Orga:

Benjamin Bahr

benjamin.bahr@desy.de

https://unith.de/teaching/lecture_notes/Vorkurs_SoSe17

Vorlesung: Mo-Fr $9^{00}-10^{30}$

Tutorien: Mo-Fr $10^{45}-12^{15}$, $13^{30}-15^{00}$
(oder nach Vereinbarung)

Grundkurse: Di, Mi, Do: $15^{30}-17^{00}$ Sem. R. 1, 2

Fortgeschrittenenkurs: Di, Mi, Do: $15^{30}-17^{00}$ Sem. R. 4

Funktionen (reelle)

Seien $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$ Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{D}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$$

"ist Teilmenge von"

Unter einer reellen Funktion f versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ genau ein Element $y = f(x)$ aus dem Wertebereich $\mathbb{W}$ zuordnet.

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}$$

$$f : x \longmapsto f(x) = y$$

Argument, unabhängige Variable

Funktionswert, abhängige Variable

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y = f(x)$$

Verarbeitungsvorschrift

"Mengenklammer"

Die Menge $f(\mathbb{D}) = \{ f(x) \in \mathbb{W} \mid x \in \mathbb{D} \}$

"ist ein Element von"

"für die gilt"

bezeichnet man als Bildbereich (oder auch als "Bild von $\mathbb{D}$ unter f")

$f(\mathbb{D})$ ist die Menge aller Elemente $f(x)$ des Wertebereiches, für die gilt, dass x ein Element des Definitionsbereiches ist.

- Eine Funktion f heißt injektiv, wenn gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$\Leftrightarrow$ jedes Element y im Wertebereich wird höchstens einmal angenommen.

- Eine Funktion f heißt surjektiv, wenn gilt:

$$f(\mathbb{D}) = \mathbb{W}$$

$\Leftrightarrow$ jedes Element y im Wertebereich wird mindestens einmal angenommen.

- Eine Funktion f heißt bijektiv, wenn sie sowohl in-, als auch surjektiv ist.

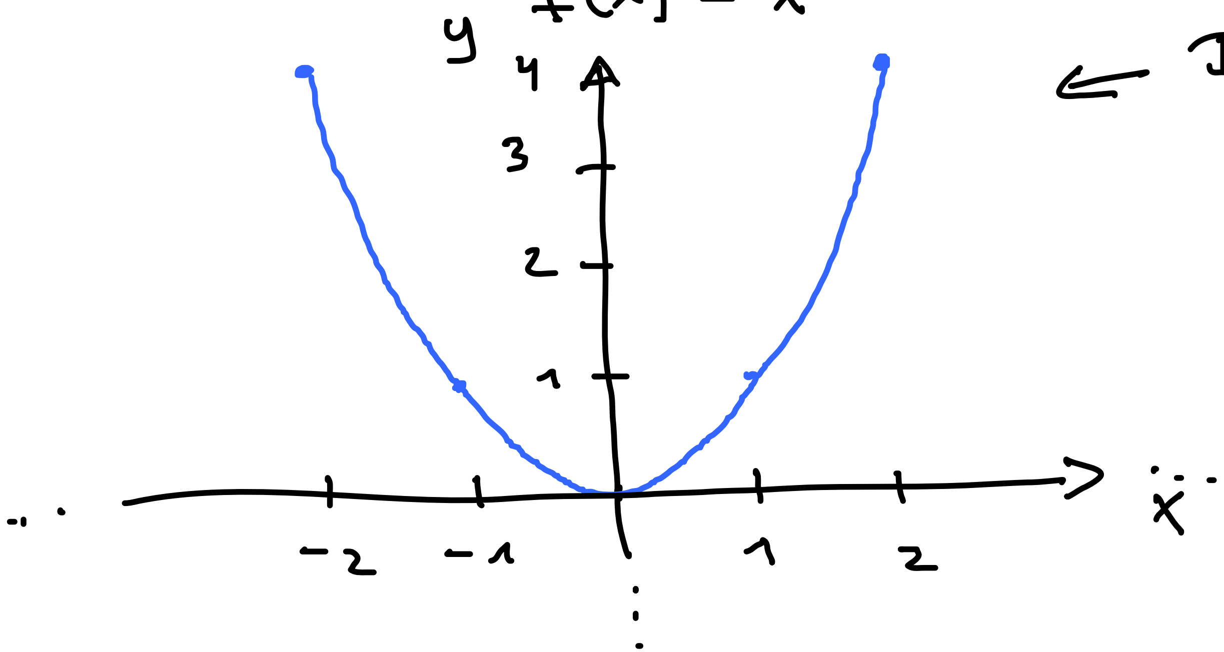
Die Menge $\Gamma_f = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{D},\ y = f(x)\}$ nennt man den <u>Graphen von f</u>, oder auch <u>Kurve von f</u>.

<u>Beispiel</u>: $\mathbb{D} = [-2, 2]$

alle reellen Zahlen, die größer oder gleich -2, und kleiner oder gleich 2 sind.

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



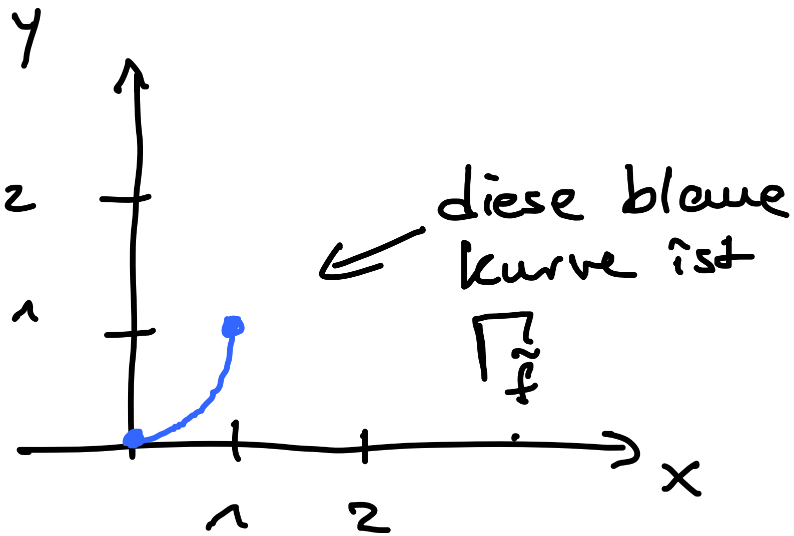
Diese blaue Kurve ist Γ_f.

dieselbe Funktionsvorschrift, aber eine andere Funktion

$$\tilde{f} : \tilde{\mathbb{D}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{W}}$$

$$\tilde{\mathbb{D}} = [0,1] \quad , \quad \tilde{\mathbb{W}} = \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = x^2$$



Wichtig: die Funktionen f und $\tilde{f}$ sind <u>nicht</u> dieselben!
f ist weder surjektiv noch injektiv, $\tilde{f}$ immerhin injektiv.

Notation für Teilmengen von $\mathbb{R}$:

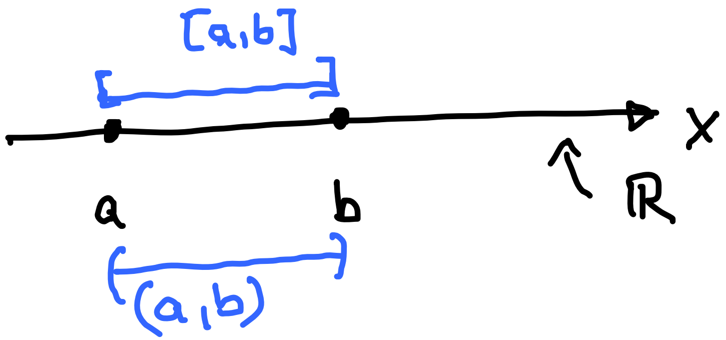
$a, b \leq \mathbb{R}$, $a \leq b$

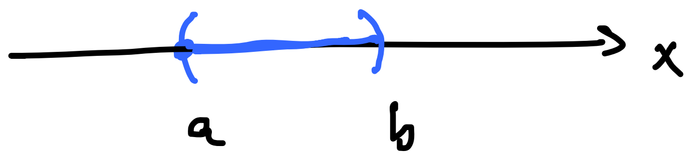
$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ geschlossenes Intervall (von a bis b)

$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ offenes Intervall

$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ halboffenes Intervall

(Anmerkung: manche Leute schreiben auch $]a, b[$ statt (a,b), oder $]a,b]$ statt $(a,b]$).

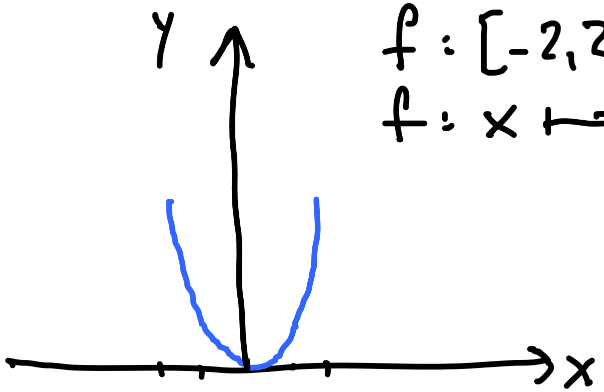




Eigenschaften von Funktionen:

Nullstellen von f:

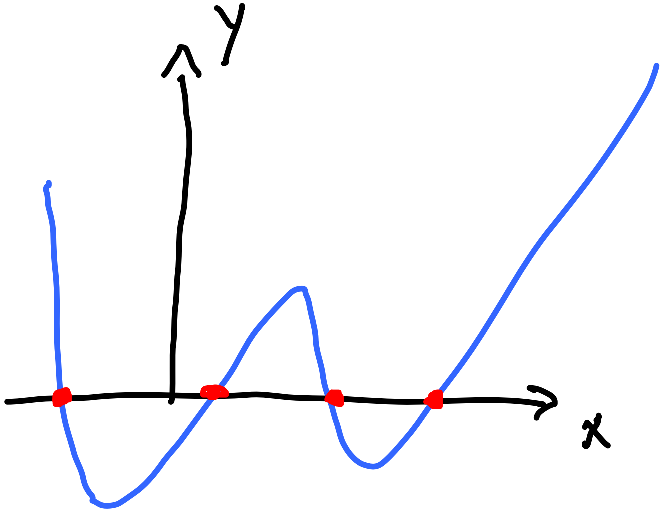
$$\{x \in D \mid f(x) = 0\} = N_f = f_0$$



$f: [-2,2] \to \mathbb{R}$

$f: x \mapsto x^2$

$N_f = \{0\}$

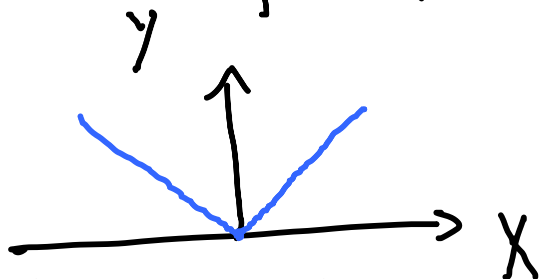


Symmetrie einer Funktion:

eine Funktion f heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

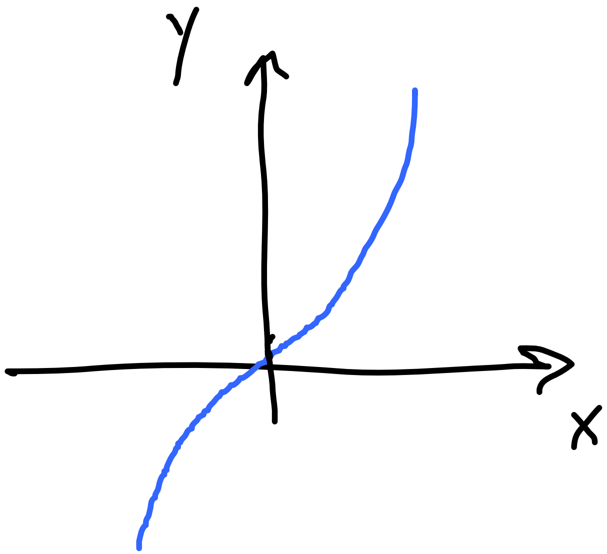
$$f(x) = f(-x)$$

Der Graph Γ_f ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse



eine Funktion f heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$:

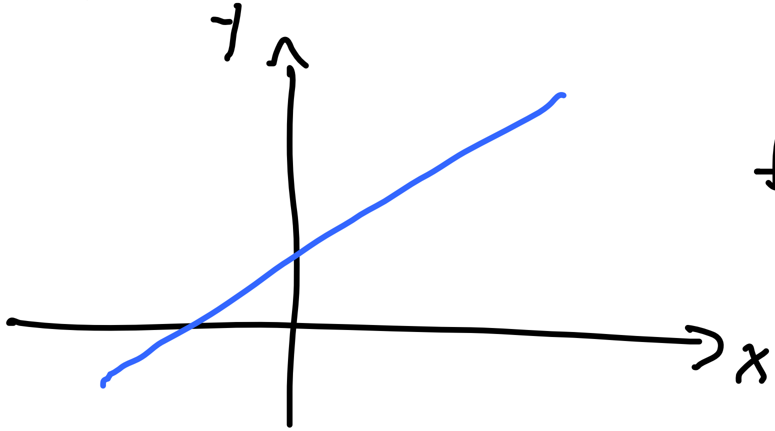
$$f(x) = -f(-x)$$



Der Graph ist dann punkt-symmetrisch zum Ursprung $(0,0)$

(Leider): die meisten Funktionen sind weder gerade noch ungerade.

z.B.:



$f(x) = ax+b$

Beispiele für gerade Funktionen: $(\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R})$

- $f(x) = x^2$ $\quad f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2 = f(x)$
- $f(x) = |x|$ $\quad f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$
- $f(x) = \cos(x)$ $\quad f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$

Beispiele für ungerade Funktionen:

- $f(x) = x^3$ $\quad f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$
- $f(x) = x$ $\quad f(-x) = -x = -f(x)$
- $f(x) = \sin(x)$ $\quad f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$

Monotie von Funktionen:

Eine Funktion f heißt <u>monoton steigend</u>, falls

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

"für alle"

... <u>monoton fallend</u>, falls

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

... <u>streng monoton steigend</u>, falls

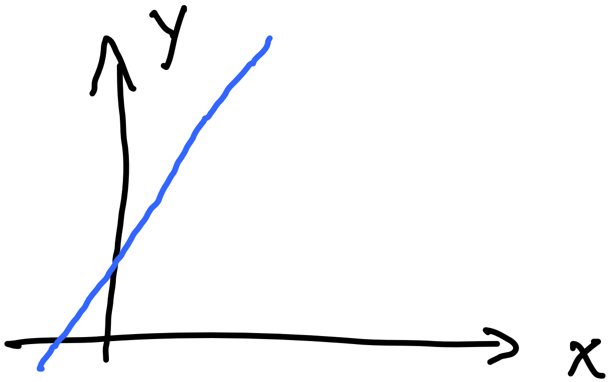
$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

... <u>streng monoton fallend</u>, falls

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

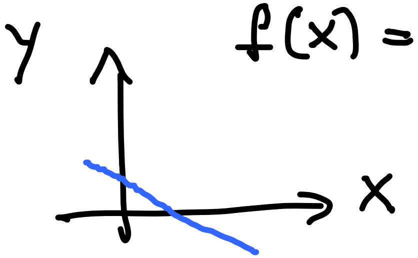
Beispiele:

$$f(x) = 2x + 3$$



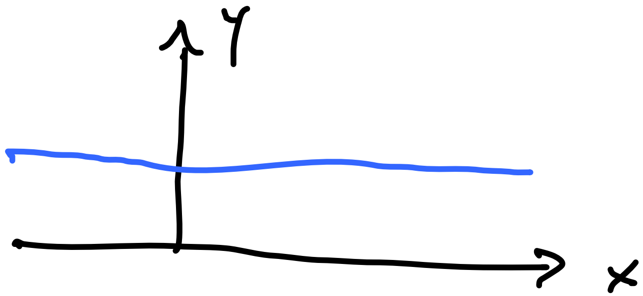
(streng) monoton steigend

$$f(x) = -x + 2$$



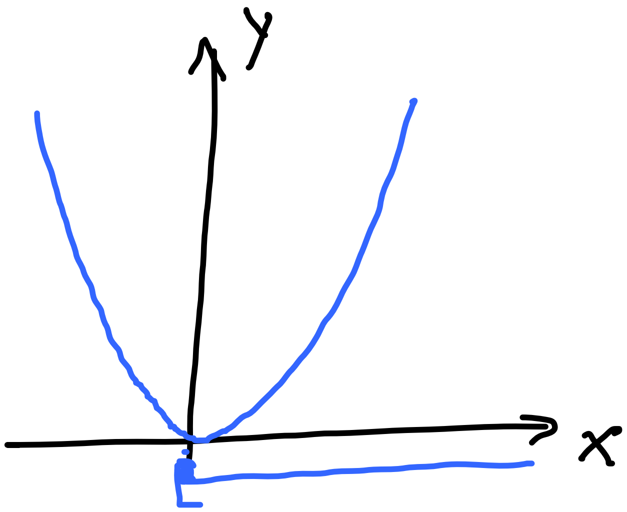
(streng) monoton fallend

$$f(x) = 1$$



sowohl monoton steigend als auch monoton fallend

denn: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



$f(x) = x^2$

weder noch, aber:

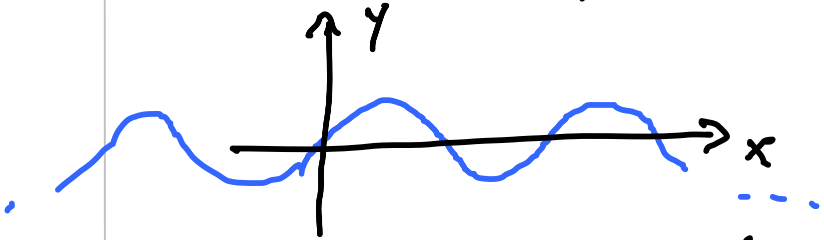
streng monoton steigend für $x > 0$

—— " —— fallend für $x < 0$.

