{u}(p') \left[ \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{e}{2m} \cdot \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2} i(p' - p)^{\nu} \right] u(p) . \\
\implies g &= 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) = 2 \cdot \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) .
\end{aligned}$$

**Verifikation von (\*):**

- Aus Kapitel 1.3:

$$B_0(0, m, m) = \Delta - \log(m^2/\mu^2),$$

$$B_0(0, 0, m) = \Delta - \log(m^2/\mu^2) + 1,$$

$$B_0(m^2, m, 0) = \Delta - \log(m^2/\mu^2) + 2.$$

- $C_0(m^2, 0, m^2, \lambda, m, m)$  ( $\lambda$  infinitesimal!)

$$= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [m^2(x+y)^2 + \lambda^2(1-x-y)]^{-1}, \quad (y = z - x, dy = dz)$$

$$= - \underbrace{\int_0^1 dx \int_x^1 dz}_{\substack{1 \\ 0}} [m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)]^{-1}$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^z dx$$

$$= - \int_0^1 dz \frac{z}{m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)} = \dots = \frac{1}{m^2} \log \frac{\lambda}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{m^4}\right).$$

- $B'_0(p^2, m_0, m_1) = \frac{\partial}{\partial p^2} B_0(p^2, m_0, m_1)$

$$= - \int_0^1 dx \frac{x(x-1)}{x^2 p^2 - x(p^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon},$$

$$B'_0(m^2, m, \lambda) = - \int_0^1 dx \frac{x(x-1)}{(x-1)^2 m^2 + \lambda^2 x}, \quad (z = 1-x)$$

$$= - \int_0^1 dz \frac{-z + z^2}{m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)}$$

$$= -C_0 - \frac{1}{m^2} = -\frac{1}{m^2} \left[ \log \frac{\lambda}{m} + 1 \right].$$

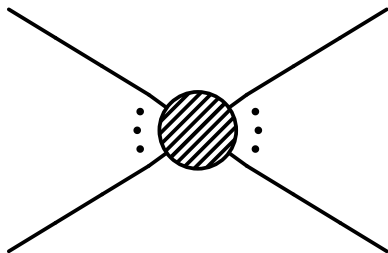
$\Rightarrow$  (\*) folgt durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke für  $B_0$ ,  $B'_0$ ,  $C_0$ .

## 2.7 Infrarot-Problem, Bremsstrahlung

Betrachte Prozeß mit geladenen äußeren Teilchen,

z.B.  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ ,  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$ ,  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

Virtuelle Korrekturen: Schleifendiagramme



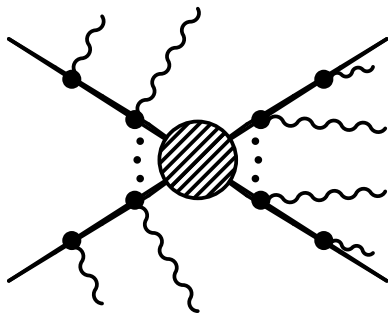
IR-Divergenzen verschwinden nicht!

$\Rightarrow \alpha \log(\lambda/m)$ -Terme in 1-Loop.

Grund: Masselosigkeit des Photons

(allgemeines störungstheoretisches Problem)

Reelle Korrekturen: Photon-Bremsstrahlung



IR-Divergenzen bei Emission niederenergetischer („soft“) Photonen ( $E_\gamma \rightarrow 0$ )!

$\Rightarrow \alpha \log(\lambda/m)$ -Terme bei 1-Photon-Emission.

### Bloch-Nordsieck-Theorem:

IR-Divergenzen in virtuellen und reellen Korrekturen kompensieren sich.

$\Rightarrow$  Trennung von virtuellen und reellen Korrekturen ist „unphysikalisch“!

Experimentell: in einem realistischen Detektor können Photonen mit beliebig kleinen Energien nicht detektiert werden, d.h. der elastische Prozeß kann nicht vom Prozeß mit Emission eines hinreichend weichen Photons unterschieden werden.

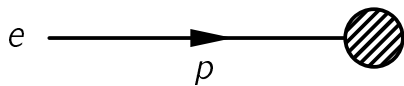
$\Rightarrow$  Theoretische Vorhersagen hängen von der Behandlung emittierter Photonen ab (inklusive oder exklusive Prozeß, Energie- und Winkel-Schnitte („Cuts“)).



## Soft-Photon-Approximation

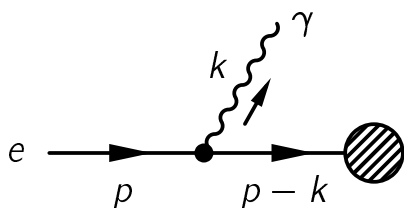
Betrachte nur Photonen mit Energie  $k_0 \rightarrow 0$ .

Elastischer Streuprozess:



$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{A}(p) u(p).$$

Prozeß mit 1-Photon-Emission:



$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \mathcal{A}(p-k) \underbrace{\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}}_{=-2pk} i e \not{\epsilon}^*(k) u(p) \\ &\sim e \frac{p\epsilon^*}{pk} \mathcal{A}(p) u(p) = e \frac{p\epsilon^*}{pk} \mathcal{M}_0. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{allgemein: ein- (aus-) laufende } e^-(e^+) \\ \text{ein- (aus-) laufende } e^+(e^-) \end{array} \right\} \longrightarrow \pm e \frac{p\epsilon^*}{pk}.$$

$\Rightarrow$  Soft-Photon-Korrekturfaktor zu  $|\mathcal{M}_0|^2$ :

$$\delta_S = -\frac{\alpha}{2\pi^2} \int_{k_0 < \Delta E} \frac{d^3\vec{k}}{2k_0} \sum_{i,j} \frac{\pm(p_i p_j)}{(p_i k)(p_j k)}.$$

Bemerkungen:

- Integral über Photonphasenraum mit  $k_0^2 = \vec{k}^2 + \lambda^2$ ,  $0 < \lambda \leq k_0 < \Delta E$ .
- Summe über alle Kombinationen abstrahlender äußerer Linien mit Impuls  $p_i$  (Vorzeichen = Produkt aus obiger Unterscheidung).
- Faktorisierung der Emission weicher Photonen auch in höheren Ordnungen und bei Mehrfachemission gültig (Resummation z.B. à la Yennie-Frautschi-Suura, kohärente Zustände).
- $\Delta E$ -Abhängigkeit wird von den Beiträgen mit harter Bremsstrahlung zum Wirkungsquerschnitt kompensiert.

## 3 Standardmodell der Elektroschwachen Wechselwirkung

### 3.1 Lagrange-Dichte, Feynman-Regeln

**Standardmodell (SM, GSW-Modell):** Nicht-Abelsche Eichtheorie mit spontaner Symmetriebrechung, bestehend aus:

#### a) Yang-Mills-Sektor:

Eichgruppe:	$SU(2)_W$	×	$U(1)_Y$
Eichkopplungen:	$g_2 = g$		$g_1 = g'$
Eichfelder:	$W_\mu^a, a = 1, 2, 3.$		$B_\mu$
Feldstärken:	$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$		$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Physikalische Felder (Eigenzustände zu Ladung und Masse):

$$W^\pm\text{-Boson: } W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2),$$

$$\begin{array}{l} Z^0\text{-Boson:} \\ \text{Photon:} \end{array} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix},$$

$$\text{mit: } s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad c_W = \cos \theta_W,$$

$\theta_W$  = elektroschwacher Mischungswinkel (Weinbergwinkel).

$$\longrightarrow g_2 = \frac{e}{s_W}, \quad g_1 = \frac{e}{c_W},$$

$$\text{Elementarladung: } e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

**b) Higgs-Sektor:** ( $\longrightarrow$  Massen der Teilchen)

Skalares Higgs-Dublett:  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$  ( $\phi^+, \phi^0$  komplexe Felder).

Higgs-Potential:  $V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2$ ,  $\mu^2, \lambda > 0$ .

Minimum des Potentials: Vakuumerwartungswert  $\Phi_0 = \langle 0 | \Phi | 0 \rangle \neq 0$  nicht eindeutig:  
„Spontane Symmetriebrechung“.

Spezielle Wahl:  $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $v := 2\sqrt{\mu^2/\lambda}$ .

Feldkomponenten:  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ (v + H + i\chi)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad \underbrace{I_{W,\Phi} = \frac{1}{2}}_{\text{schwacher Isospin}}, \quad \underbrace{Y_{W,\Phi} = 1}_{\text{Hyperladung}}.$$

„Kovariante Ableitung“:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 I_W^a W_\mu^a + ig_1 \frac{Y_W}{2} B_\mu, \quad I_{W,\Phi}^a = \frac{\sigma^a}{2}.$$

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} (\partial H)^2 - \frac{1}{2} M_H^2 H^2 + (\partial \phi^+) (\partial \phi^-) + \frac{1}{2} (\partial \chi)^2 \\ + \underbrace{M_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^2}_{\text{Dynamische Erzeugung von Eichbosonmassen}} + \dots$$

Dynamische Erzeugung von Eichbosonmassen:  $M_W = c_W M_Z = \frac{1}{2} g_2 v$ .

Bedeutung der Felder:

- $H$  = physikalisches Higgs-Feld, Masse:  $M_H = \sqrt{2}\mu$ .
- $\phi^\pm, \chi$  = unphysikalische (Pseudo-) Goldstone-Felder (Mischung mit  $\partial W^\pm, \partial Z$ ).  
 $\longrightarrow$  notwendig für longitudinale  $W^\pm, Z$ .

**c) Eichfixierung, Faddeev-Popov-Geister:**

Lineare Eichfixierung:

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -F^+ F^- - \frac{1}{2}(F^Z)^2 - \frac{1}{2}(F^A)^2,$$

$$\text{mit: } F^\pm = (\xi_1^W)^{-1/2} \partial W^\pm \mp i M_W (\xi_2^W)^{1/2} \phi^\pm,$$

$$F^Z = (\xi_1^Z)^{-1/2} \partial Z - M_Z (\xi_2^Z)^{1/2} \chi,$$

$$F^A = (\xi_1^A)^{-1/2} \partial A,$$

$\xi_i^a$  ( $i = 1, 2$ ;  $a = W, Z, A$ ) = Eichparameter,

$\xi_i^a = 1 \rightarrow$  't Hooft-Feynman-Eichung.

$\xi_1^a = \xi_2^a \rightarrow$  keine  $\phi W$ -,  $\chi Z$ -Mischung in niedrigster Ordnung.

Beachte: Beiträge nicht-physikalischer Anteile von nicht-Abelschen Eichfeldern werden durch Beiträge der (antikommutierenden) „Faddeev-Popov-Geistfelder“  $u^a$ ,  $\bar{u}^a$  kompensiert.

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = (\xi_1^a)^{1/2} \bar{u}^a \frac{\delta F^a}{\delta \theta^b} u^b, \quad a, b = +, -, Z, A.$$

$\frac{\delta F^a}{\delta \theta^b}$ : Variation von  $F^a$  durch Eichgruppenparameter  $\theta^b$ .

**d) Fermion-Sektor:**

Felder: Unterscheide rechts-/linkshändige Anteile:  $\psi^{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi$ .

			$I_W^3$ :	$Y_W$ :	$Q$ :
• Leptonen:	$\Psi_l^L = \begin{pmatrix} \nu_e^L \\ e^L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu^L \\ \mu^L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau^L \\ \tau^L \end{pmatrix}$		$+\frac{1}{2}$	$-1$	$0$
	$\psi_\nu^R = \nu_e^R, \nu_\mu^R, \nu_\tau^R$		$0$	$0$	$0$
	$\psi_l^R = e^R, \mu^R, \tau^R$		$0$	$-2$	$-1$
• Quarks:	$\Psi_q^L = \begin{pmatrix} u^L \\ d^L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^L \\ s^L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^L \\ b^L \end{pmatrix}$		$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
	$\psi_{q+}^R = u^R, c^R, t^R$		$0$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{3}$
	$\psi_{q-}^R = d^R, s^R, b^R$		$0$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Eichkopplung: Minimale Substitution  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  liefert mit  $Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2}$ :

$$\mathcal{L}_{F,Eich} = i\bar{\Psi}_f^L \not{D}\Psi_f^L + i\bar{\psi}_f^R \not{D}\psi_f^R,$$

$$\mathcal{L}_{F,Eich}^{int} = \frac{e}{\sqrt{2}S_W} \bar{\Psi}_f^L \begin{pmatrix} 0 & W^+ \\ W^- & 0 \end{pmatrix} \Psi_f^L - Q_f e \bar{\psi}_f^R A \psi_f^R \\ + e \bar{\psi}_f^R \not{Z} (v_f - a_f \gamma_5) \psi_f^R,$$

$$\text{mit: } v_f = \frac{I_{W,f}^3 - 2S_W^2 Q_f}{2C_W S_W}, \quad a_f = \frac{I_{W,f}^3}{2C_W S_W}.$$

Yukawa-Kopplung (hier nur Dirac-Massen für Neutrinos):

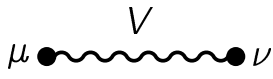
$$\mathcal{L}_{F,Yuk} = -g_{ll'} \bar{\Psi}_l^L \Phi \psi_{l'}^R - g_{l\nu_l'} \bar{\Psi}_l^L \tilde{\Phi} \psi_{\nu_l'}^R \\ - g_{qq'+} \bar{\Psi}_q^L \tilde{\Phi} \psi_{q'+}^R - g_{qq'-} \bar{\Psi}_q^L \Phi \psi_{q'-}^R + \text{h.c.} \quad (\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*) \\ = -\bar{\psi}_f m_f \psi_f + \dots$$

$g_{ll'}, g_{l\nu_l'}, g_{qq'\pm} =$  Yukawa-Kopplungskonstanten

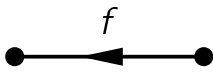
$g_{ff'}$  i.A. nichtdiagonale Matrizen im Flavor-Raum  $\rightarrow$  Quark- bzw. Lepton-Mischung

### Feynman-Regeln

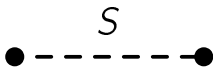
#### a) Propagatoren ('t Hooft-Feynman-Eichung):



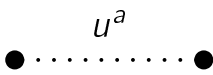
$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_V^2 + i\epsilon}, \quad V = W, Z, A \quad (M_A = 0)$$



$$\frac{i}{\not{p} - m_f + i\epsilon}$$

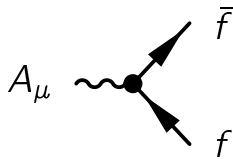


$$\frac{i}{k^2 - M_S^2 + i\epsilon}, \quad S = H, \phi, \chi \quad (M_\phi = M_W, M_\chi = M_Z)$$