Eine Funktion f heißt <u>periodisch</u> (mit Periode p), falls

$$\forall x \in D : f(x+p) = f(x)$$

Beispiel: 1) $f(x) = \sin(x)$, $p = 2\pi$



2) $f(x) = \sin(\omega x)$, $p = \frac{2\pi}{\omega}$

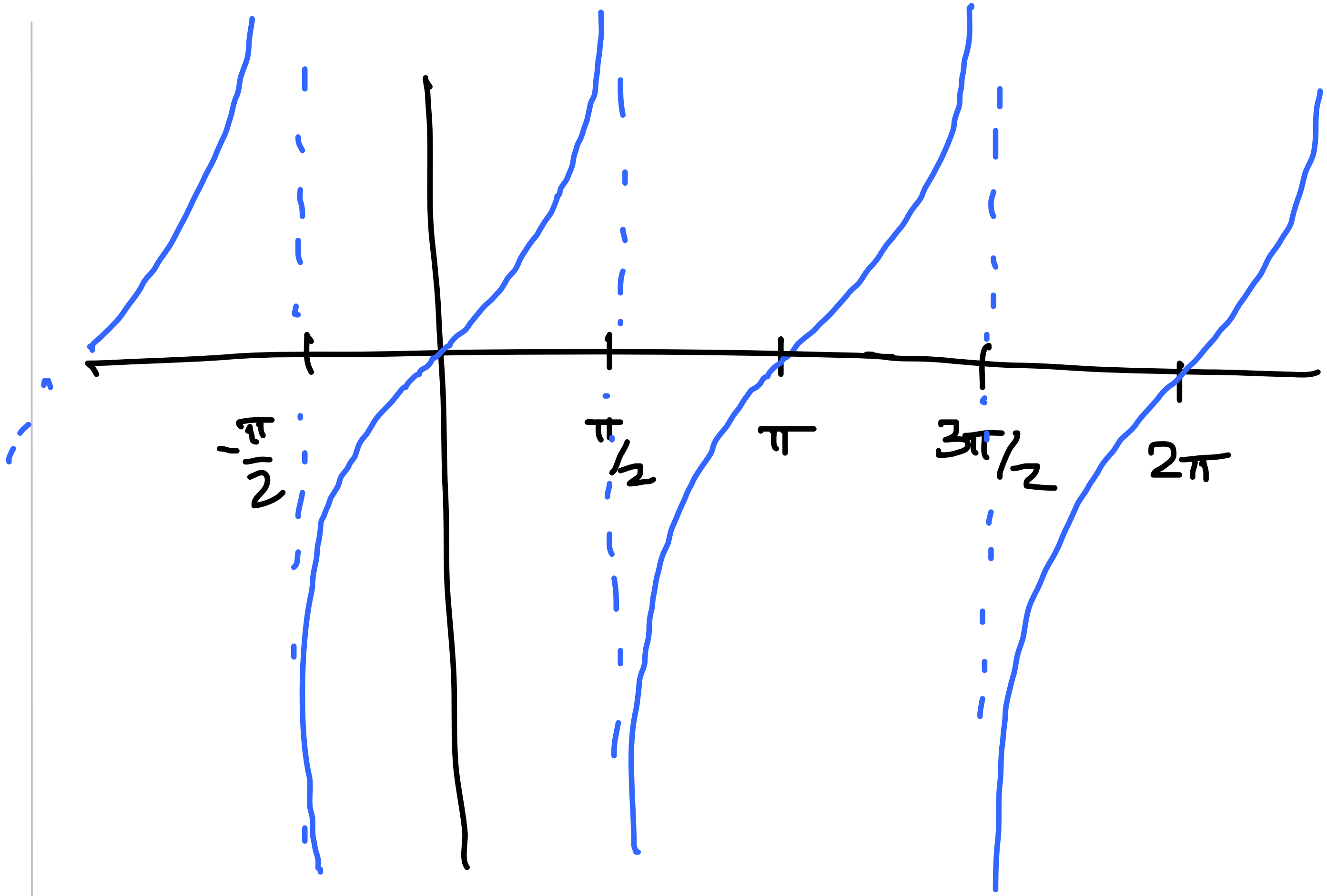
$$f(x+p) = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$

$$= \sin(\omega x + 2\pi) = \sin(\omega x)$$

3) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad p = \pi$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\underbrace{\cancel{\cos(\pi)}}_{=-1} + \underbrace{\cancel{\sin(\pi)}}_{=0}\cdot\cos(x)}{\cos(x)\underbrace{\cancel{\cos(\pi)}}_{-1} - \sin(x)\cdot\underbrace{\cancel{\sin(\pi)}}_{=0}}$$

$$= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$



$-\frac{\pi}{2}$
$\pi/2$
π
$3\pi/2$
2π

https://unith.desy.de/teaching/lecture_notes/vorkurs_sose17

Verkettung von Funktionen

$$x \xmapsto{f} f(x) = y \xmapsto{g} g(y) = g(f(x))$$

Sei $f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{W}_f$

$g : \mathbb{D}_g \longrightarrow \mathbb{W}_g$,

und $\mathbb{W}_f \subset \mathbb{D}_g$,

dann ist die Verkettung von f und g:

$$g \circ f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{W}_g$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

$g \circ f$ heißt auch „g nach f"

Beispiel:

$$f(x) = x + 10$$
$$g(x) = x^2$$

$$g\circ f\,(x) = g(f(x)) = g(x+10) = (x+10)^2$$

aber:

$$f\circ g\,(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+10 \neq (x+10)^2$$
$$\neq g\circ f\,(x)$$

also: Verkettungen sind in der Regel nicht vertauschbar.

Weiteres Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{x-3}$$
$$g(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$g\circ f\,(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-3}-2}$$

beachte:

"ohne"

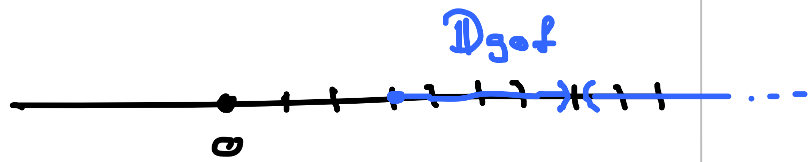
$$\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$ "alle reellen Zahlen außer 2"

aber

$$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$$ "alle nicht-negativen reellen Zahlen"

$\Rightarrow$ $\mathbb{D}_{g \circ f}$ muss eingeschränkt werden:

$$\mathbb{D}_{g \circ f} = \mathbb{D}_f \setminus \{7\} = \mathbb{R}^{\geq 3} \setminus \{7\}$$



Umkehrfunktionen:

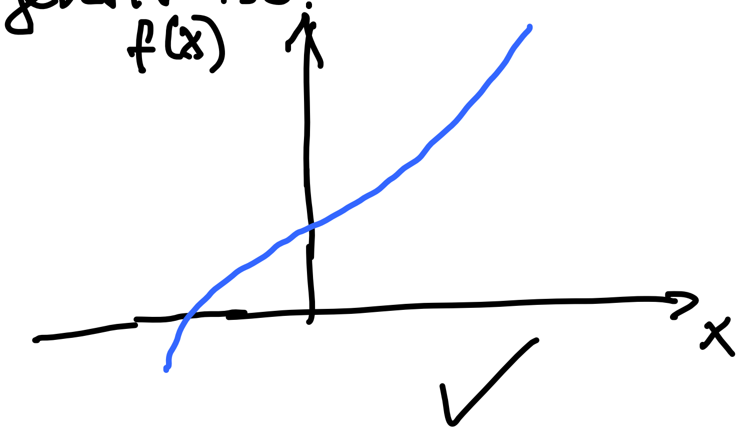
Gibt es für eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W} = f(\mathbb{D})$ eine Funktion $g : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ mit

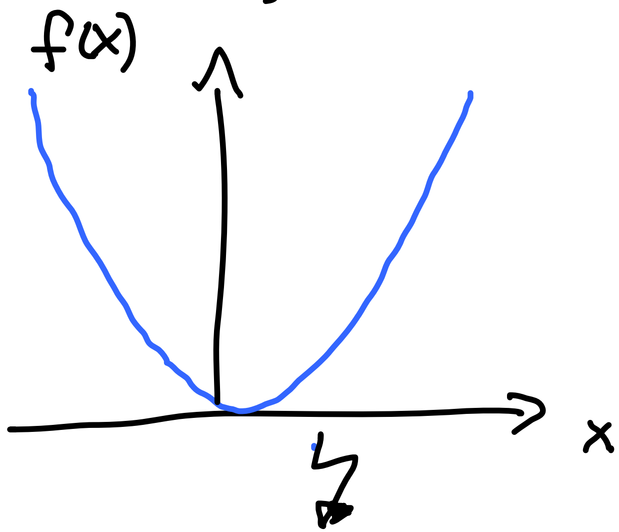
$g \circ f(x) = x$ für alle x

$$\left(\forall x : g \circ f(x) = x \right),$$

dann nennt man g die Umkehrfunktion von f, und schreibt $g(x) = f^{-1}(x)$

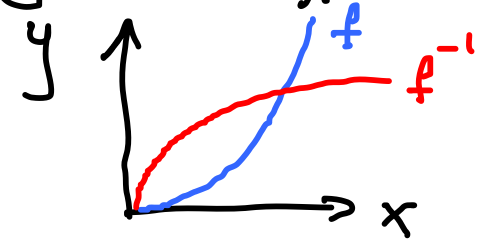
Die Umkehrfunktion gibt es genau dann, wenn f bijektiv ist.





Eine Funktion f heißt umkehrbar ("invertierbar") wenn sie sowohl surjektiv, als auch injektiv ist. Genau dann existiert eine Umkehrfunktion.

Fact: Streng monotone Funktionen sind immer umkehrbar (wenn man die Definitions- und Wertebereiche vernünftig wählt).

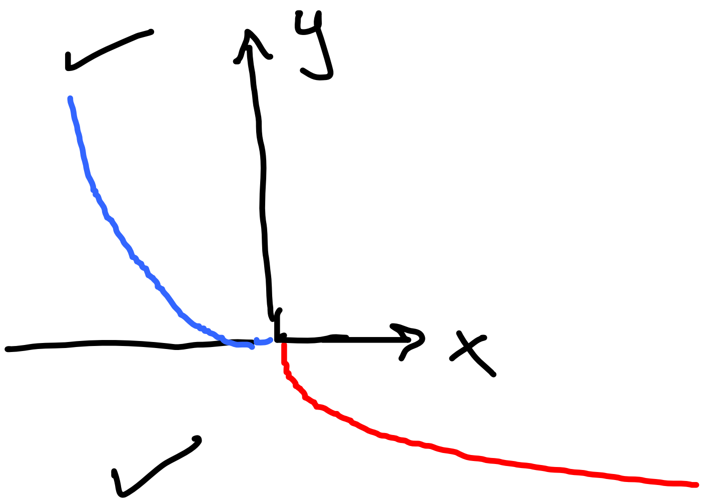


Beispiel: $f: \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f\,(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ ✓



Beispiel: $f: \mathbb{R}^{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$f^{-1} \circ f\,(x) = -\sqrt{x^2} = -|x|$

$= -(-x) = x$ ✓

Bestimmung der Umkehrfunktion:

1.) Funktionsgleichung $y = f(x)$

2.) Auflösen nach x: $x = f^{-1}(y)$

3.) Überprüfen, ob $f^{-1} \circ f(x) = x$!

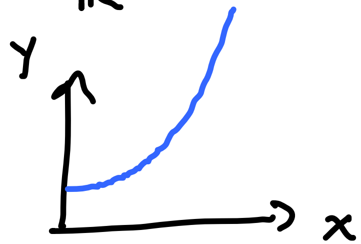
$\Rightarrow$ $y \mapsto f^{-1}(y)$ ist die gesuchte Umkehrfunktion

Beispiel: $f : [0, \infty) = \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow [1, \infty) = \mathbb{R}^{\geq 1}$

$$x \longmapsto 1 + x^2$$

1.) streng monoton wachsend

$\Leftrightarrow$ umkehrbar



2.) $y = 1 + x^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2 = y - 1$

$\Leftrightarrow$ $x = \pm \sqrt{y - 1}$

„+ oder –"

da stehen jetzt eigentlich zwei Funktionen. Welche ist f^{-1}?

3.) $x = -\sqrt{y-1} \quad : \mathbb{R}^{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 0} \quad \neq \mathbb{D}$

$x = \sqrt{y-1} \quad : \mathbb{R}^{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \quad = \mathbb{D}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$

$f^{-1} \circ f(x) \overset{!}{=} x$ "soll gleich sein, ist nachzuprüfen"

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(1+x^2)-1} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ ✓

Stetigkeit von Funktionen

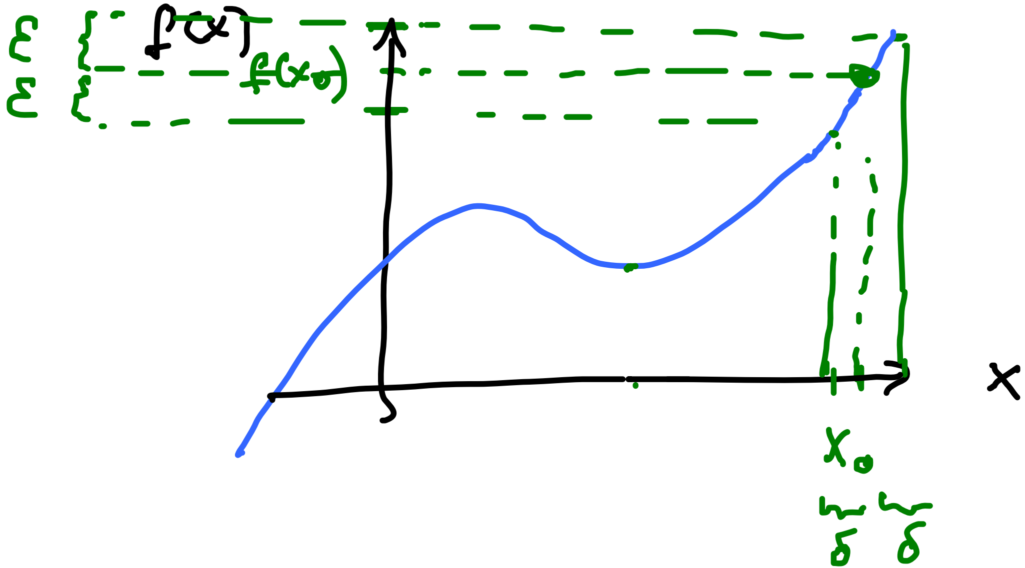
Eine Funktion $x \mapsto f(x)$ ist stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$, wenn sie benachbarte Punkte von x_0 in benachbarte Punkte von $f(x_0)$ abbildet.

$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ ist stetig bei $x_0 \in \mathbb{D}$, genau dann, wenn:

für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass gilt:

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ ist auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

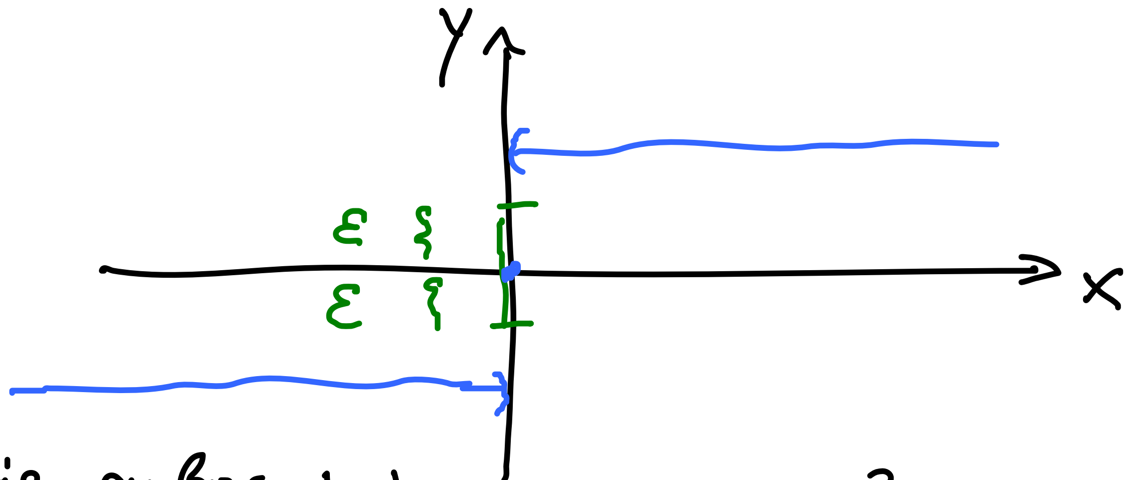


Beispiele:

Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$



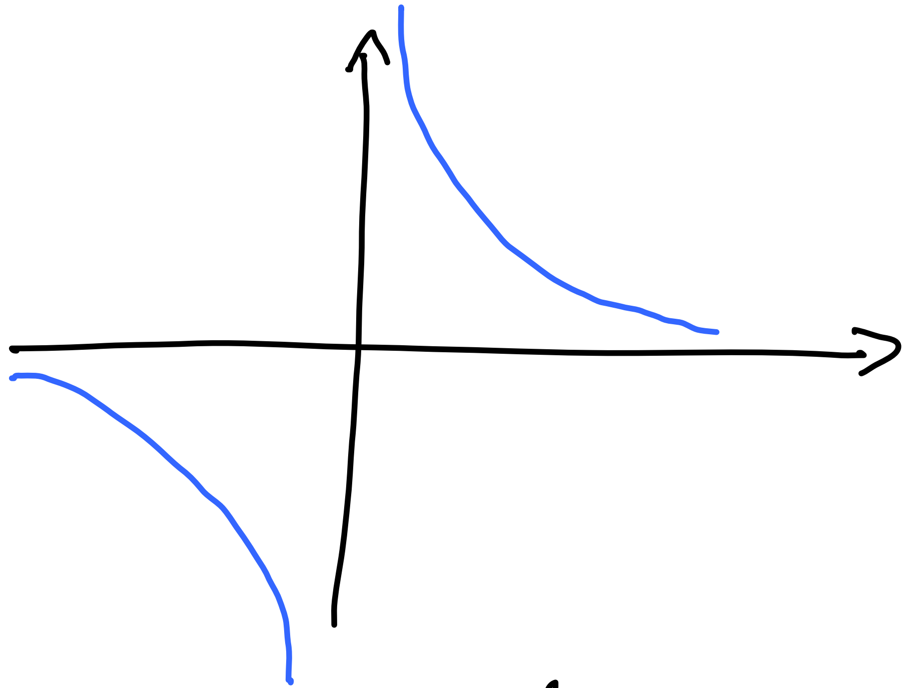
überall stetig außer bei $x=0$. Warum?
Weil zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ es kein $\delta > 0$ sodass für alle x mit $|x| < \delta$ gilt, dass $|f(x)| < \frac{1}{2}$ ist.