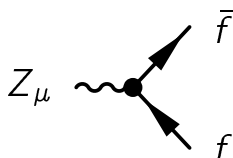


$$\frac{i}{k^2 - M_a^2 + i\epsilon}, \quad a = \pm, Z, A \quad (M_\pm = M_W)$$

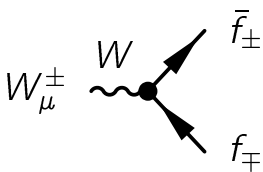
#### b) Vertizes:



$$-ieQ_f \gamma_\mu$$

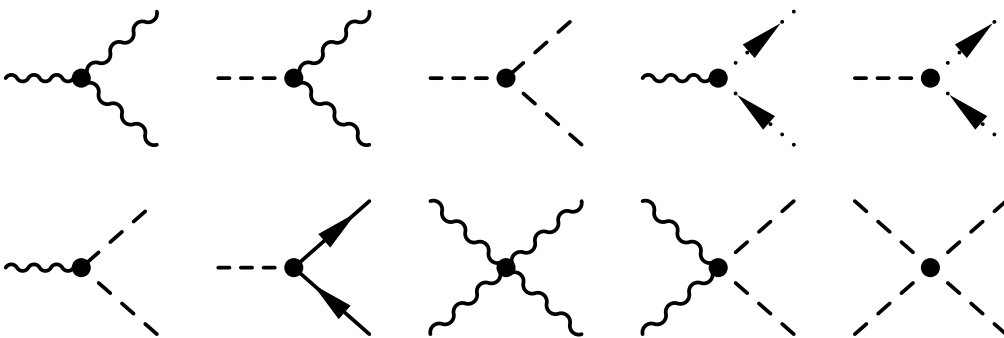


$$ie \gamma_\mu (v_f - a_f \gamma_5)$$



$$\frac{ie}{\sqrt{2} s_W} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5)$$

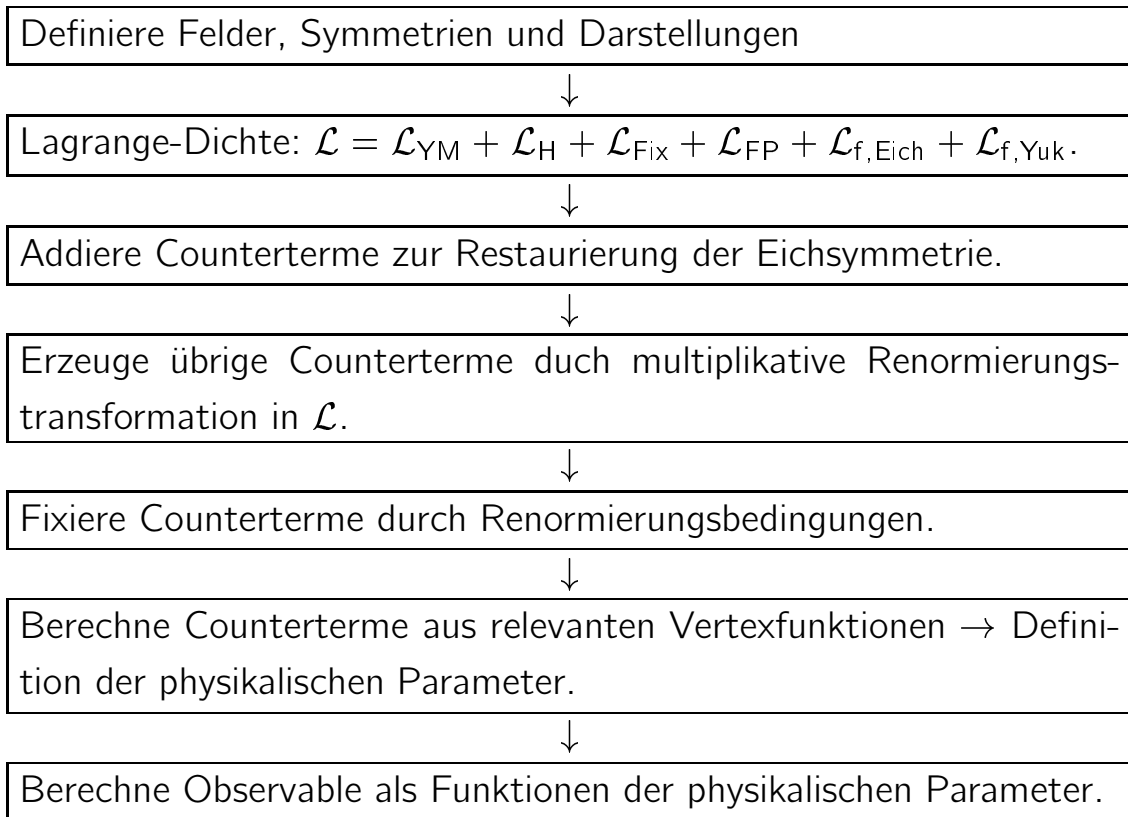
außerdem:



etc.

## 3.2 Renormierung im Eichboson- und Fermion-Sektor

### Vorgehen:



**Multiplikative Renormierung:** (Im folgenden nur Eichbosonen und Fermionen!)

Feldrenormierung:

$$\begin{aligned}
 W_0^\pm &= Z_W^{1/2} W^\pm = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_W) W^\pm, \\
 \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{ij}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} & 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}, \\
 \psi_{f,0}^L &= (Z_L^f)^{1/2} \psi_f^L = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_L^f) \psi_f^L, \\
 \psi_{f,0}^R &= (Z_R^f)^{1/2} \psi_f^R = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_R^f) \psi_f^R, \quad \dots
 \end{aligned}$$

Parameterrenormierung:

$$\begin{aligned}
 e_0 &= Z_e e = (1 + \delta Z_e) e, \\
 M_{W,0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2, \\
 M_{Z,0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2, \quad \dots
 \end{aligned}$$

## Einschleifen-Counterterme

## a) 2-Punkt-Vertizes: ('t Hooft-Feynman-Eichung)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{VV'} &= -(\partial_\mu W_\nu^+)(\partial^\mu W^{-,\nu}) + M_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \\
&\quad - \frac{1}{2}(\partial_\mu Z_\nu)(\partial^\mu Z^\nu) + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \\
&\quad + \delta Z_W [ -(\partial_\mu W_\nu^+)(\partial^\mu W^{-,\nu}) + M_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} ] + \delta M_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \\
&\quad + \delta Z_{ZZ} [ -\frac{1}{2}(\partial_\mu Z_\nu)(\partial^\mu Z^\nu) + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu ] + \delta M_Z^2 \frac{1}{2} Z_\mu Z^\mu \\
&\quad + \delta Z_{AA} [ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) ] \\
&\quad + \delta Z_{AZ} [ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu Z^\nu) ] \\
&\quad + \delta Z_{ZA} [ -\frac{1}{2}(\partial_\mu Z_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + M_Z^2 Z_\mu A^\mu ] .
\end{aligned}$$

$$W_\mu \text{ --- } \times \text{ --- } W_\nu \quad -ig_{\mu\nu} [(k^2 - M_W^2) \delta Z_W - \delta M_W^2] ,$$

$$Z_\mu \text{ --- } \times \text{ --- } Z_\nu \quad -ig_{\mu\nu} [(k^2 - M_Z^2) \delta Z_{ZZ} - \delta M_Z^2] ,$$

$$A_\mu \text{ --- } \times \text{ --- } A_\nu \quad -ig_{\mu\nu} [k^2 \delta Z_{AA}] ,$$

$$Z_\mu \text{ --- } \times \text{ --- } A_\nu \quad -ig_{\mu\nu} [k^2 \delta Z_{AZ} + (k^2 - M_Z^2) \delta Z_{ZA}] \cdot \frac{1}{2} .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi\psi} &= \bar{\psi}_f (i\cancel{\partial} - m_f) \psi_f \\
&\quad + \delta Z_L^f (\bar{\psi}_f^L i\cancel{\partial} \psi_f^L - \frac{1}{2} m_f \bar{\psi}_f \psi_f) \\
&\quad + \delta Z_R^f (\bar{\psi}_f^R i\cancel{\partial} \psi_f^R - \frac{1}{2} m_f \bar{\psi}_f \psi_f) \\
&\quad - \delta m_f \bar{\psi}_f \psi_f .
\end{aligned}$$

⇒ Countervertex:

$$\begin{aligned}
\bar{f} \text{ --- } \leftarrow \times \text{ --- } \leftarrow f &\quad i\not{p} \left( \delta Z_L^f \frac{1 - \gamma_5}{2} + \delta Z_R^f \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \\
&\quad - \frac{i}{2} m_f (\delta Z_L^f + \delta Z_R^f) - i \delta m_f .
\end{aligned}$$



**b) Eichboson-Fermion-Vertizes:**

Zur Parameterrenormierung:  $c_{W,0} := \frac{M_{W,0}}{M_{Z,0}}$ ,  $c_W := \frac{M_W}{M_Z}$ .

$$\rightarrow c_{W,0}^2 = c_W^2 + \delta c_W^2 = \frac{M_W^2 + \delta M_W^2}{M_Z^2 + \delta M_Z^2} = c_W^2 \left( 1 + \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \right),$$

$$\frac{\delta c_W^2}{c_W^2} = \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}, \quad \delta c_W^2 = 2c_W \delta c_W,$$

$$s_W^2 := 1 - c_W^2, \quad \delta s_W^2 = -\delta c_W^2, \quad \delta s_W^2 = 2s_W \delta s_W, \quad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V\bar{f}_1 f_2} &= \frac{e}{\sqrt{2}s_W} (\bar{\psi}_{f+}^L W^+ \psi_{f-}^L + \bar{\psi}_{f-}^L W^- \psi_{f+}^L) - e Q_f \bar{\psi}_f A \psi_f \\ &+ e \bar{\psi}_f Z (v_f - a_f \gamma_5) \psi_f \\ &+ \left( \delta Z_e - \frac{\delta s_W}{s_W} + \frac{1}{2} \delta Z_W + \frac{1}{2} \delta Z_L^{f+} + \frac{1}{2} \delta Z_L^{f-} \right) \\ &\quad \cdot \frac{e}{\sqrt{2}s_W} (\bar{\psi}_{f+}^L W^+ \psi_{f-}^L + \bar{\psi}_{f-}^L W^- \psi_{f+}^L) \\ &- e Q_f \bar{\psi}_f A \left( \delta Z_e + \frac{1}{2} \delta Z_{AA} + \delta Z_L^f \frac{1-\gamma_5}{2} + \delta Z_R^f \frac{1+\gamma_5}{2} \right) \psi_f \\ &+ \frac{1}{2} \delta Z_{ZA} e \bar{\psi}_f A (v_f - a_f \gamma_5) \psi_f \\ &+ Z \bar{\psi} \psi \text{-Terme.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Countervertizes:

$$W_\mu^\pm \begin{array}{l} \nearrow \bar{f}_\pm \\ \searrow f_\mp \end{array} \quad \left( \delta Z_e - \frac{\delta s_W}{s_W} + \frac{1}{2} \delta Z_W + \frac{1}{2} \delta Z_L^{f+} + \frac{1}{2} \delta Z_L^{f-} \right) \frac{ie}{\sqrt{2}s_W} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2},$$

$$A_\mu \begin{array}{l} \nearrow \bar{f} \\ \searrow f \end{array} \quad -ie Q_f \gamma_\mu \left( \delta Z_e + \frac{1}{2} \delta Z_{AA} + \delta Z_L^f \frac{1-\gamma_5}{2} + \delta Z_R^f \frac{1+\gamma_5}{2} \right) \\ + ie \gamma_\mu (v_f - a_f \gamma_5) \frac{1}{2} \delta Z_{ZA},$$

$$Z_\mu \begin{array}{l} \nearrow \bar{f} \\ \searrow f \end{array} \quad \delta Z_e, \delta s_W, \delta Z_{ZZ}, \delta Z_{AZ}, \delta Z_R^f, Z_L^f \text{-Terme.}$$

### Renormierungsbedingungen („On-Shell-Schema“)

#### a) Massenrenormierung:

$M_W^2, M_Z^2, M_H^2, m_f^2$  = Polstellen in physikalischen Anteilen der Propagatoren  
(→ physikalische Massen):

$$\text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^W(M_W^2) \right\} \stackrel{!}{=} \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(M_Z^2) \right\} \stackrel{!}{=} \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}^H(M_H^2) \right\} \stackrel{!}{=} 0 .$$

$$\longrightarrow \delta M_W^2, \delta M_Z^2, \delta M_H^2 .$$

$$\text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}^{\bar{f}f}(p) \right\} u(p) \Big|_{p^2=m_f^2} \stackrel{!}{=} 0 . \quad \longrightarrow \delta m_f .$$

Bemerkung: Obige Forderung an die Selbstenergien setzen voraus, daß der renormierte „Tadpole“ verschwindet:

$$\hat{\Gamma}^H = 0 , \quad \text{-----} \circledast \text{-----} + \text{-----} \times \text{-----} = 0 .$$

#### b) Wellenfunktionsrenormierung:

On-Shell-Felder sind normiert (Residuum  $\stackrel{!}{=} 1$  am Propagatorpol) und mischen nicht untereinander:

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{\hat{\Sigma}_T^{AA}(k^2)}{k^2} \stackrel{!}{=} \lim_{k^2 \rightarrow M_Z^2} \frac{\text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(k^2) \right\}}{k^2 - M_Z^2} \stackrel{!}{=} \lim_{k^2 \rightarrow M_W^2} \frac{\text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{WW}(k^2) \right\}}{k^2 - M_W^2}$$

$$\stackrel{!}{=} \lim_{k^2 \rightarrow M_H^2} \frac{\text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}^H(k^2) \right\}}{k^2 - M_H^2} . \quad \longrightarrow \delta Z_{AA}, \delta Z_{ZZ}, \delta Z_W, \delta Z_H .$$

$$0 \stackrel{!}{=} \hat{\Sigma}_T^{AZ}(0) \stackrel{!}{=} \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{AZ}(M_Z^2) \right\} . \quad \longrightarrow \delta Z_{ZA}, \delta Z_{AZ} .$$

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{1}{\not{p} - m} \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}^{\bar{f}f}(p) \right\} u(p) . \quad \longrightarrow \delta Z_L^f, \delta Z_R^f .$$

#### c) Ladungsrenormierung:

$e$  = klassische Elementarladung aus Thomson-Streuung:

$$\bar{u}(p) \hat{\Gamma}_\mu^{A\bar{e}e}(0, -p, p) u(p) \stackrel{!}{=} i e \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) . \quad \longrightarrow \delta Z_e .$$