Heaviside – (oder "Stufen-") funktion:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

ebenfalls nicht stetig bei $x = 0$.

Aber: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



diese Funktion ist (überall im Definitionsbereich) stetig!

Spezielle Funktionen :

Potenzen $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}}$

$n \in \mathbb{N}$

Konvention: $f(x) = x^0 \iff f(x) = 1$

Umkehrfunktionen: $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

n gerade: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\geq 0} = \mathbb{D}_{f^{-1}}$

n ungerade: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \mathbb{D}_{f^{-1}}$

Achtung: $\sqrt[n]{x^n} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$ für ungerade n!

$\sqrt[n]{x^n} = |x|$ für gerade n!

Beispiel: $\sqrt[2]{(-2)^2} = \sqrt[2]{4} = 2$

Potenzgesetze: $\left(\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right)$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

damit bietet sich an, auch a^n für $n<0$ zu definieren, mit

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

$$\Rightarrow \quad a^{-n} \cdot a^n = \frac{1}{a^n} \cdot a^n = \underline{1} = a^{(-n)+n} = a^0$$

Ebenso $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$

$\Rightarrow$ für positive a können wir die Exponenten auf alle rationalen Zahlen p/q ausdehnen

$$a^{p/q} := \sqrt[q]{(a^p)} \qquad p, q \in \mathbb{N}, \ q \neq 0$$

Polynome

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $a_N \neq 0$, a_i beliebig, $i = 0, \dots, N-1$

heißt <u>Polynom vom Grad N</u>

Die reellen Zahlen $a_0, \dots, a_N$ heißen Koeffizienten des Polynoms f.

Man schreibt auch:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Bsp:

obere Grenze (von n)

Summen-zeichen

$$\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

untere Grenze (von n)

Laufindex

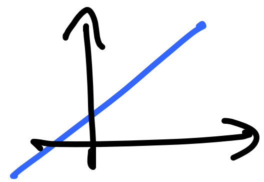
$$f(x) = x^6 + 7x^3 - 10 = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$$

mit

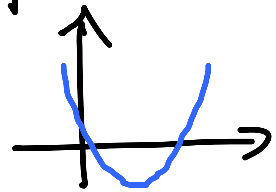
$$a_0 = -10$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 7$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = 1$$

spezielle Polynome:

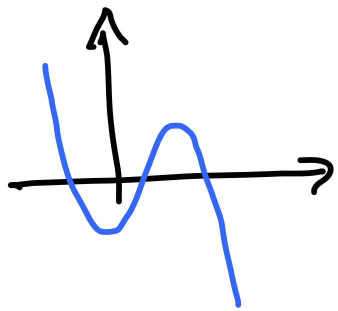
$N=1$: $f(x) = a_1 x + a_0$ (affin-) lineare Funktion



$N=2$: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ quadratische Funktion

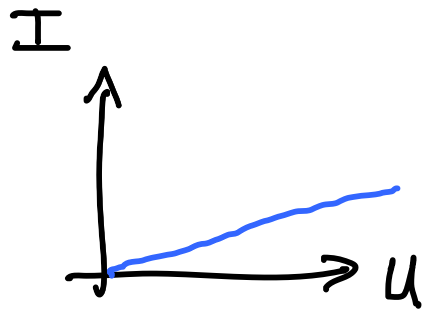


$N=3$: $\sum_{n=0}^{3} a_n x^n$ kubische Funktion



Bsp: Ohm'sches Gesetz

$$I(U) = \frac{U}{R}$$

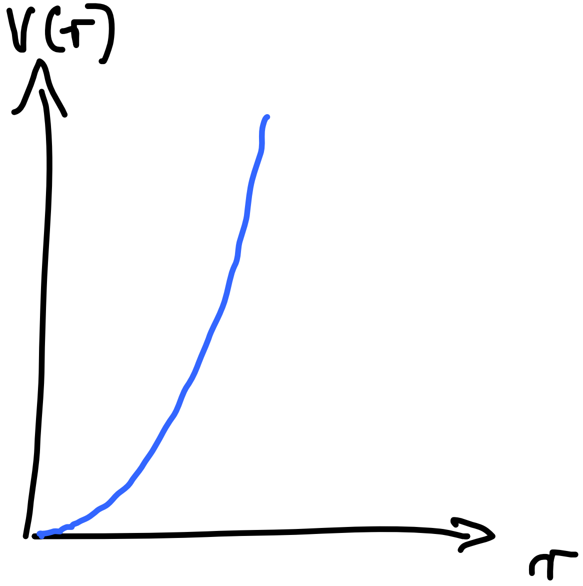


$$\text{Strom} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Widerstand}}$$

(lineare Funktionen kennzeichnen die Proportionalität zwischen zwei Größen)

Bsp: Volumen einer Kugel in Abhängigkeit vom Radius

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Polynome (Forts.)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \qquad \text{mit} \quad a_N \neq 0$$

Polynom N-ten Grades.

- Jedes Polynom N-ten Grades hat höchstens N Nullstellen.

- Besitzt ein Polynom N Nullstellen hat (genannt $x_1, x_2, \ldots, x_N$), dann faktorisiert $f(x)$, und man kann schreiben

$$f(x) = a_N (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)$$

und es gilt $\quad a_0 = a_N (-1)^N x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N$

Polynome 2. Ordnung: (Satz von Vieta)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + px + q\right)$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

(Angenommen, f hat die Nullstellen x_1 und x_2)

Nullstellen v. f.

$$= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

Beispiel:

$$2x^2 - 4x - 16 = 2(x^2 - 2x - 8) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -8 \end{array}$$

$$x_{1,2} = -2, 4$$

Gebrochen rationale Funktionen

Sind $g(x)$ und $h(x)$ zwei Polynome, so bezeichnet man die Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{K} b_n x^n}$$

Polynom N-ten Grades

P. K-ten Grades

als gebrochen rationale Funktion.

Nullstellen von h

$$\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus N_h$$

Falls $K > N$: echt gebrochen rational

$K \leq N$: unecht gebrochen rational

__Beispiele__:

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x^2+5}$$

$D_f = \mathbb{R}$, weil $3x^2+5=0$ keine Lösungen in $\mathbb{R}$ hat.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

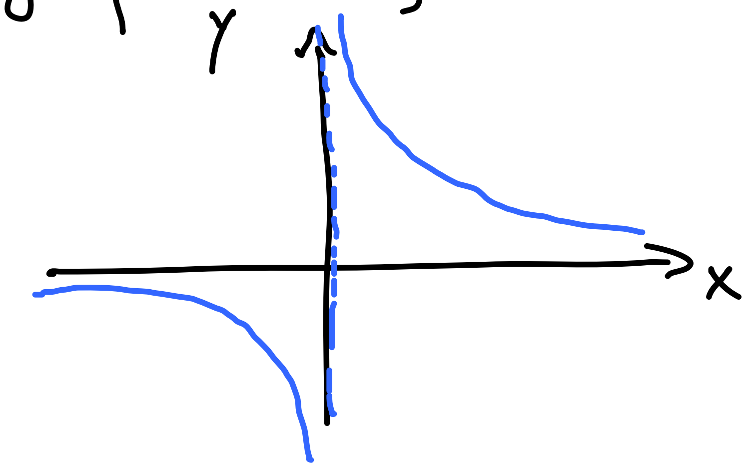
$$f(x) = x^2 \left(= \frac{x^2}{1}\right)$$

$D_f = \mathbb{R}$

$\vdots$

x_0 heißt Polstelle von f, wenn x_0 eine Definitions-lücke (also Nullstelle von h) ist, und der Betrag von $f(x)$ immer größer wird, wenn x gegen x_0 geht.

__Beispiel__: $f(x) = \frac{1}{x}$

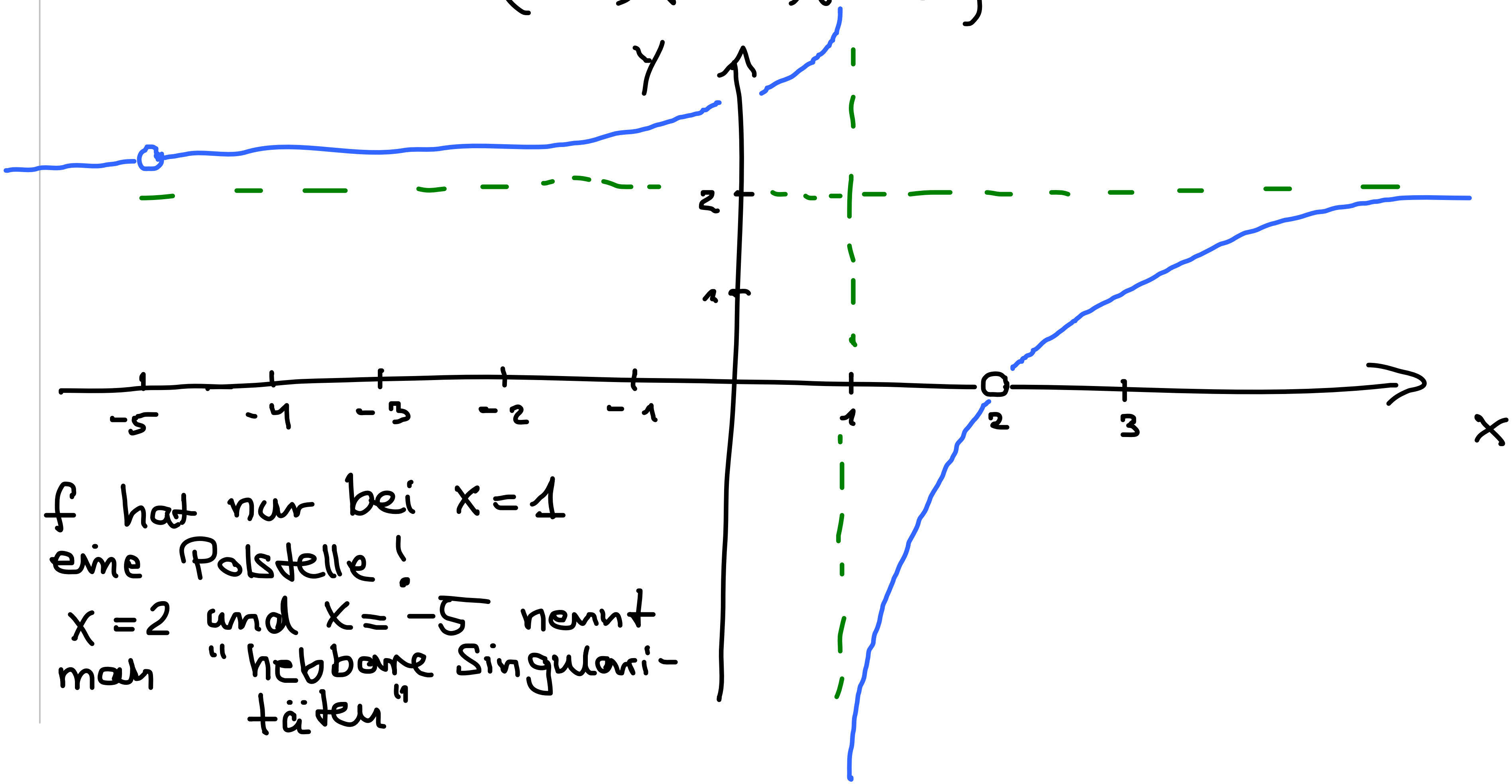


weiteres Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 32x + 40}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}$$

$$= \frac{2(x-2)^2(x+5)}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -5\}$



f hat nur bei $x = 1$ eine Polstelle!

$x = 2$ und $x = -5$ nennt man "hebbare Singularitäten"

Verhalten der Funktion für große Argumente (große $|x|$)

$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{K} b_n x^n}$$

$|x| \to \infty$

1.) $N \leq K$

$$f(x) = \frac{a_N x^N \left(1 + \cancel{\frac{a_{N-1}}{a_N} x^{-1} + \frac{a_{N-2}}{a_N} x^{-2} + \ldots}\right)}{b_K x^K \left(1 + \cancel{\frac{b_{K-1}}{b_K} x^{-1} + \frac{b_{K-2}}{b_K} x^{-2} \ldots}\right)}$$

$|x| \to \infty$

$$\longrightarrow \frac{a_N}{b_K} x^{N-K}$$

also $\longrightarrow \frac{a_N}{b_K}$ wenn $N = K$

$\longrightarrow 0$ wenn $N < K$

2.) $N > k$:

$$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

mit einer eindeutigen Zerlegung

$p(x)$ = Polynom vom Grad $N-k$
(erhält man durch Polynomdivision von $g(x)$ durch $h(x)$)

$r(x)$ = Restpolynom bei Polynomdivision
(hat Grad $< k$)

Für große $|x|$ gilt dann also:

$$f(x) \simeq p(x)$$

"verhält sich ungefähr wie"

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 - 3x - 1}{x^2 - 1}$$

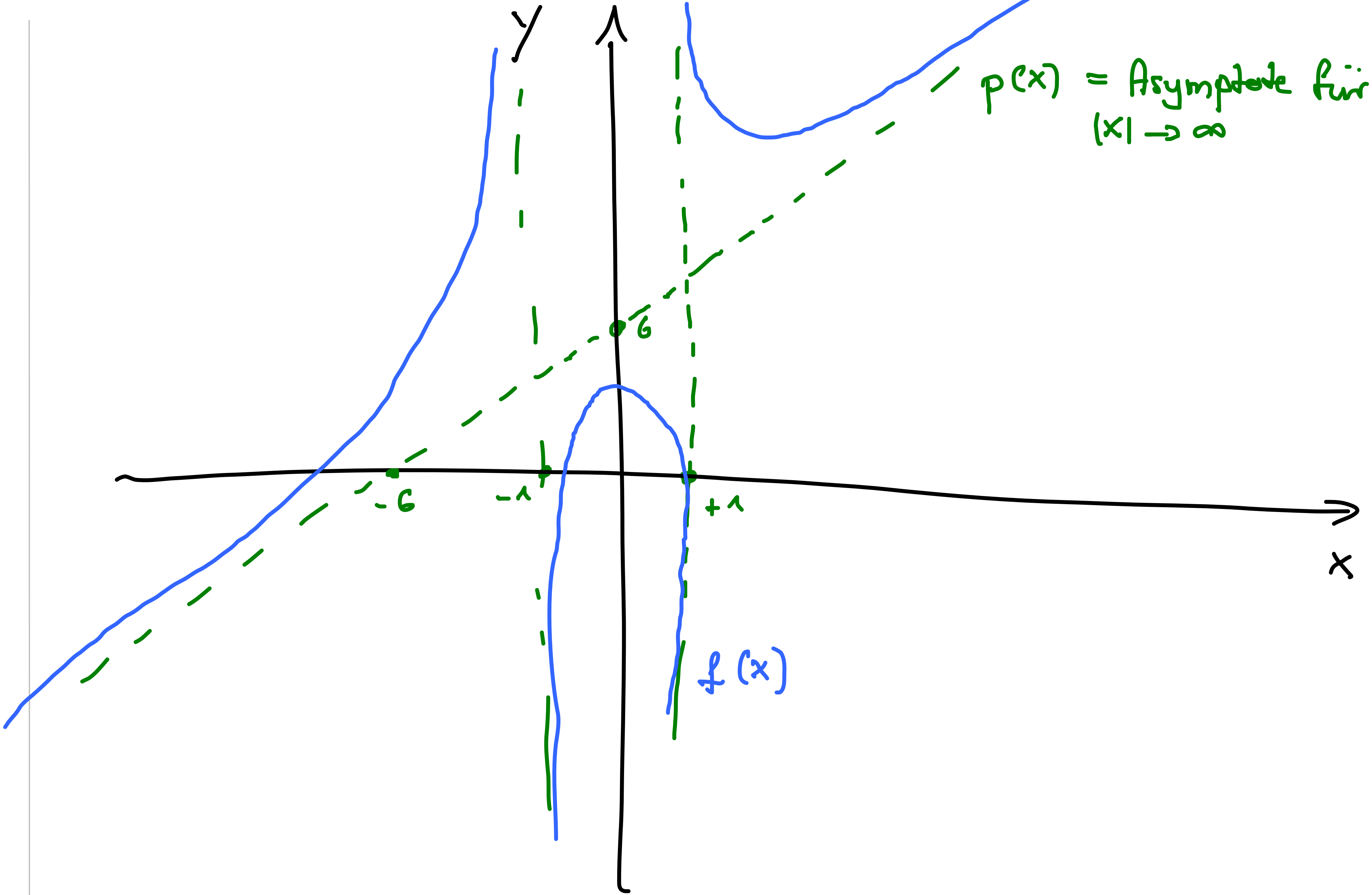
Polynomdivision:

$$x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x + 6) + (-2x + 5)$$

$$\begin{array}{l}
x^3 + 6x^2 - 3x - 1 \\
\underline{x^3 \qquad\qquad\quad - x \qquad\quad} \\
\qquad\quad 6x^2 - 2x - 1 \\
\qquad\quad \underline{6x^2 \qquad\quad - 6} \\
\qquad\qquad\quad -2x + 5
\end{array}$$

Restpolynom

$$f(x) = \underbrace{x + 6}_{p(x)} + \frac{\overbrace{-2x + 5}^{r(x)}}{\underbrace{x^2 - 1}_{h(x)}}$$


y
p(x) = Asymptote für
|x| → ∞
6
-6
-1
+1
x
f(x)

Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$$

$$x \longmapsto \exp(x) = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n}$$

$$= \underline{1} + \frac{1}{1} x + \frac{1}{1 \cdot 2} x^{2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{3} + \dots$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot (n-1) \cdot n$$

Eulersche Zahl $e = 2{,}718281828\underbrace{3238979}_{\dots ?}\dots$

Eigenschaften:

$$\exp(0) = 1 = e^0$$

$$\exp(1) = e^1 = 2{,}71828\ldots$$

$$\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$\exp(x) > 0$ für alle x!

exp ist streng monoton steigend

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

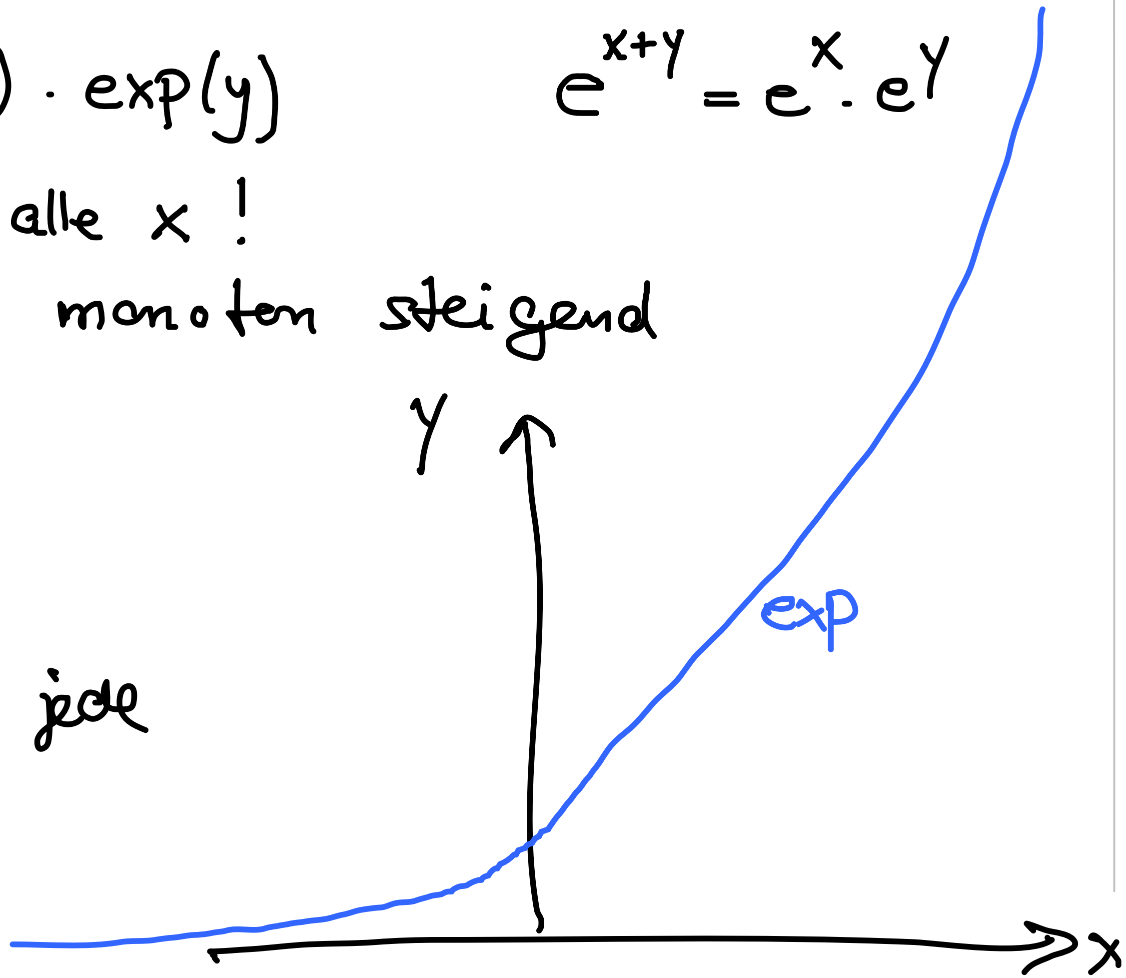
Einschub:

$$\underbrace{\frac{1}{0!}0^0}_{=1} + \frac{1}{1!}0^1 + \ldots$$

$= 1$, weil

$0! = 1$

$0^0 = 1$



exp(x) wächst schneller als jede Potenz von x!

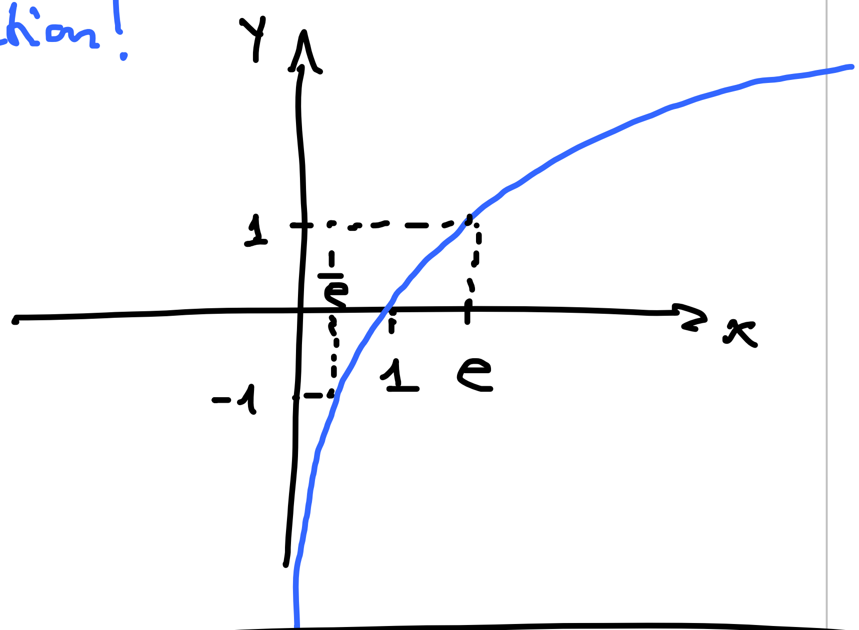
$$\frac{\exp(x)}{x^M} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$, egal wie groß M ist

Umkehrfunktion: ln ("logarithmus naturalis", "natürliche Logarithmus", "Logarithmus")

$$\ln(x) = \exp^{-1}(x)$$

keine Potenz, sondern Umkehrfunktion!

$$\ln : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$



Eigenschaften:

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$\ln(\frac{1}{e}) = -1$

$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$

ln streng monoton steigend

Rechenschieber funktioniert durch

$$x \cdot y = \exp(\ln(x) + \ln(y))$$

ln wächst weniger schnell als jede Potenz von x,

d.h.

$x^N \cdot \ln(x) \to \infty$

$x \to \infty$, egal was N ist

der ln hat eine Unendlichkeitsstelle bei $x = 0$

$\ln(0) = -\infty$, aber das ist streng genommen keine Polstelle!

Wichtige abgeleitete Funktionen:

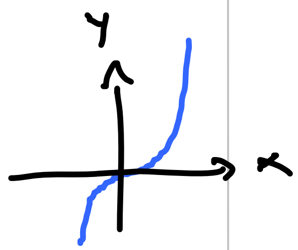
Exponentialfunktion mit anderer Basis als e: $(a>0)$

$$\underbrace{a^x :=}_{\text{wird definiert als}} e^{x \cdot \ln a}$$

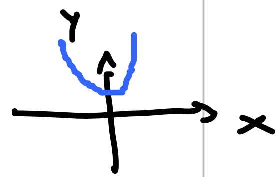
$$e^{x\cdot \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^x = a^x = \left(e^x\right)^{\ln a}$$

hyperbolische Funktionen:

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

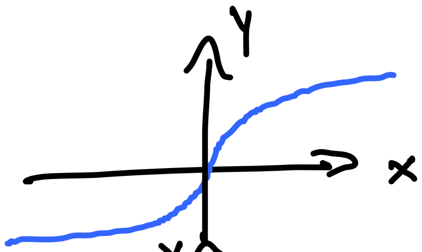


$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 1}$$



Umkehrfunktionen:

$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



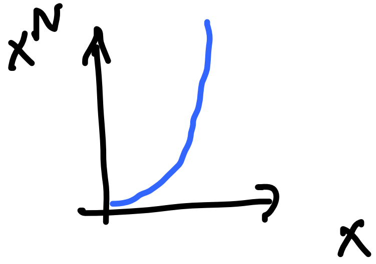
"Area Sinus hyperbolicus"

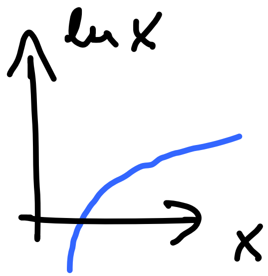
$\operatorname{arcosh} : \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

"Area Cosinus hyperbolicus"

Nachtrag:

1.) "Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz von x".

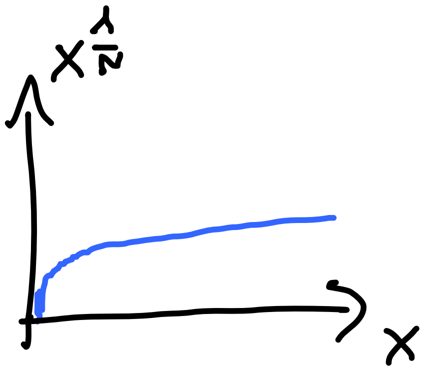


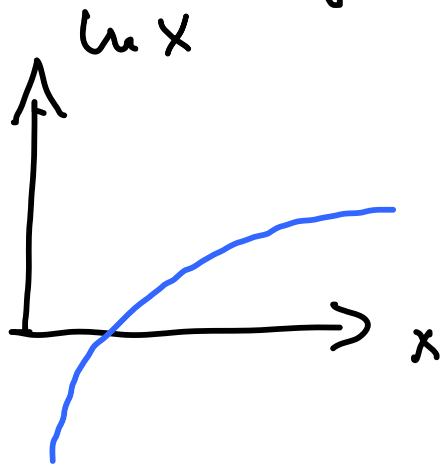


"$\lim\limits_{x\to\infty} x^N \ln x = \infty$"

Beides richtig, aber nicht so spannend:

Der Logarithmus wächst langsamer als jede Wurzel von x!





$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/N}} = 0$$

2.) $e = 2{,}718281828459045\ldots$

$\pi = 3{,}14159265358979323\ldots$

Wo guckt man sowas nach?

www.wolframalpha.com

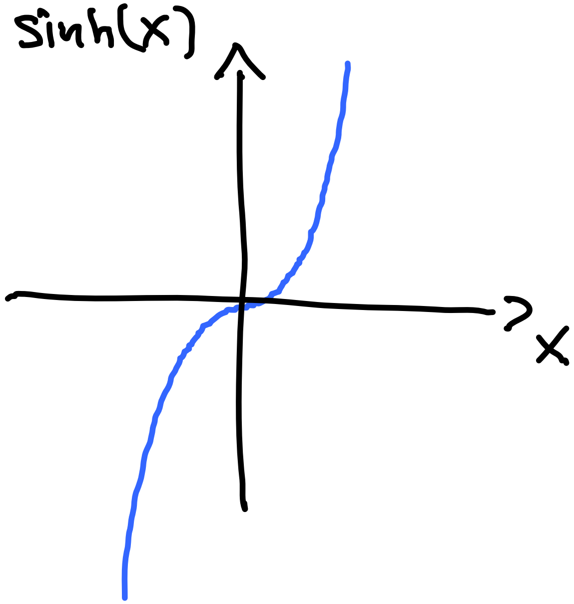
Hyperbolische Funktionen:

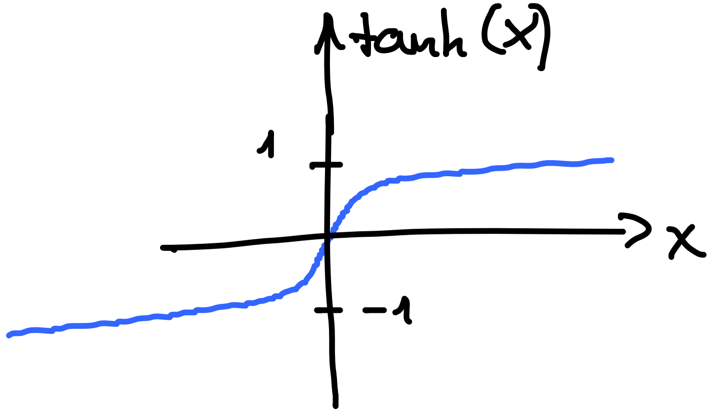
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

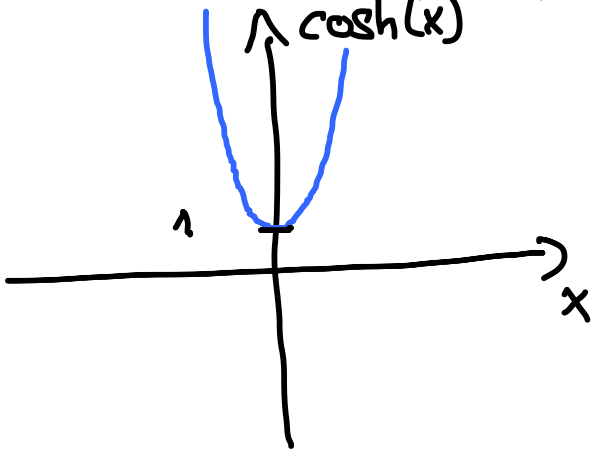
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

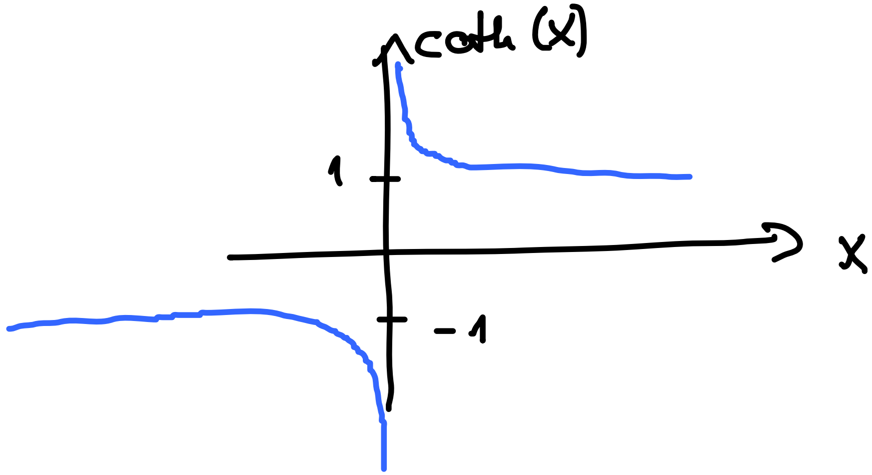
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$









Umkehrfunktionen:

"Area Sinus Hyperbolicus"

$$\operatorname{arsinh}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) : \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\operatorname{artanh}(x) : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcoth}(x) : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

"vereinigt"

Eigenschaften:

- $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \underline{1}$ für alle x

$$\left(\cosh(x)\right)^2 - \left(\sinh(x)\right)^2 = 1$$

- $\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$

denn: $x = \coth y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \tanh y$

$\Rightarrow \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right) = y = \operatorname{arcoth}(x)$ ✓

- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

denn: $y = \sinh(x)$

$\Rightarrow \quad y^2 + 1 = \sinh^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{y^2+1} = \cosh(x)$

$$\Rightarrow \quad y + \sqrt{y^2+1} = \sinh(x) + \cosh(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} y \quad \checkmark$$

- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ für $x \geq 1$

- $\operatorname{arsinh}(x) = \operatorname{arcosh}\left(\sqrt{x^2+1}\right) \qquad x \geq 0$

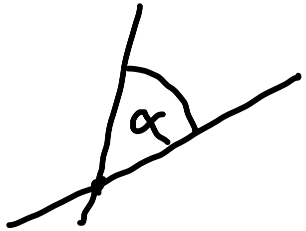
  $\operatorname{arsinh}(x) = -\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{x^2+1}\right) \qquad x < 0$

  $\operatorname{arcosh}(x) = \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$

Die letzten Formeln: Übung!

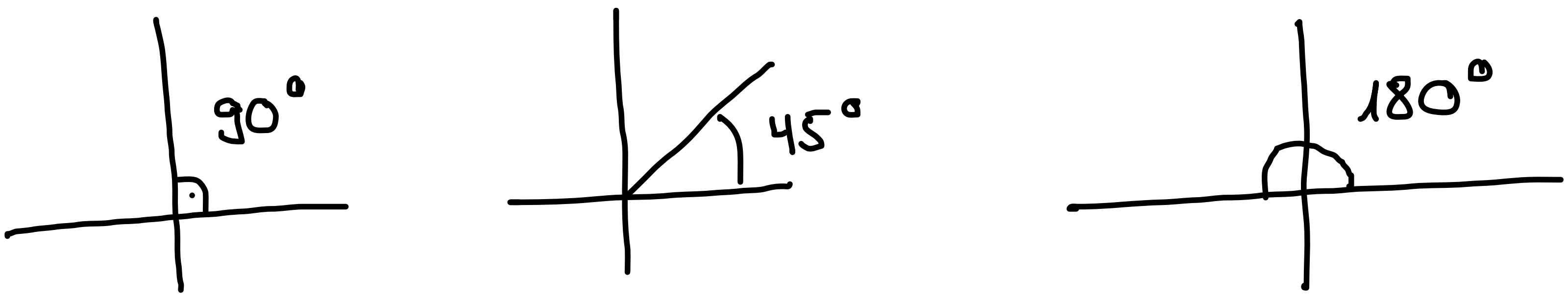
Trigonometrische Funktionen

Winkel :



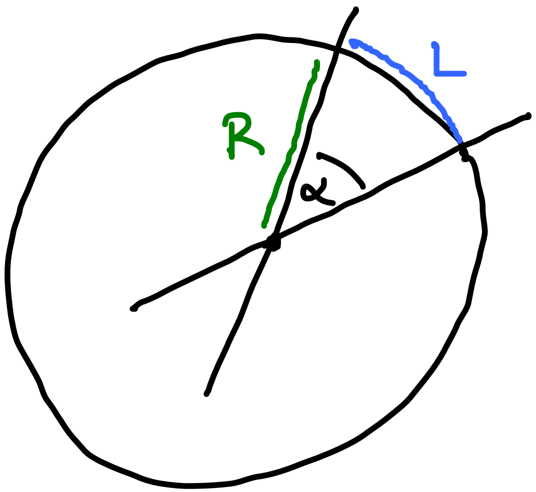
kann man in Grad messen,
oder in "Radians" ("Bogenmaß")

Vollkreis hat einen Winkel von 360°



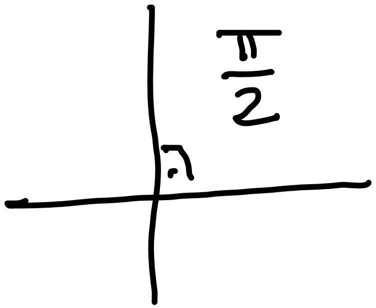
...