## Berechnung der Renormierungskonstanten (1-Loop)

### a) Eichbosonselbstenergien:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_T^W(k^2) &= \Sigma_T^W(k^2) - \delta M_W^2 + \delta Z_W(k^2 - M_W^2), \\ \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(k^2) &= \Sigma_T^{ZZ}(k^2) - \delta M_Z^2 + \delta Z_{ZZ}(k^2 - M_Z^2), \\ \hat{\Sigma}_T^{AA}(k^2) &= \Sigma_T^{AA}(k^2) + \delta Z_{AA} k^2, \\ \hat{\Sigma}_T^{AZ}(k^2) &= \Sigma_T^{AZ}(k^2) + \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} k^2 + \frac{1}{2}\delta Z_{ZA}(k^2 - M_Z^2).\end{aligned}$$

Renormierungsbedingung

Renormierungskonstante

$$\begin{aligned}\text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^W(M_W^2) \right\} \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta M_W^2 = \text{Re} \left\{ \Sigma_T^W(M_W^2) \right\}, \\ \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(M_Z^2) \right\} \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta M_Z^2 = \text{Re} \left\{ \Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2) \right\}, \\ \hat{\Sigma}_T^{AZ}(0) \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta Z_{ZA} = 2\Sigma_T^{AZ}(0)/M_Z^2, \\ \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{AZ}(M_Z^2) \right\} \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta Z_{AZ} = -2\text{Re} \left\{ \Sigma_T^{AZ}(M_Z^2) \right\}/M_Z^2, \\ \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{W'}(M_W^2) \right\} \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta Z_W = -\text{Re} \left\{ \Sigma_T^{W'}(M_W^2) \right\}, \\ \text{Re} \left\{ \hat{\Sigma}_T^{ZZ'}(M_Z^2) \right\} \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta Z_{ZZ} = -\text{Re} \left\{ \Sigma_T^{ZZ'}(M_Z^2) \right\}, \\ \hat{\Sigma}_T^{AA'}(0) \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \delta Z_{AA} = -\Sigma_T^{AA'}(0).\end{aligned}$$

### b) Fermionselbstenergien:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^{\bar{f}f}(p) &= \not{p} \frac{1-\gamma_5}{2} \left( \Sigma_L^{\bar{f}f}(p^2) + \delta Z_L^f \right) + \not{p} \frac{1+\gamma_5}{2} \left( \Sigma_R^{\bar{f}f}(p^2) + \delta Z_R^f \right) \\ &\quad + m_f \left( \Sigma_S^{\bar{f}f}(p^2) - \frac{\delta m_f}{m_f} - \frac{1}{2}\delta Z_L^f - \frac{1}{2}\delta Z_R^f \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \frac{\delta m_f}{m_f} &= \text{Re} \left\{ \Sigma_S^{\bar{f}f}(m_f^2) + \frac{1}{2}\Sigma_L^{\bar{f}f}(m_f^2) + \frac{1}{2}\Sigma_R^{\bar{f}f}(m_f^2) \right\}, \\ \delta Z_L^f &= -\text{Re} \left\{ \Sigma_L^{\bar{f}f}(m_f^2) + m_f^2 \left[ \Sigma_L^{\bar{f}f'}(m_f^2) + \Sigma_R^{\bar{f}f'}(m_f^2) + 2\Sigma_S^{\bar{f}f'}(m_f^2) \right] \right\}, \\ \delta Z_R^f &= -\text{Re} \left\{ \Sigma_R^{\bar{f}f}(m_f^2) + m_f^2 \left[ \Sigma_L^{\bar{f}f'}(m_f^2) + \Sigma_R^{\bar{f}f'}(m_f^2) + 2\Sigma_S^{\bar{f}f'}(m_f^2) \right] \right\}.\end{aligned}$$

**c) Ladungsrenormierung:**

Renormierte Vertexkorrektur:

$$\hat{\Lambda}_\mu^{A\bar{f}f}(p', p) = \Lambda_\mu^{A\bar{f}f}(p', p) - Q_f \gamma_\mu \left( \delta Z_e + \frac{1}{2} \delta Z_{AA} + \delta Z_L^f \frac{1 - \gamma_5}{2} + \delta Z_R^f \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) + \gamma_\mu (v_f - a_f \gamma_5) \frac{1}{2} \delta Z_{ZA} .$$

Renormierungsbedingung ( $f = e$ ):

$$\bar{u}(p) \hat{\Lambda}_\mu^{A\bar{f}f}(p, p) u(p) \stackrel{!}{=} 0 .$$

Ward-Identität:

$$\bar{u}(p) \Lambda_\mu^{A\bar{f}f}(p, p) u(p) = -Q_f \bar{u}(p) \left[ \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{\bar{f}f}(p) \right] u(p) - a_f \bar{u}(p) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p) \Sigma_T^{AZ}(0) / M_Z^2 .$$

Benutzung der Beziehungen:

- $\bar{u}(p) \left[ \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{\bar{f}f}(p) \right] u(p) = -\bar{u}(p) \gamma_\mu \left( \delta Z_L^f \frac{1 - \gamma_5}{2} + \delta Z_R^f \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) u(p) ,$
- $\Sigma_T^{AZ}(0) = \frac{1}{2} M_Z^2 \delta Z_{ZA} ,$
- $v_f - a_f = -Q_f \frac{s_W}{c_W} ,$

liefert:

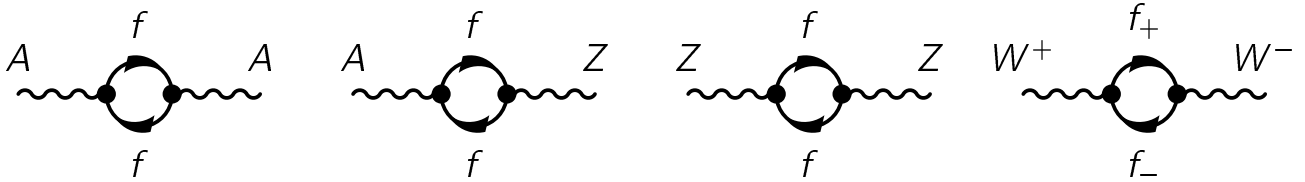
$$\begin{aligned} \delta Z_e &= -\frac{1}{2} \delta Z_{AA} - \frac{s_W}{c_W} \cdot \frac{1}{2} \delta Z_{ZA} \\ &= +\frac{1}{2} \Sigma_T^{AA'}(0) - \frac{s_W}{c_W} \Sigma_T^{AZ}(0) / M_Z^2 . \end{aligned}$$

Bemerkung:

$\delta Z_e$  ist unabhängig davon, für welches Fermion  $f$  die Ladungsrenormierung durchgeführt wird.

→ Ladungsuniversalität!

### 3.3 Beiträge von Fermion-Schleifen zu Eichbosonselfenergien



Allgemeines Integral:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_{\mu\nu}(k) &= \text{Diagram: } \mu \text{ --- } k \text{ --- } 1 \text{ --- } \text{Loop } \begin{matrix} m_2 \\ m_1 \end{matrix} \text{ --- } 2 \text{ --- } \nu \\
 &= (-1)\mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} \{ ie \gamma_\mu (v_1 - a_1 \gamma_5) i(\not{q} + m_1) ie \gamma_\nu (v_2 - a_2 \gamma_5) i(\not{q} + \not{k} + m_2) \}}{(q^2 - m_1^2)[(q+k)^2 - m_2^2]} \\
 &= -e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu (\not{q} + \not{k}) (v_1 v_2 + a_1 a_2 + v_1 a_2 \gamma_5 + v_2 a_1 \gamma_5) \}}{(q^2 - m_1^2)[(q+k)^2 - m_2^2]} \right. \\
 &\quad \left. + m_1 m_2 \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu (v_1 v_2 - a_1 a_2 + v_1 a_2 \gamma_5 - v_2 a_1 \gamma_5) \}}{(q^2 - m_1^2)[(q+k)^2 - m_2^2]} \right]
 \end{aligned}$$

(Beiträge mit einem  $\gamma_5$  unter der Spur verschwinden!)

$$\begin{aligned}
 &= -e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ \frac{4\{2q_\mu q_\nu + q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(q^2 + qk)\}}{(q^2 - m_1^2)[(q+k)^2 - m_2^2]} (v_1 v_2 + a_1 a_2) \right. \\
 &\quad \left. + m_1 m_2 \frac{4g_{\mu\nu}}{(q^2 - m_1^2)[(q+k)^2 - m_2^2]} (v_1 v_2 - a_1 a_2) \right] \\
 &= -\frac{ie^2}{16\pi^2} \left[ 4(v_1 v_2 + a_1 a_2) \{ 2B_{\mu\nu} + k_\nu B_\mu + k_\mu B_\nu \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [A_0(m_1) + A_0(m_2) - (k^2 - m_1^2 - m_2^2) B_0] \right. \\
 &\quad \left. + 4m_1 m_2 (v_1 v_2 - a_1 a_2) g_{\mu\nu} B_0 \right], \quad (B_{\dots} = B_{\dots}(k, m_1, m_2)) \\
 &= -i \frac{\alpha}{\pi} \left[ g_{\mu\nu} \{ (v_1 v_2 + a_1 a_2) [2B_{00} - \frac{1}{2} A_0(m_1) - \frac{1}{2} A_0(m_2) + \frac{1}{2} (k^2 - m_1^2 - m_2^2) B_0] \right. \\
 &\quad \left. + (v_1 v_2 - a_1 a_2) m_1 m_2 B_0 \right. \\
 &\quad \left. + k_\mu k_\nu (v_1 v_2 + a_1 a_2) (2B_{11} + 2B_1) \right] \\
 &=: -i \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Sigma_T(k^2) - i \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Sigma_L(k^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_T(k^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ (v_1 v_2 + a_1 a_2) \left[ 2B_{00} - \frac{1}{2}A_0(m_1) - \frac{1}{2}A_0(m_2) + \frac{1}{2}(k^2 - m_1^2 - m_2^2)B_0 \right] \right. \\
&\quad \left. + (v_1 v_2 - a_1 a_2)m_1 m_2 B_0 \right\} \\
&= \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ (v_1 v_2 + a_1 a_2) \left[ \left( k^2 - \frac{1}{2}m_1^2 - \frac{1}{2}m_2^2 + 3m_1 m_2 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{2k^2} \right) B_0(k^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m_1^2 \left( 1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2k^2} \right) B_0(0, 0, m_1) + m_1^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m_2^2 \left( 1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2k^2} \right) B_0(0, 0, m_2) + m_2^2 - \frac{k^2}{3} \right] \right. \\
&\quad \left. - 6 a_1 a_2 m_1 m_2 B_0(k^2, m_1, m_2) \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\Sigma_T(k^2) =: \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ (v_1 v_2 + a_1 a_2) H(k^2, m_1, m_2) - 6 a_1 a_2 m_1 m_2 B_0(k^2, m_1, m_2) \right\} .$$

$$AA: \quad m_1 = m_2 = m_f, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad v_1 = v_2 = -Q_f .$$

$$\Sigma_{T,\text{ferm}}^{AA}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f Q_f^2 H(k^2, m_f, m_f) .$$

$$AZ: \quad m_1 = m_2 = m_f, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_f, \quad v_1 = -Q_f, \quad v_2 = v_f .$$

$$\Sigma_{T,\text{ferm}}^{AZ}(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f Q_f v_f H(k^2, m_f, m_f) .$$

$$ZZ: \quad m_1 = m_2 = m_f, \quad a_1 = a_2 = a_f, \quad v_1 = v_2 = v_f .$$

$$\Sigma_{T,\text{ferm}}^{ZZ}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f \left[ (v_f^2 + a_f^2) H(k^2, m_f, m_f) - 6a_f^2 m_f^2 B_0(k^2, m_1, m_2) \right] .$$

$$W: \quad m_1 = m_{f-}, \quad m_2 = m_{f+}, \quad a_1 = a_2 = v_1 = v_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}s_W} .$$

$$\Sigma_{T,\text{ferm}}^W(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{1}{4s_W^2} \sum_{(f+,f-)} N_c^f \left[ H(k^2, m_{f-}, m_{f+}) - 3m_{f-}m_{f+} B_0(k^2, m_{f-}, m_{f+}) \right] .$$

( $\Sigma$ : Summe über alle Fermion-Doublets)

**Spezialfälle für  $H(k^2, m_1, m_2)$ :**

$$\begin{aligned}
H(0, 0, m) &= m^2 \left[ -\frac{3}{2} B_0(0, 0, m) - \frac{m^2}{2} B'_0(0, 0, m) + 1 \right] \\
&= -\frac{3}{2} m^2 \left[ \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right] , \\
H'(0, 0, m) &= B_0(0, 0, m) - \frac{m^2}{2} B'_0(0, 0, m) - \frac{m^4}{4} B''_0(0, 0, m) - \frac{1}{3} \\
&= \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{1}{3} , \\
H(0, m, m) &= 2m^2 [B_0(0, m, m) - B_0(0, 0, m) + 1] = 0 , \\
H'(0, m, m) &= B_0(0, m, m) + 2m^2 B'_0(0, m, m) - \frac{1}{3} = \Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} , \\
H(0, m_1, m_2) &= \mathcal{O}(m_1^2, m_1 m_2, m_2^2) , \\
H(k^2, 0, 0) &= k^2 [B_0(k^2, 0, 0) - \frac{1}{3}] = k^2 \left[ \Delta - \log \frac{|k^2|}{\mu^2} + \frac{5}{3} + i\pi\Theta(k^2) \right] .
\end{aligned}$$

**Spezialfälle für  $\Sigma_{T,\text{ferm}}(k^2, m_1, m_2)$ :**

Exakte Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{T,\text{ferm}}^{AA}(0) &= \Sigma_{T,\text{ferm}}^{AZ}(0) = 0 , \\
\Sigma_{T,\text{ferm}}^{AA}{}'(0) &= \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f Q_f^2 \left( \Delta - \log \frac{m_f^2}{\mu^2} \right) .
\end{aligned}$$

Näherungen für  $m_f \rightarrow 0$ , ( $f \neq t$ ),  $|k^2| \ll m_t^2$  (z.B.  $|k^2| \sim M_W^2, M_Z^2$ ):