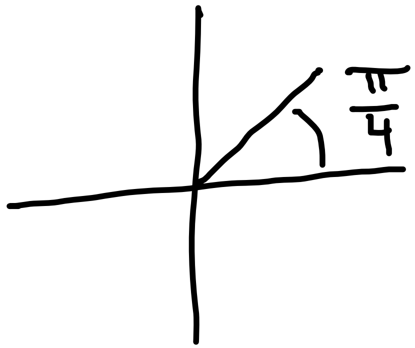
Das Bogenmaß eines Winkels ist die Länge des kreissegmentes, das durch den Winkel bestimmt wird, geteilt durch den Radius des kreises.

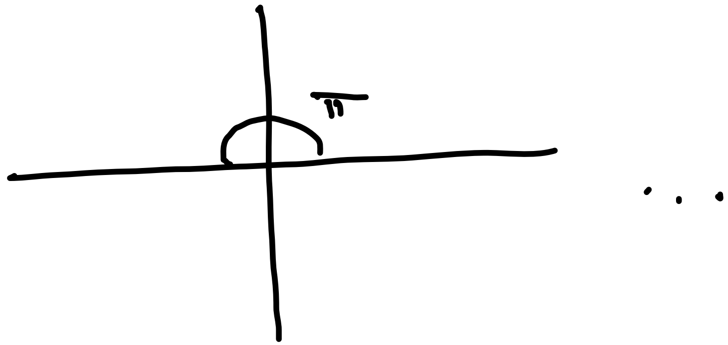


$$\alpha \text{ (im Bogenmaß)} = \frac{L}{R}$$

Im Bogenmaß hat ein Vollkreis den Winkel 2π $(\pi = 3{,}14 \ldots.)$

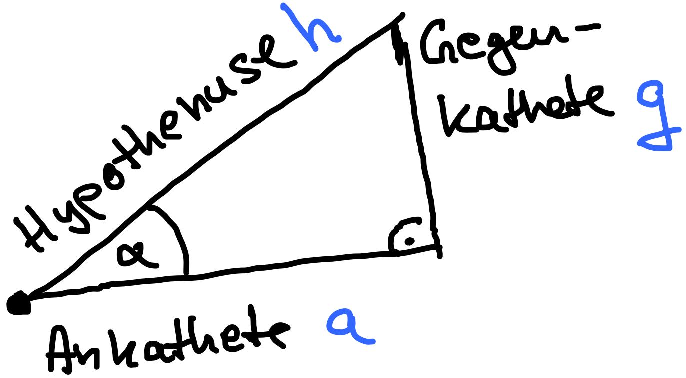






$\sin(7)$ meint immer "7 im Bogenmaß"

$$\alpha \text{ (im Bogenmaß)} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \text{ (in Grad)} = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha \text{ (in Grad)}$$



$$\llcorner = \text{"rechter Winkel"} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$a = \cos(\alpha) \cdot h$$

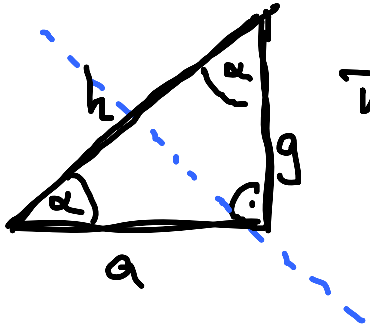
$$g = \sin(\alpha) \cdot h$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

diese Verhältnisse sind für alle Dreiecke mit rechtem Winkel und α gleich.

Beispiel : $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $(= 45°)$



$\pi = \alpha + \alpha + \frac{\pi}{2} = 45° + 45° + 90° = 180°$

(Winkelsumme im Dreieck ist immer gleich π)

Dreieck ist symmetrisch unter Spiegelung an der blauen Achse

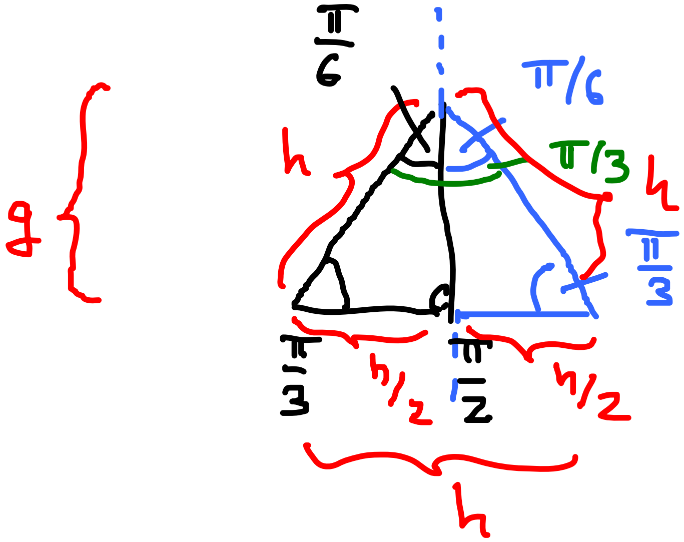
$\Rightarrow a = g$

Pythagoras: $a^2 + g^2 = h^2 = 2a^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{h^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{g}{h} \quad = \quad = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$



gleichseitiges Dreieck

$a = \frac{h}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{h} = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{g}{h}$

Pythagoras: $a^2 + g^2 = h^2$

$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + g^2 = h^2 \Rightarrow g^2 = h^2 - \frac{1}{4}h^2$

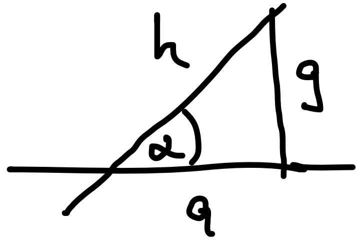
$\Rightarrow g = \sqrt{\frac{3}{4}}\, h = \frac{\sqrt{3}}{2} h$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{g}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Genauso folgt: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{g}{a}$$ = Steigung der Hypothenuse (relativ zur Grundlinie = Ankathete)



$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Es gilt:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \left(\frac{g}{h}\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{g^2+a^2}{h^2} \overset{\text{Pythagoras}}{=} \frac{h^2}{h^2} = 1$

- $\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

  $\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

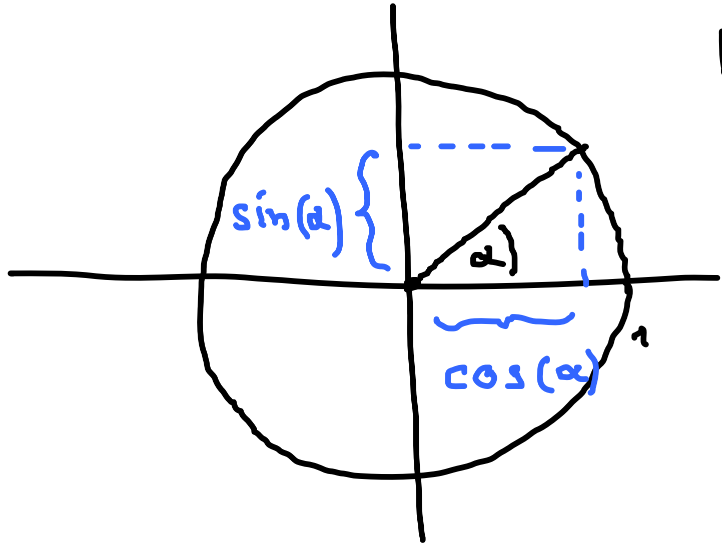
- Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

beliebige Winkel:

Kreis vom Radius 1:



So definiert man $\sin(\alpha)$ & $\cos(\alpha)$ auch für $\alpha \geq 90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, dann können sin & cos auch negativ werden.

II. Quadrant

$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

$\sin(\alpha) \geq 0$

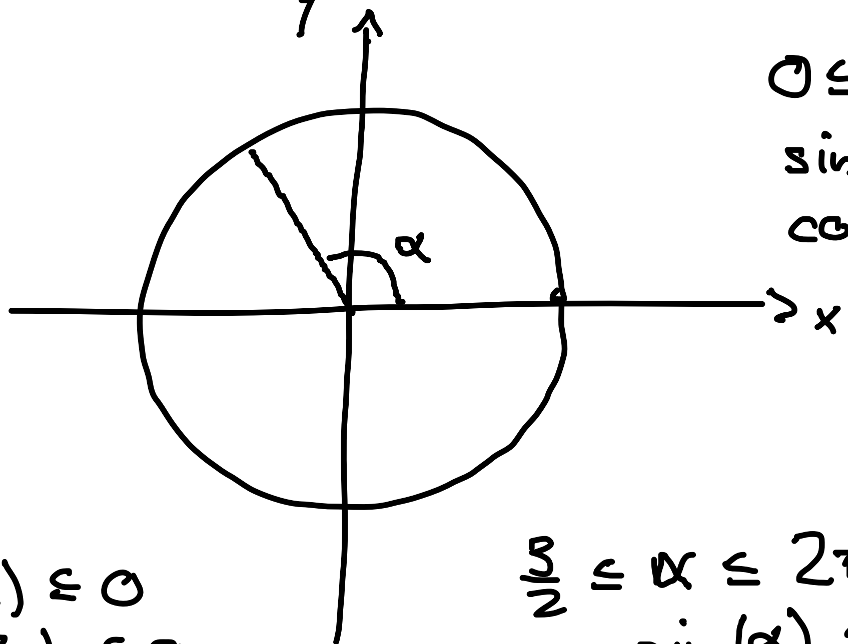
$\cos(\alpha) \leq 0$

I. Quadrant

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$\sin(\alpha) \geq 0$

$\cos(\alpha) \geq 0$



III. Quadrant

$\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

$\sin(\alpha) \leq 0$

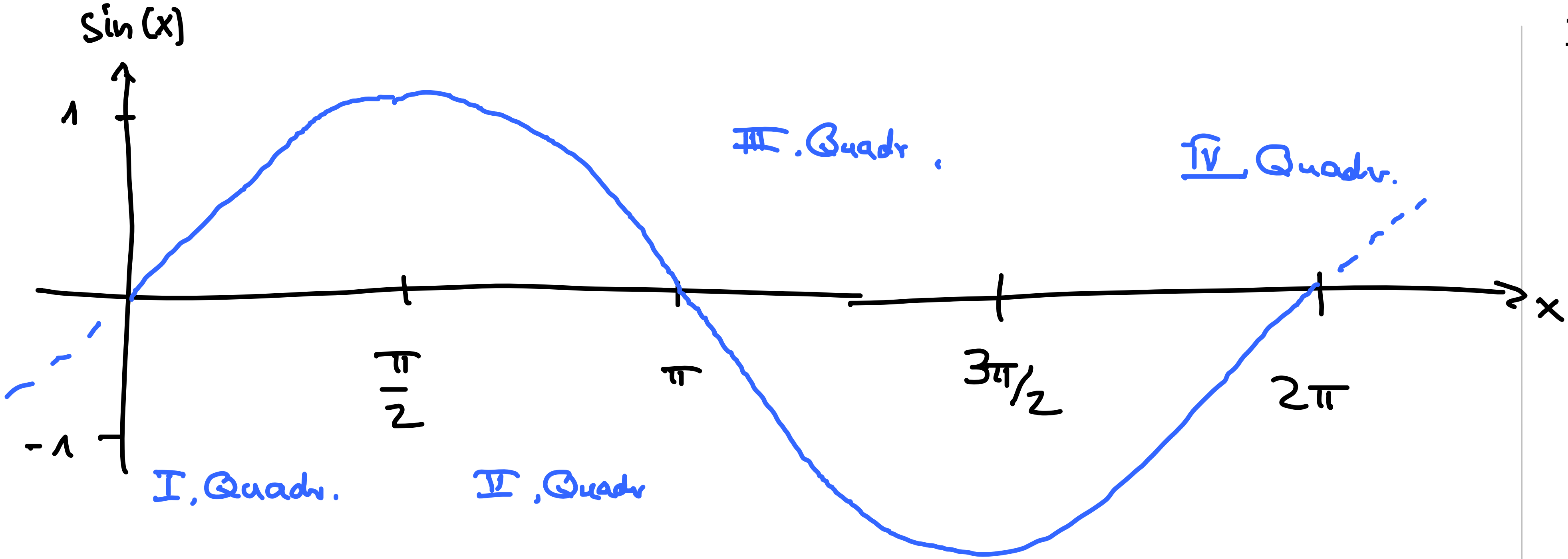
$\cos(\alpha) \leq 0$

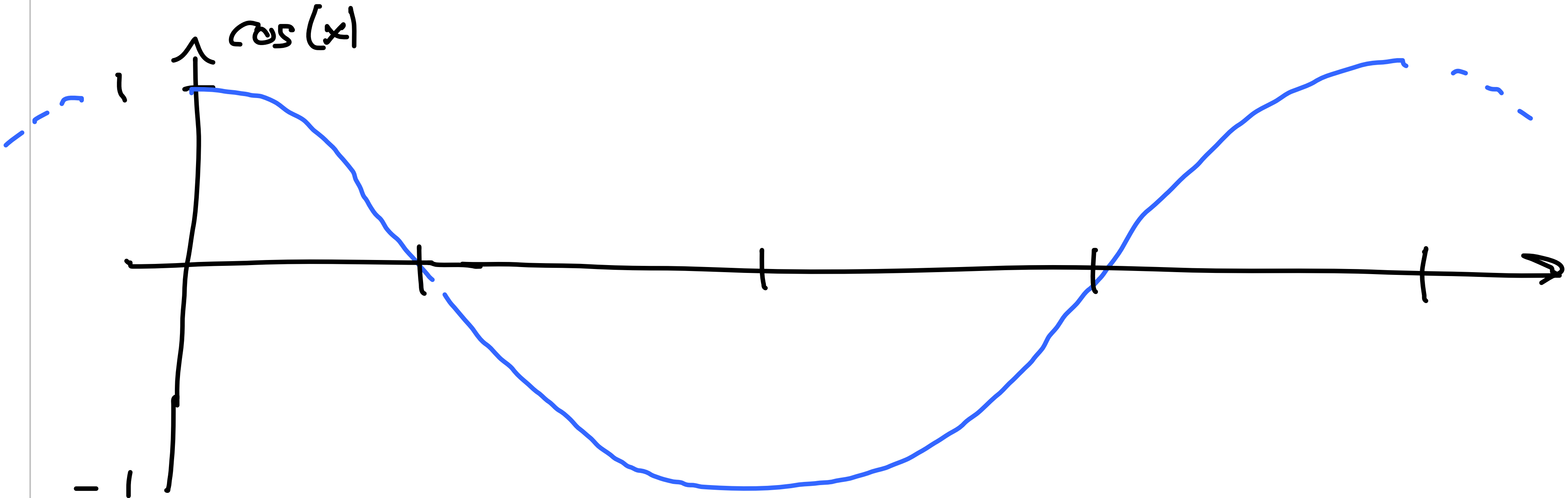
IV. Quadrant

$\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

$\sin(\alpha) \leq 0$

$\cos(\alpha) \geq 0$


sin(x)
1
-1
x
π/2
π
3π/2
2π
I. Quadr.
II. Quadr
III. Quadr.
IV. Quadr.


cos(x)
1
-1

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] = \sin(\mathbb{R})$

Periode 2π $\quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

Symmetrie ungerade : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Nullstellen : $x_n = n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Für kleine Winkel α

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \qquad |\alpha| \ll 1$$

"Kleinwinkelnäherung" $\qquad$ "sehr viel kleiner als"

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] = \cos(\mathbb{R})$

Periode 2π

Symmetrie gerade $\quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

Nullstellen $x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \qquad |\alpha| \ll 1$$