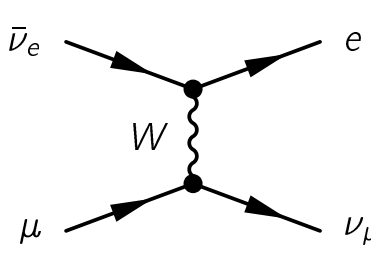
$$\begin{aligned}
\Sigma_{T,\text{ferm}}^{ZZ}(k^2) &= \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{f \neq t} N_c^f (v_f^2 + a_f^2) k^2 \left[ \Delta - \log \frac{|k^2|}{\mu^2} + \frac{5}{3} + i\pi\Theta(k^2) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{3\pi} N_c^t \left[ (v_t^2 + a_t^2) k^2 \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - 6a_t^2 \left\{ m_t^2 \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{6} k^2 \right\} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(m_t^{-2}) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{T,\text{ferm}}^W(k^2) &= \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{1}{4s_W^2} \sum_{\substack{(f+,f-) \\ \neq (t,b)}} N_c^f k^2 \left[ \Delta - \log \frac{|k^2|}{\mu^2} + \frac{5}{3} + i\pi\Theta(k^2) \right] \\
&+ \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{1}{4s_W^2} N_c^t \left[ -\frac{3}{2} m_t^2 \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + k^2 \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} + \frac{1}{3} \right) \right] \\
&+ \mathcal{O}(m_t^{-2}) .
\end{aligned}$$



### 3.4 Myon-Zerfall und W-Masse

#### Bornsche Näherung



$$\mathcal{M}_0 = \bar{u}_{\nu_\mu} \frac{ie}{\sqrt{2}s_W} \gamma^\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} u_\mu \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta}}{\underbrace{(p_\mu - p_{\nu_\mu})^2 - M_W^2}_{=\mathcal{O}(m_\mu^2)}} \cdot \bar{u}_e \frac{ie}{\sqrt{2}s_W} \gamma^\beta \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\nu_e},$$

$(m_e, m_\mu \ll M_W).$

$$\mathcal{M}_0 = -\frac{ie^2}{8s_W^2 M_W^2} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\alpha (1-\gamma_5) u_\mu \cdot \bar{u}_e \gamma^\alpha (1-\gamma_5) u_{\nu_e}.$$

Myon-Lebensdauer  $\tau_\mu$  in niedrigster Ordnung:

$$\frac{1}{\tau_\mu^{(0)}} = \frac{\alpha^2}{384\pi} \cdot \frac{m_\mu^5}{M_W^4 s_W^4} \cdot \left(1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right).$$

#### Fermi-Konstante, $\Delta r$ und W-Masse

$$\frac{1}{\tau_\mu} =: \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \cdot \left(1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]}_{\text{QED-Korrektur im Fermi-Modell}}.$$

- Messung von  $\tau_\mu$  ergibt  $G_\mu$ .
- Berechnung von  $\tau_\mu$  im SM liefert Präzisionstest für das SM, da  $\tau_\mu(G_\mu)$  sehr genau bekannt ist.

Übliches Vorgehen: Berechnung von  $M_W$  aus  $G_\mu$  und Vergleich mit  $M_W^{\text{exp}}$ .

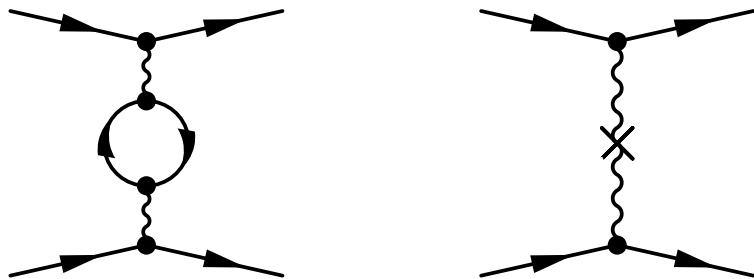
$$\begin{aligned} G_\mu &= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_W^2 (1 - M_W^2/M_Z^2)} \cdot (1 + \mathcal{O}(\alpha)) \\ &= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_W^2 (1 - M_W^2/M_Z^2)} \cdot (1 + \Delta r + \mathcal{O}(\alpha^2)). \end{aligned}$$

$\Delta r = (\text{Einschleifen-SM-Korrektur}) - (\text{Einschleifen-Korrektur im Fermi-Modell}).$

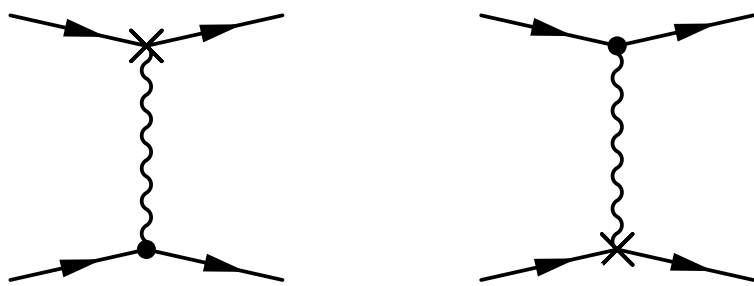
Beachte:  $\Delta r = \Delta r(\alpha, M_Z, M_W, M_H, m_f).$

Fermionische Einschleifen-Korrekturen zu  $\Delta r$ 

Relevante Beiträge:



$$\mathcal{M}_{\text{self,ferm}} = \mathcal{M}_0 \frac{\Sigma_{T,\text{ferm}}^W(0)}{M_W^2} - \mathcal{M}_0 \left[ \delta Z_W + \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} \right]_{\text{ferm}},$$



$$\mathcal{M}_{\text{vert,ferm}} = 2 \cdot \mathcal{M}_0 \left[ \frac{1}{2} \delta Z_W + \delta Z_e + \underbrace{\frac{c_W^2}{2s_W^2} \left( \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \right)}_{-\frac{\delta s_W}{s_W}} \right]_{\text{ferm}}.$$

Beachte: keine Beiträge von Fermion-Schleifen in  $\delta Z_{R,L}^f$  bzw. zu den virtuellen Korrekturen der  $\Gamma^{W\bar{\nu}\mu\mu}$ ,  $\Gamma^{W\bar{e}\nu_e}$  und  $\Gamma^{\bar{\nu}\mu\bar{e}\nu_e}$ -Vertexfunktionen!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta r_{\text{ferm}} &= \left[ \frac{\Sigma_T^W(0)}{M_W^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} + 2\delta Z_e + \frac{c_W^2}{s_W^2} \left( \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \right) \right]_{\text{ferm}} \\ &= \left[ \frac{\Sigma_T^W(0) - \text{Re} \{ \Sigma_T^W(M_W^2) \}}{M_W^2} + \Sigma_T^{AA'}(0) + 2 \frac{s_W}{c_W} \frac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{M_Z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_W^2}{s_W^2} \text{Re} \left\{ \frac{\Sigma_T^W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2)}{M_Z^2} \right\} \right]_{\text{ferm}}. \end{aligned}$$

**Näherung für  $\Delta r_{\text{ferm}}$ :**  $m_{f \neq t} = 0$ ,  $M_W, M_Z \ll m_t$ .

$$\Sigma_T^W(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{1}{4s_W^2} N_c^t \left( -\frac{3}{2} m_t^2 \right) \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right) + \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ \Sigma_T^W(M_W^2) \} &= \Sigma_T^W(0) + \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{1}{4s_W^2} \sum_{\substack{(f+, f-) \\ \neq (t, b)}} N_c^f M_W^2 \left( \Delta - \log \frac{M_W^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \frac{1}{4s_W^2} \cdot N_c^t M_W^2 \left( \Delta - \log \frac{M_W^2}{\mu^2} + \frac{1}{3} \right) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ \Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2) \} &= \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{f \neq t} N_c^f (v_f^2 + a_f^2) M_Z^2 \left( \Delta - \log \frac{M_Z^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{3\pi} N_c^t \left[ (v_t^2 + a_t^2) M_Z^2 \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} \right) - a_t^2 M_Z^2 \right. \\ &\quad \quad \left. - 6a_t^2 m_t^2 \left( \Delta - \log \frac{m_t^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \end{aligned}$$

$$\Sigma_T^{AA'}(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f Q_f^2 \left( \Delta - \log \frac{m_f^2}{\mu^2} \right).$$