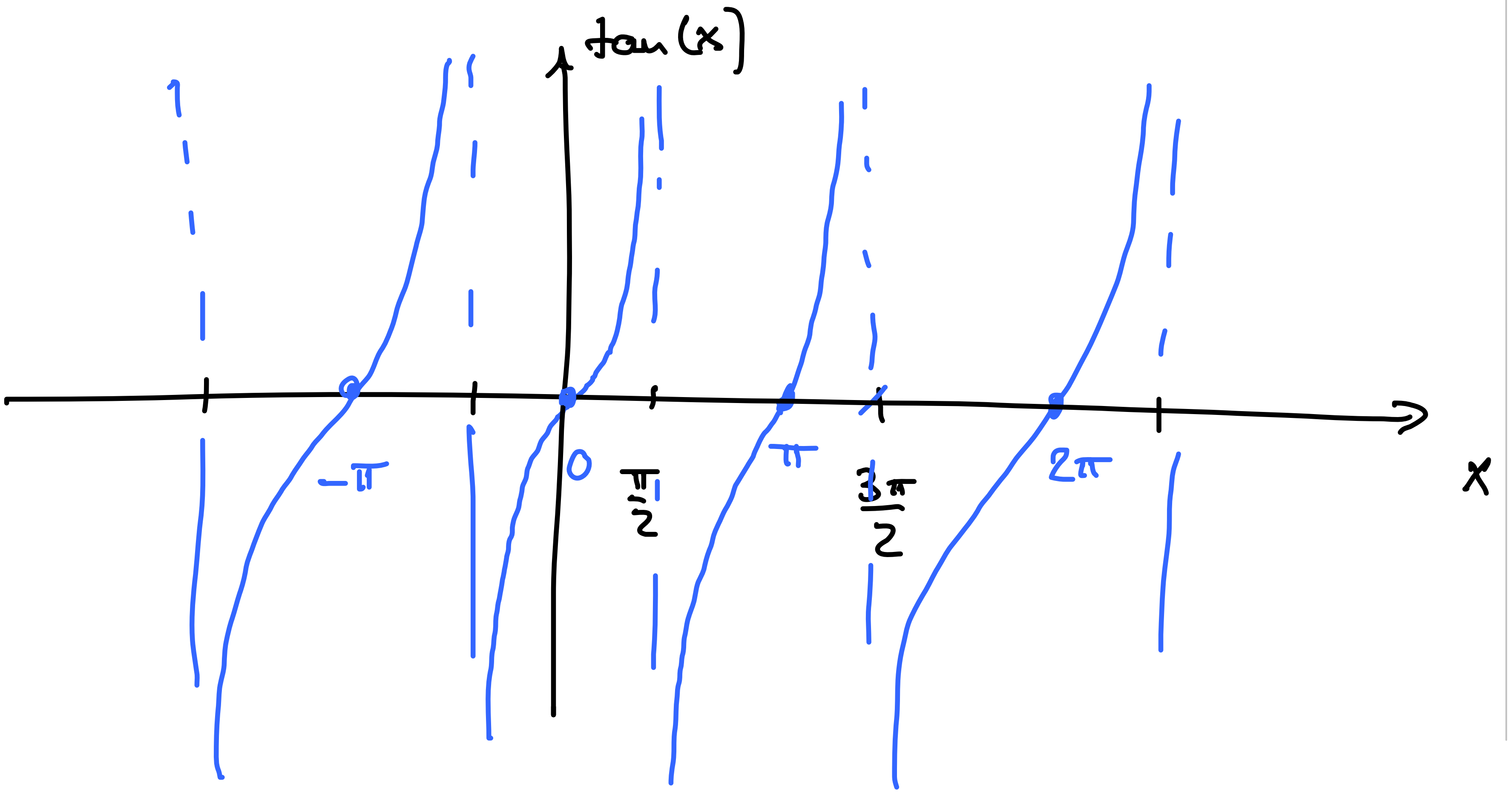
$\tan : \mathbb{R} \setminus \{(n+\frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Periode π

Symmetrie ungerade

Nullstellen: $n \cdot \pi$

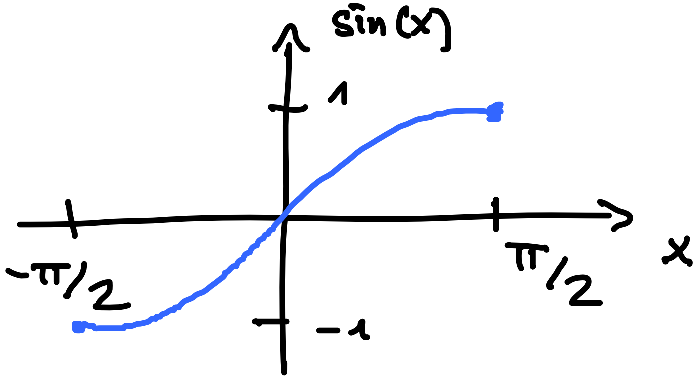
Polstellen: einfach, mit Vorzeichenwechsel



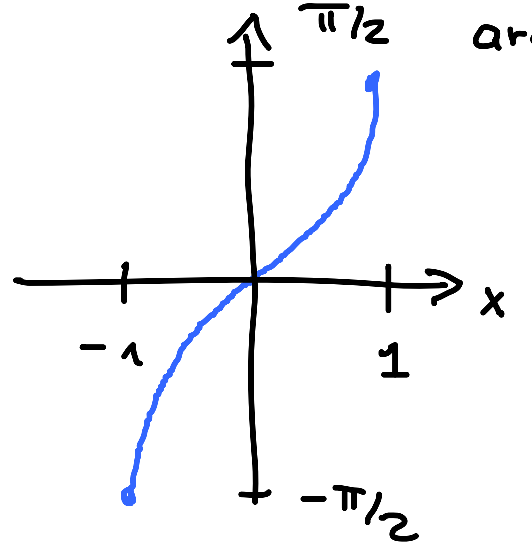
Umkehrfunktionen:

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

Um den sin umzukehren, muss man erst den Definitionsbereich einschränken:



$\Rightarrow$

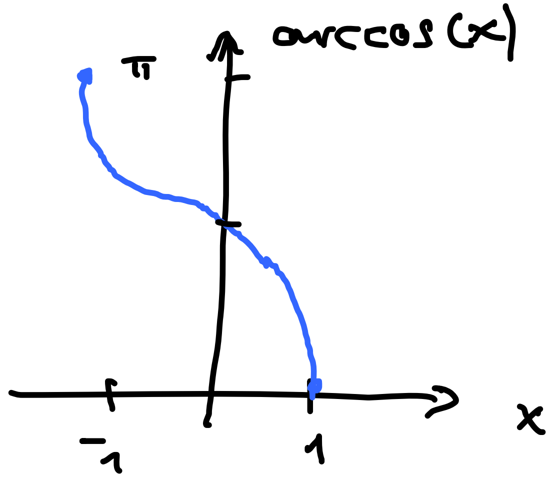


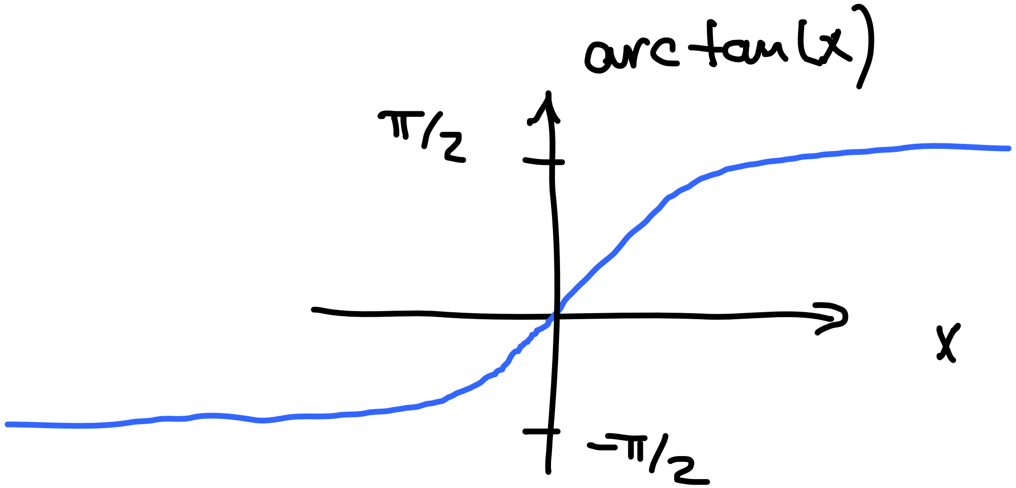
$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

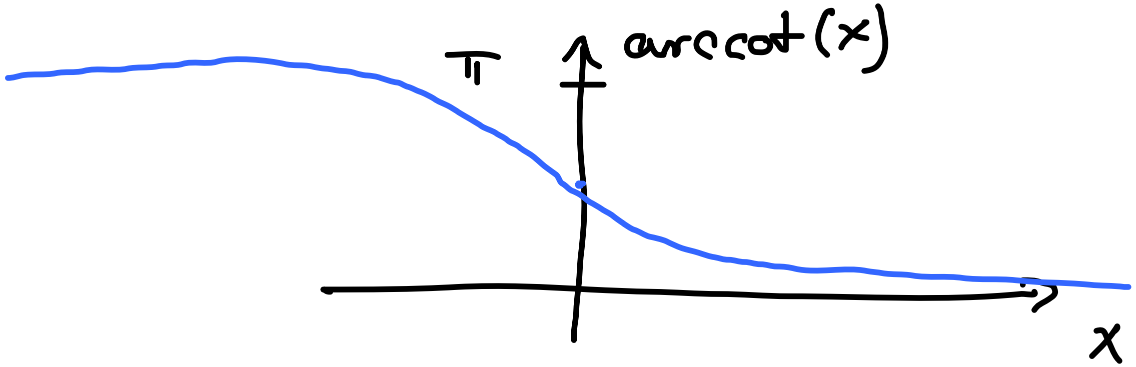
$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$







$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$y = \cot(x) \Rightarrow x = \cot(y)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Rightarrow \arctan(y) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow \arctan(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(y)$$

$$\Rightarrow \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Folgen, Reihen & Grenzwerte

Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung einer Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ nach $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{N} \quad , \quad \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$$

$$x : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}$$

Im Folgenden werden wir immer $\mathbb{D} = \mathbb{N}$, und schreiben x_n (anstatt $x(n)$).

Die Folge schreibt man auch als $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, oder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Die $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ heißen Folgenglieder

Beispiele :

Folge	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
konstante Folge	5	5	5	5	5	...	$x_n = 5 \;\forall n$
Primzahlen	2	3	5	7	11	...	$x_n = (n+1)$-te Primzahl
alternierende Folge	1	-1	1	-1	1	...	$x_n = (-1)^n$
geometrische Folge	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	...	$x_n = 10^{-n}$

Hilfreich: Online Encyclopedia of Integer Sequences
www.oeis.org

$\longrightarrow$ Der Katalog für ganzzahlige Folgen!

1, 3, 6, 10, 15, 21 $\rightsquigarrow$ $x_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 0+1+2+ \dots + (n+1)$

Eine Folge heißt

- (streng) monoton wachsend, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} > x_n)$ für alle n
- (streng) —"— fallend, —"— $x_{n+1} \leq x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$
- beschränkt, wenn es eine Zahl C gibt, sodass $|x_n| \leq C$, für alle n.

Grenzwert (Limes) einer Folge

Gegeben eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Wenn es eine Zahl $\overline{x}$ gibt, sodass gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, sodass gilt:

$$|x_n - \overline{x}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N,$$

dann heißt die Folge <u>konvergent</u>. Man sagt auch, die Folge konvergiert gegen $\overline{x}$.
Man schreibt das als:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

$\Rightarrow$ Je größer n, desto näher kommen die x_n der Zahl $\overline{x}$ (und gehen da auch nie wieder weg)

$\overline{x}$ heißt <u>Grenzwert</u> der Folge.

Beispiele: • $x_n = 5$ für alle n

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 5 = 5$$

• $x_n = \frac{1}{n+1}$ $\qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Diese Folge konvergiert gegen 0; denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$, und dann gilt auch $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Also $|x_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

"Archimedische Axiom"

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

Eigenschaften des Grenzwertes:

- Wenn $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen sind, mit $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\bar{y} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, dann ist auch die Folge $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $z_n = x_n + y_n$ konvergent, und es gilt $\bar{z} = \lim\limits_{n\to\infty} z_n =$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \bar{x} + \bar{y} = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Damit man das darf, müssen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ beide konvergieren!

Gegenbeispiel:

$$x_n = 1 + n$$
$$y_n = -n$$

Dann konvergiert $\{z_n\}_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

<u>aber</u>: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$!

- $\{x_n\}_n$ und $\{y_n\}_n$ beide konvergente Folgen, dann konvergiert auch $z_n = x_n \cdot y_n$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

Vorsicht: $x_n = (-1)^n$

$y_n = 1/n+1$ $\Rightarrow$ $z_n = x_n \cdot y_n$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 0 \neq \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

weil $\lim_{n\to\infty} x_n$ gar nicht existiert, die Folge konvergiert nicht!

- Wenn $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge ist mit

1.) alle $x_n \neq 0$

2.) $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \neq 0$, dann ist auch

$y_n = \frac{1}{x_n}$ konvergent, und es gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{\bar{x}}$

Eine Folge heißt <u>bestimmt divergent</u>, wenn es für jede noch so große Zahl R eine natürliche Zahl N gibt mit $x_n > R$ für alle $n > N$,
<u>oder</u> wenn es für jede noch so kleine Zahl $K < 0$ ein N gibt mit $x_n < K$ für alle $n < N$.

Im ersten Fall wachsen die Folgenglieder über jede Grenze, im zweiten fallen sie unter jede Grenze.

Man schreibt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ "divergiert gegen unendlich"

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ "divergiert gegen minus unendlich"

Eine Folge, die weder konvergent, noch bestimmt divergent ist, heißt <u>unbestimmt divergent</u>.

<u>Beispiele</u>:

- $x_n = n$ $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ bestimmt divergent
- $x_n =$ $(n+1)$-te Primzahl $2, 3, 5, \dots$ bestimmt divergent
- $x_n = (-1)^n$ $1, -1, 1, -1$ unbestimmt —"—
- $x_n = (-1)^n n$ $0, -1, 2, -3, 4$ —"—

Reihen:

Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge, dann nennt man

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{m=0}^{n} x_m$$

die n-te Partialsumme der Folge.

Die Folge $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt Partialsummenfolge.

Wenn die $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen eine Zahl $\bar{S}$ konvergiert, schreibt man auch

"Reihe"

$$\bar{S} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} x_m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} x_m$$

Man sagt, dass die Reihe des x_m konvergiert.

Wenn die $\{S_n\}_n$ bestimmt divergiert, schreibt man

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m = \pm\infty$$

"plus oder minus"

Beispiel : $x_n = 3 \cdot 10^{-(n+1)}$

$$x_0 = 0{,}3 \qquad S_0 = 0{,}3$$
$$x_1 = 0{,}03 \qquad S_1 = x_0 + x_1 = 0{,}33$$
$$x_2 = 0{,}003 \qquad S_2 = x_0 + x_1 + x_2 = 0{,}333$$
$$x_3 = 0{,}0003 \qquad S_3 = 0{,}3333$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$$

- die geometrische Reihe:

q eine reelle Zahl zwischen null und eins:

$$0 < q < 1$$

$$x_n = q^n \quad , \text{ d.h. } \quad 1, q, q^2, q^3, \ldots\ldots$$

n-te Partialsumme:

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} x_m = \sum_{m=0}^{n} q^m = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

dann gilt:

$$q \cdot S_n = q \left(\sum_{m=0}^{n} x_m \right) = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1} = S_n (1 - q)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Wenn $n \to \infty$, heißt das, dass $q^{n+1} \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} q^{n+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

Fun fact: Mit diesem Wissen kann man jede periodische Zahl als Bruch schreiben.

$$0{,}131313\ldots = 0{,}\overline{13}$$

$$\begin{aligned} &= 0{,}13 && = 0{,}13\cdot 1 \\ &+ 0{,}0013 && + 0{,}13\cdot \tfrac{1}{100} \\ &+ 0{,}000013 && + 0{,}13\cdot \left(\tfrac{1}{100}\right)^2 \\ &+ \vdots && + \ldots \end{aligned}$$

$$= \frac{13}{100}\cdot\left(1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\right)$$

$$= \frac{13}{100}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = \frac{13}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{13}{100}\cdot\frac{100}{99}$$

$$= \frac{13}{99}$$

ebenso: $0{,}789789789\ldots = 0{,}\overline{789} = \dfrac{789}{999}$

Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine reelle Funktion. $(\mathbb{D} \subset \mathbb{R}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R})$

Sei $\bar{x} \in \mathbb{D}$

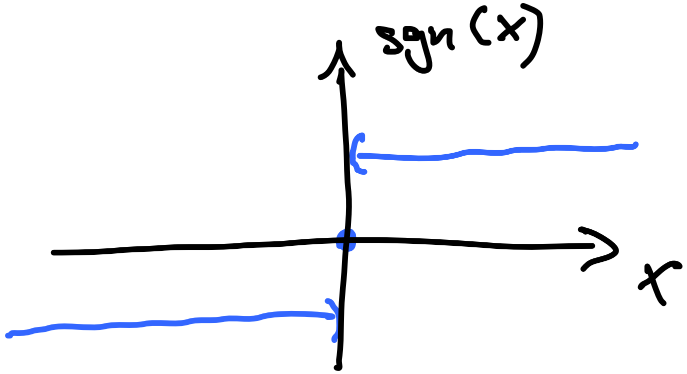
Angenommen für jede Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, mit $x_n \in \mathbb{D}$, die gegen $\bar{x}$ konvergiert, gilt: die Folge $y_n = f(x_n)$ konvergiert ebenfalls gegen eine Zahl $\bar{y}$, dann schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(\bar{x})$$

dann gilt: f ist stetig bei $\bar{x}$

man schreibt: $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

Wichtig: das muss für <u>alle</u> Folgen $\{x_n\}$, die gegen $\bar{x}$ konvergieren, gelten.