Benutzung von  $|I_{W,f}^3| = \frac{1}{2}$  und  $\sum_{\text{Dublett}} (I_{W,f}^3 Q_f - \frac{1}{4}) = 0$  liefert:

$$\begin{aligned} \Delta r_{\text{ferm}} &= \underbrace{\frac{\alpha}{3\pi} \sum_{f \neq t} N_c^f \left( \log \frac{M_Z^2}{m_f^2} - \frac{5}{3} \right)}_{=: \Delta\alpha(M_Z^2) = +5.9\%} \\ &\quad + \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{f \neq t, b} N_c^f \frac{2s_W^2 - 1}{8s_W^4} \log c_W^2 \\ &\quad - \frac{\alpha}{3\pi} N_c^t \frac{1}{8s_W^4} \left[ \frac{3}{2} \frac{m_t^2}{M_Z^2} + \left( 1 - \frac{4}{3} s_W^2 \right) \log \frac{m_t^2}{M_Z^2} + \frac{1}{2} - \frac{8}{9} s_W^2 \right] \\ &\quad + \mathcal{O} \left( \frac{M_Z^2}{m_t^2} \log \frac{m_t^2}{M_Z^2} \right). \end{aligned}$$

Beachte: der Korrekturterm  $\sim m_t^2$  entspricht  $\approx -3\%$  für  $m_t \approx 175$  GeV.

Einschleifen-Näherung für  $\Delta r$  im SM

$$\Delta r = \Sigma_T^{AA'}(0) + 2 \frac{c_W}{s_W} \frac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{M_Z^2} + \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \left( 6 + \frac{7 - 4s_W^2}{2s_W^2} \log c_W^2 \right) + \frac{\Sigma_T^W(0) - \text{Re} \{ \Sigma_T^W(M_W^2) \}}{M_W^2} + \frac{c_W^2}{s_W^2} \text{Re} \left\{ \frac{\Sigma_T^W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2)}{M_Z^2} \right\} .$$

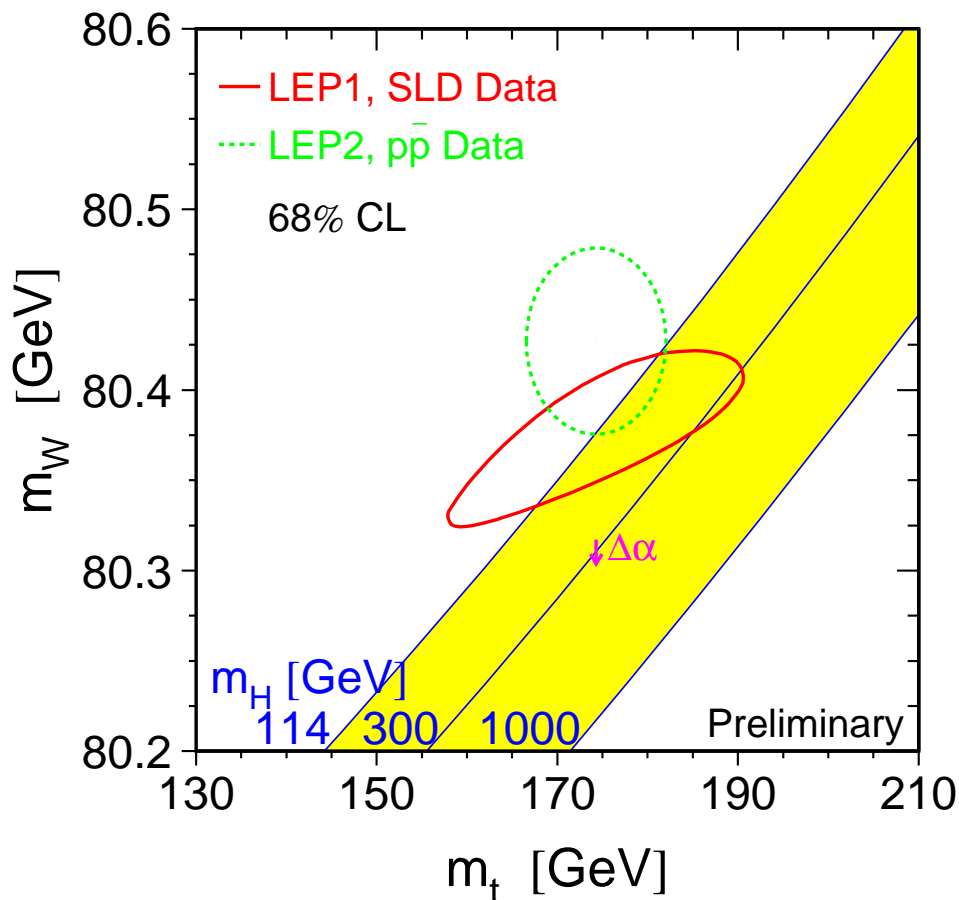
Führende  $M_H$ -Abhängigkeit ist logarithmisch („Screening theorem“):

$$(\Delta r)_{\text{Higgs}} \sim \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \frac{11}{12} \log \frac{M_H^2}{M_Z^2} \quad \text{für} \quad M_H \gg M_Z .$$

Bemerkung: Zwei- (teilweise Drei-) Schleifenkorrekturen zu  $\Delta r$  bekannt:

$$\mathcal{O}(\alpha^n \log^n m_{f \neq t}, \alpha^2, \alpha\alpha_s, \alpha\alpha_s^2, G_F^3 m_t^6, G_F^2 m_t^4 \alpha_s) .$$

**Vergleich von  $M_W^{\text{th}}$  aus  $G_\mu$**  (LEPEWWG, Aachen 2003)



$$(m_t^{\text{exp}} = 174.3 \pm 5.1 \text{ GeV}, \quad M_W^{\text{exp}} = 80.426 \pm 0.034 \text{ GeV})$$

# Literatur

## QED:

- Peskin, Schroeder: Introduction to Quantum Field Theory,  
Bjorken, Drell: Relativistische Quantenmechanik,  
Relativistische Quantenfeldtheorie,  
Itzykson, Zuber: Quantum Field Theory,  
Jauch, Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons,  
Pokorski: Gauge Field Theories.

## Renormierung / dimensionale Regularisierung:

- Collins: Renormalization.

## Skalare $n$ -Punkt-Integrale:

- 't Hooft, Veltman: Nucl. Phys. **B153** (1979) 365.

## Reduktion von Tensorintegralen:

- Passarino, Veltman: Nucl. Phys. **B160** (1979) 151.

## Elektroschwaches Standardmodell:

- Nachtmann: Elementarteilchenphysik,  
Cheng, Li: Gauge Theory of Elementary Particle Physics,  
Becher, Böhm, Joos: Eichtheorien,  
Taylor: Gauge Theories for Weak Interactions.

## Renormierung des Standardmodells:

- Böhm, Hollik, Spiesberger: Fortschr. Phys. **34** (1986) 687,  
Hollik: Fortschr. Phys. **38** (1990) 165,  
Denner: Fortschr. Phys. **41** (1993) 307,  
Denner, Dittmaier, Weiglein: Nucl. Phys. **B440** (1995) 95.