Beispiel: $$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Für die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1 \neq f\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n\right) = 0$

Rechts- und linksseitige Grenzwerte

Sei f eine Funktion und $\bar{x} \in \mathbb{D}$

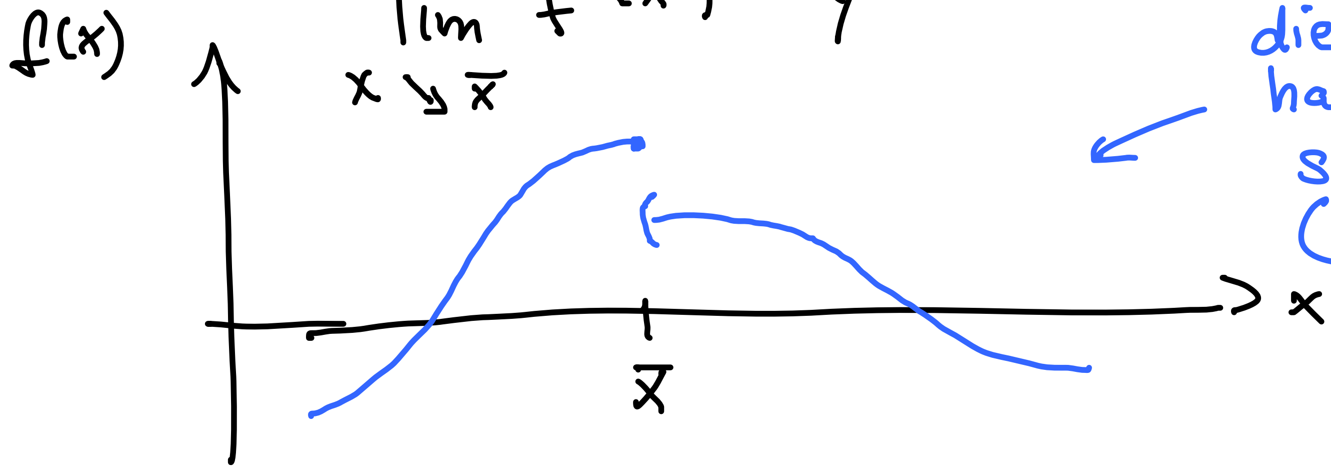
Wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n \in \mathbb{D}$, die

i) gegen $\bar{x}$ konvergiert, und

ii) alle $x_n > \bar{x}$ hat,

die Folge $y_n = f(x_n)$ gegen eine Zahl $\bar{y}$ konvergiert, dann heißt $\bar{y}$ der rechtsseitige Grenzwert von f bei $\bar{x}$, und man schreibt

$$\lim_{x \searrow \bar{x}} f(x) = \bar{y}$$



diese Funktion hat einen rechtsseitigen Grenzwert (ist bei $\bar{x}$ aber nicht stetig).

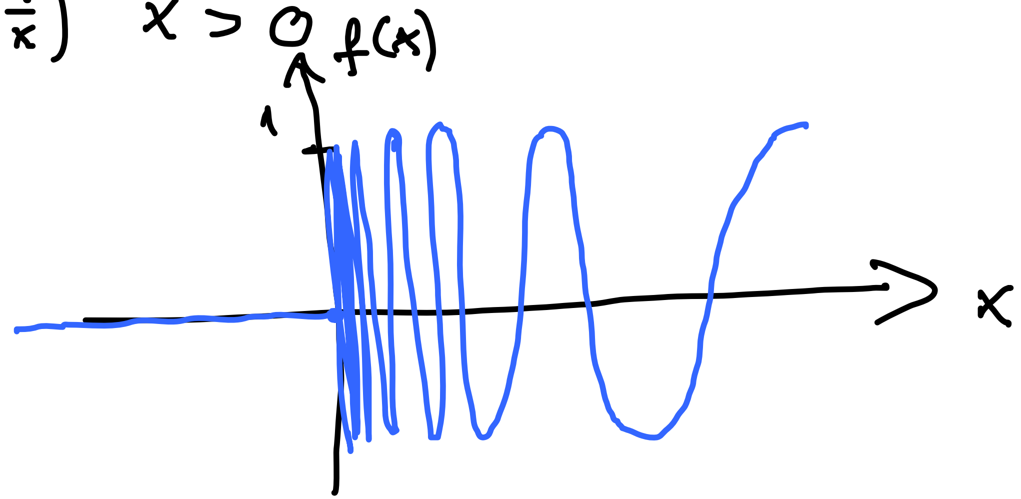
Der links-seitige Grenzwert ist analog, (mit $x_n < \bar{x}$) definiert.

Eine Funktion f ist stetig bei $\bar{x}$, wenn

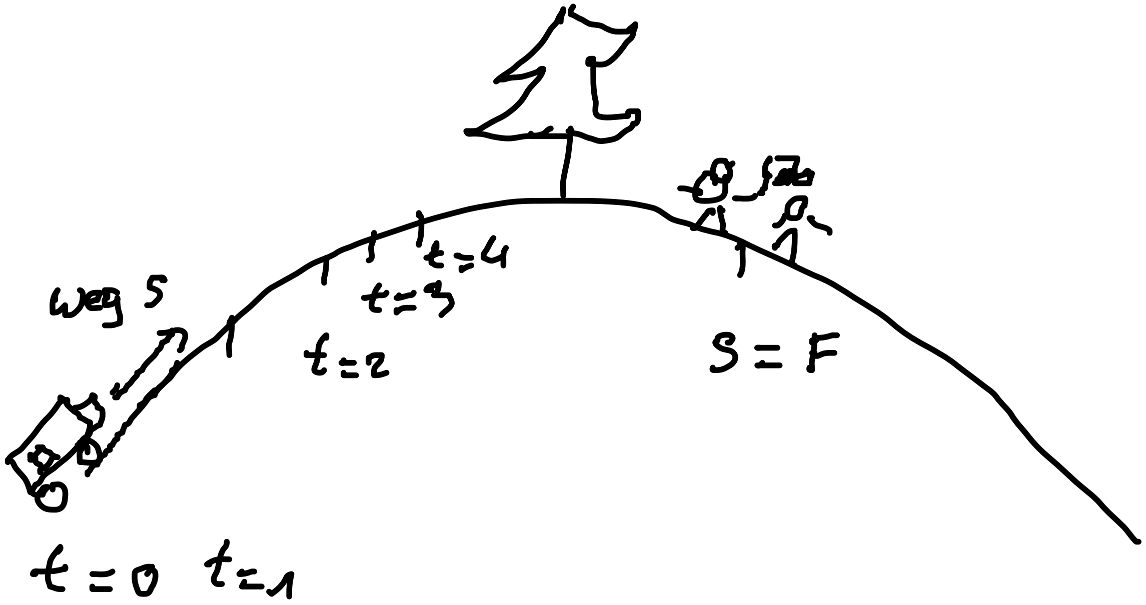
$$\lim_{x \searrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \nearrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

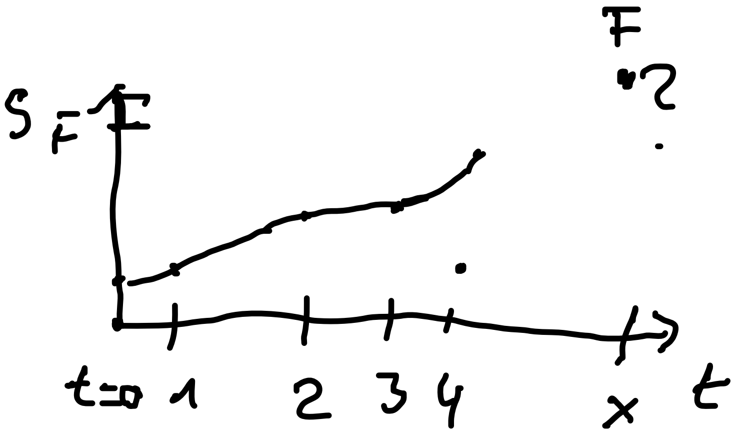
Manchmal existiert auch der rechts- (oder links-) seitige Grenzwert nicht:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases}$$



Differentation

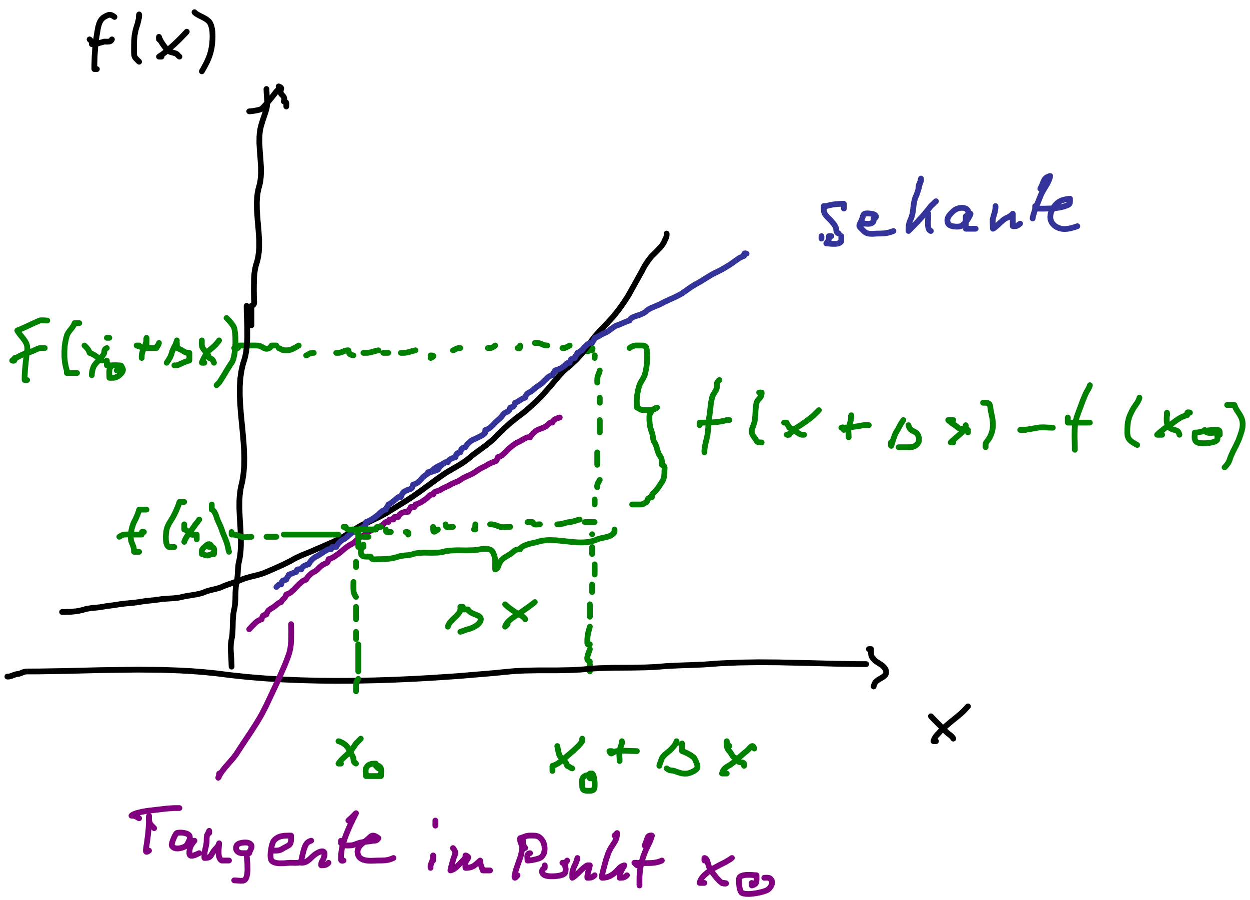




Vorhersage

Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$

Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$



Ableitung von f im Punkt x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Differenzenquotient = Steigung der Sekante

Steigung der Tangente im Punkt x_0

≙ Ableitung $f'(x_0)$

Eine Funktion $y=f(x)$ heißt an der Stelle $x=x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

existiert. Er wird erste Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt.

Wir schreiben

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{Differenzen-quotient}} = \underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{Differential-quotient}}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

lineare Näherung

Tangentensteigung

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\, \Delta x$$

$$df = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)\,\underbrace{dx}_{}$$

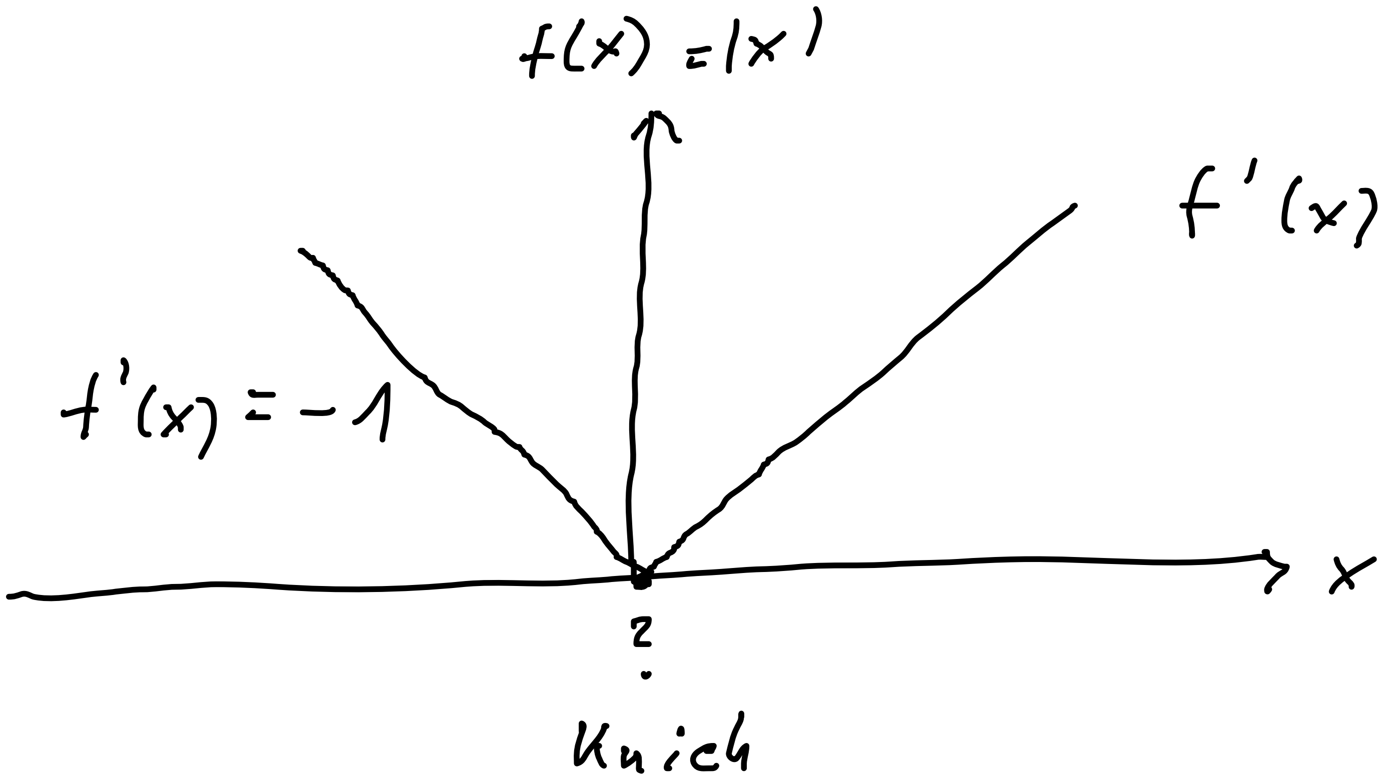
Differential von f in x_0

infinitesimaler Abstand

$$\boxed{f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)\,dx}$$

Funktion, für die der Grenzwert des Differentialquotienten nicht existiert:

Betragsfunktion $f(x) = |x|$



Diese Funktion ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, da rechts- und linksseitiger Grenzwert des des Differentialquotienten nicht übereinstimmen.

$\Rightarrow$ differenzierbare Funktionen sind glatte Funktionen

Eine Funktion heißt differenzierbar über ihrem Definitionsbereich, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Ableitungen der elementaren Funktionen

Potenzen: $f(x) = x^{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{df}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\frac{d}{dx}(a x^{0}) = \frac{d}{dx} a = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Exponentialfunktion: $f(x) = \exp(x)$

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Ableitungsregeln:

$$\frac{d}{dx} \left(a\, g(x) \right) = a \frac{d}{dx} g(x) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) + g(x) \right) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Man sagt: Die Ableitung ist eine lineare Operation.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N\right)$$

$$= \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx} a_1 x + \frac{d}{dx} a_2 x^2 + \dots + \frac{d}{dx} a_N x^N$$

$$= 0 + a_1 \frac{d}{dx} x + \dots\dots + a_N \frac{d}{dx} x^N$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1}$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\, f \circ g = \frac{d}{dx}\, f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

in Differentialschreibweise:

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{f(\underbrace{g(x)}_{y})}_{z}\Big)$$

$y = g(x)$

$z = f(y)$

$$\frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{f'(y)} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{g'(x)}$$

nützliche Erweiterung des Differentialquotienten

$$= f'(g(x))$$

Beispiel: $\frac{d}{dt}\sin(\omega t)$

$y = \omega t$

$z = \sin(y)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \cos(\omega t) \cdot \omega$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\big(\underbrace{x+\tfrac{1}{x}}_{y}\big)^4-1}_{z}\Big)^3}_{w}$$

$$y(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$z(y) = y^4 - 1$$

$$w(z) = z^3$$

$$\frac{d}{dx}\Big(w\big(z(y(x))\big)\Big) = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{dw}{dz} \quad \frac{dz}{dy} \quad \frac{dy}{dx}$$

$$= w'(z) \cdot z'(y) \cdot y'(x)$$

$$= 3z^2 \cdot 4y^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 3\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right)^2 \cdot 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$f(x)$ mit Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$

$g(f(x)) = x$ und $f(g(x)) = x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

gesucht: $g'(x) = \dfrac{dg}{dx}$

Betrachte:

$$f(\underbrace{g(x)}_{y}) = x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$=$$

Kettenregel $$\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(y) \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel: $\frac{d}{dx} \ln x$

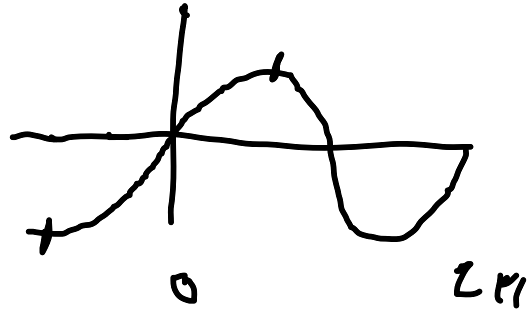
$$\ln(x) = \exp^{-1}(x)$$

$$\ln(x) = f^{-1}(x) \qquad f = \exp(x)$$

$$f' = \exp(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x)$$

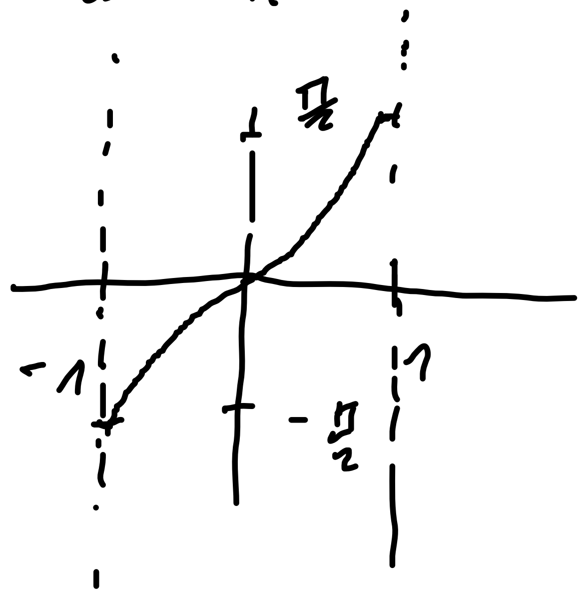


$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

arc sin x



$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$\arcsin[-1, 1] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$$

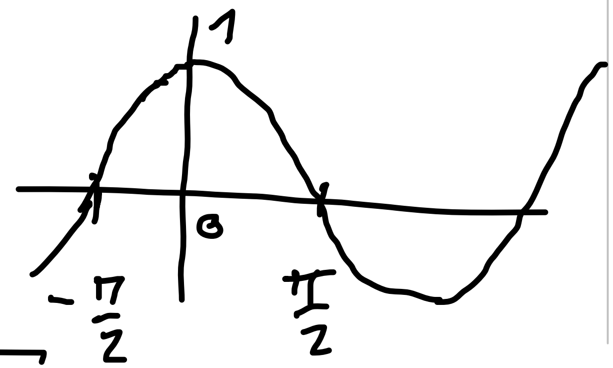
$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

NR:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

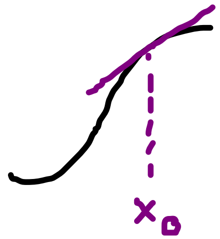
$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$



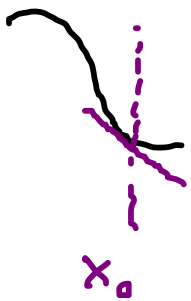
$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bedeutung der 1. Ableitung

$f'(x_0)$ = Tangentensteigung in x_0



$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend in einer Umgebung von x_0



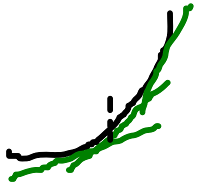
$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend in einer Umgebung von x_0

2. Ableitung:

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{d}{dx} f'(x_0)$$

gibt die Krümmung der Funktion in einer Umgebung von x_0 an

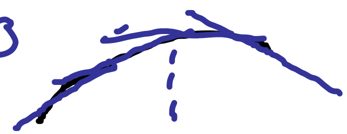
$f''(x_0) > 0$



x_0

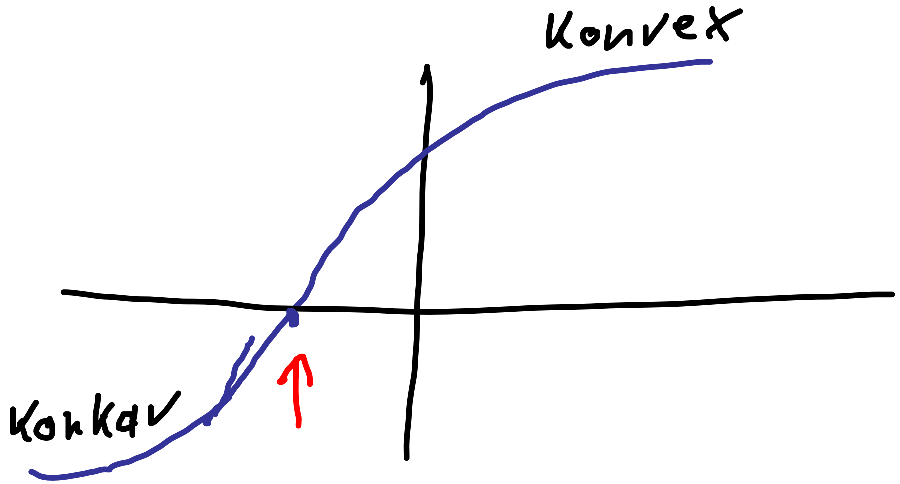
$\Rightarrow$ f ist in einer Umgebung von x_0 linksgekrümmt oder konkav

$f''(x_0) < 0$



x_0

$\Rightarrow$ f ist in einer Umgebung von x_0 rechtsgekrümmt oder konvex



$f''(x_0) = 0$ Wendepunkt

Extremstellen:

Lokales Maximum $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0$

Lokales Minimum $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0$

Wendepunkt: $f''(x_0) = 0 \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0 \quad f'(x_0) \neq 0$

Sattelpunkt: $f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) = f^{(3)}(x_0) \neq 0$

Die Ableitungen einer Funktion in einem Punkt x_0 geben Auskunft über das Verhalten der Funktion in einer Umgebung dieses Punktes.

Frage: Können wir aus den Ableitungen einer Funktion in einem Punkt den Verlauf der Funktion rekonstruieren.

Antwort: Taylor-Entwicklung

Wir nähern die Funktion durch ein Polynom/Potenzreihe

$$f(x) \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Forderung: an der Stelle $x_0 = 0$ sollen alle Ableitungen der Funktion mit den Ableitungen des Polynoms übereinstimmen.

$$\Rightarrow f(0) = a_0$$

$$f'(x)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} a_1 x^1 \Big|_{x=0} = a_1 .$$

$$f''(x)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(2a_2 x)\Big|_{x=0} = 2\, a_2$$

$$f'''(x)\Big|_{x=0} = 2 \cdot 3 \cdot a_3$$

$$f^{(4)}(0) = f^{(4)}(x)\Big|_{x=0} = 2\cdot 3\cdot 4\, a_4$$

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(x)\Big|_{x=0} = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}_{n!}\, a_n = n!\, a_n$$

Taylor-Entwicklung an der Stelle $x=0$ bis zur N-ten Ordnung:

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n \qquad \text{(bei Konvergenz)}$$

Beispiel: $f(x) = \exp(x)$ $\qquad f^{(n)}(x) = \exp(x)$

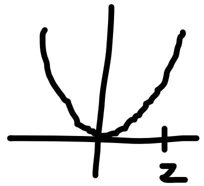
$$f^{(n)}(x=0) = 1$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 1 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Taylor-Entwicklung an einer beliebigen Stelle x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \, (x - x_0)^n$$

Beispiel: $f(x) = x^2$



Taylor-Entwicklung bei $x_0 = 2$

$$f(x)\Big|_{x=2} = f(2) = 4$$

$$f'(x)\Big|_{x=2} = 2x\Big|_{x=2} = 4$$

$$f''(x)\Big|_{x=2} = 2$$

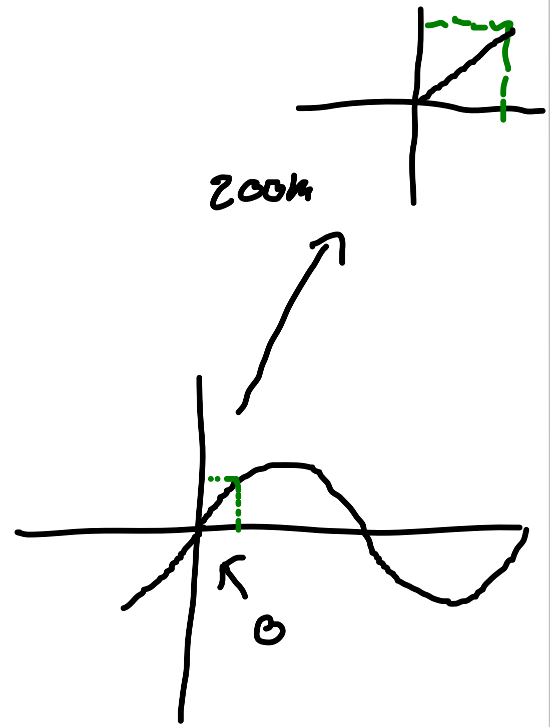
$$f'''(x)\Big|_{x=2} = 0$$

$$f^{(n>3)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 + \frac{1}{1!}\,4\,(x-2)^1 + \frac{1}{2!}\,2\,(x-2)^2 + \frac{1}{3!}\cdot 0$$

$$= \cancel{4} + \cancel{4x} - \cancel{8} + (x^2 - \cancel{4x} + \cancel{4})$$

$$= x^2$$

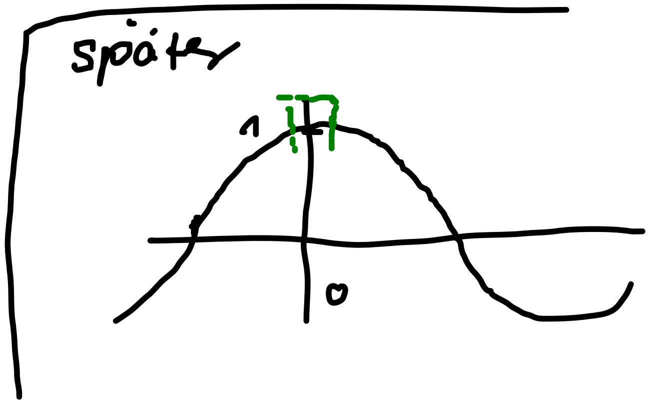


Weitere Entwicklungen:

$\sin(x)$ an der Stelle $x = 0$

$$\sin(x)\Big|_{x=0} = \sin(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x)\Big|_{x=0} = \cos(x)\Big|_{x=0} = 1$$



$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\cos x\Big|_{x=0} = -\sin x\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin x\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(-\sin x)\Big|_{x=0} = -\cos x\Big|_{x=0} = -1$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\sin x\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(-\cos x)\Big|_{x=0} = \sin x\Big|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot 1 \cdot x^1 + \frac{1}{2!}\cdot 0\, x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0\cdot\frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \checkmark$$

Aufgabe: Entwicklung $\exp(ix)$ o.ä. später

Integration:

1. Integration als Umkehrung der Differentation

Motivation: In einer Situation ist die Änderung einer Funktion (d.h. deren Ableitungsfunktionen) bekannt und wir suchen die Funktion selbst.

Beispiel: Autofahrt: wir können die Geschwindigkeit des Fahrzeugs im Auto ablesen und wollen wissen, welche Strecke das Auto zurückgelegt hat.

Geg.: $v(t)$ ist bekannt

Wir wissen: $$v(t) = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

Gesucht: $s(t)$

Falls $v(t) = \text{const} = v_0 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 0$

$\Rightarrow s(t) = v_0 t + s_0$

unbestimmte Konstante

Normal, etwas anders:

hier

$$v(t) \overset{!}{=} V_0 = \dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$ds(t) = V_0 \, dt \quad \Big| \int$$

$$\int ds(t) = \int v_0 \, dt$$

$$s(t) = V_0 \int dt + s_0 = V_0 t + s_0$$

Falls $v(t) = a\,t$ Achtung: $\frac{ds}{dt} \overset{\text{hier}}{\neq} 0$!

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + s_0 \left(+ v_0 t\right)$$

analog:

$$\int ds(t) = \int a t \, dt$$

$$s(t) = a \int t \, dt \qquad + s_0$$

$$= \frac{1}{2} a t^2 \qquad + s_0$$

denn $\frac{ds}{dt} = at \neq \text{const}$

Ganz allgemein definieren wir:

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Für $F(x)$ schreibt man auch

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

und bezeichnet $F(x)$ als das (unbestimmte) Integral von $f(x)$.

Die Stammfunktionen zu $f(x)$ sind nicht eindeutig, sondern können sich durch Integrationskonstanten unterscheiden:

Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so gilt:

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const.}$$

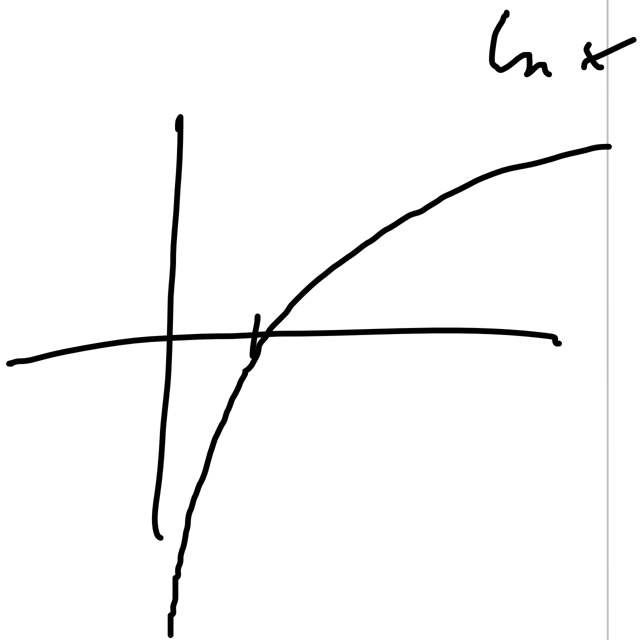
Die Stammfunktionen elementarer Funktionen erhält man, indem man die Differentationstabelle rückwärts benutzt:

Beispiel: $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$$\Rightarrow \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\Rightarrow \int e^x \, dx = e^x + c$$



Aber nun:

$$\frac{d}{dt} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

ist zunächst nur für $x > 0$ definiert.

gibt es eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x < 0$?

Antwort: $F(x) = \ln|x| + c$

denn

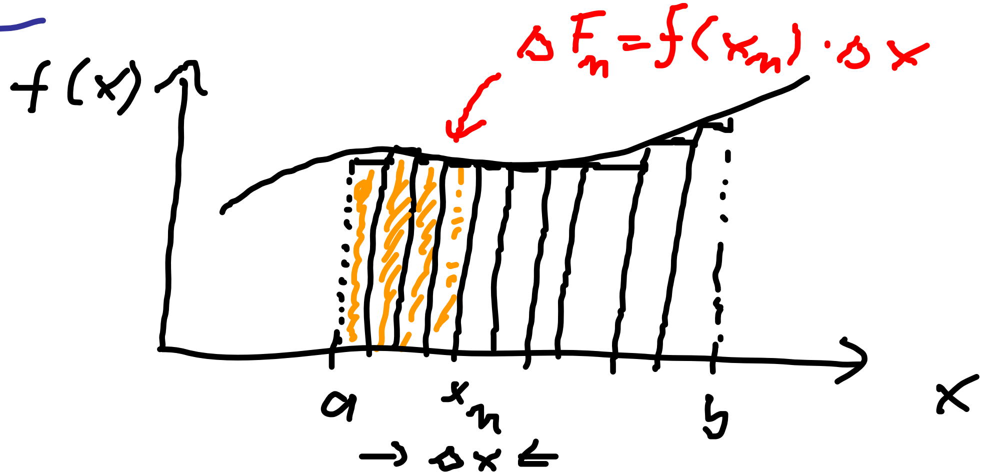
$$F(x) = \begin{cases} \ln x + c & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{1}{(-x)} = \frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

y

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{d(-x)}{dx} = \frac{1}{(-x)} (-1) = \frac{1}{x}$$

2. Das bestimmte Integral als Flächeninhalt



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Flächeninhalt unter der Kurve:

$$F_{ab} = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta F_n = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$$

$x_n = a + n\,\Delta x$ Stützstellen

$N = \dfrac{b-a}{\Delta x}$ Anzahl der Stützstellen

Verfeinerung der Intervallteilung Δx:
"immer bessere Annäherung an F_{ab}"

$$\Rightarrow F_{ab} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{\Delta x} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\, \Delta x ,$$

so heißt $f(x)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ **integrierbar** und den Grenzwert nennt man das **bestimmte Integral** von $f(x)$ auf $[a,b]$.

Man schreibt:

obere Integrationsgrenze

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \, \underbrace{dx}_{\text{infinitesimale Änderung der Integrationsvariablen}} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\, \Delta x$$

untere Integrationsgrenze

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ein bestimmtes Integral über dem Intervall $[a,b]$ läßt sich durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

berechnen, wobei $F(x)$ ein Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Andere Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

In der Differenz $F(b) - F(a)$ hebt sich die unbestimmte Integrationskonstante der Stammfunktion weg.

Insbesondere gilt:

$$\frac{d}{dy} \int_a^y f(x)\, dx = \frac{d}{dy} \big(F(y) - F(a) \big) = f(x)$$

und

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

$\Rightarrow$ Integration und Differentation sind invers zueinander

Beispiel:

$$\int (1-x^2)\,dx = \int 1\,dx - \int x^2\,dx = x - \frac{1}{3}x^3 + c = F(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + c\right) = 1 - x^2 \quad \checkmark$$

$$\int_1^x \frac{1}{y}\,dy = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

Rechenregeln für Integrale:

Linearität

$$\int_a^b \alpha\big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \alpha\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} 2\left(\cos(x) + \sin(x)\right) dx$$

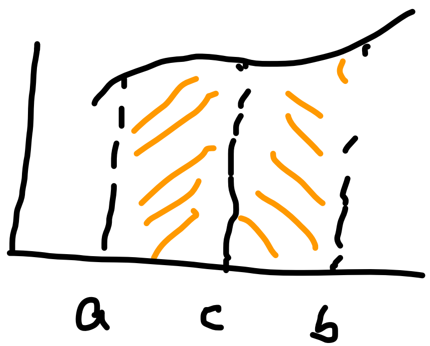
$$= 2\int_0^{\pi} \cos x \, dx + 2\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= 2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \cos \Big|_0^{\pi} = 2\cdot(0-0) - 2(-1-1) = 4$$

<u>Intervall - Addition:</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Beispiel:

$$\int_\pi^0 \sin x\,dx = -\cos x\Big|_\pi^0 = -\cos(0) + \cos(\pi)$$

$$= -\left(-\cos(\pi) + \cos(0)\right) = -\int_0^\pi \sin x\,dx \quad ✓$$

$$\int_1^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 + \frac{1}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{1}{3}[\cancel{8} - 1] + \frac{1}{3}[27 - \cancel{8}]$$

$$= \frac{1}{3}[27 - 1] = \int_1^3 x^2\,dx$$

Integrationstechniken:

1. Integration als Umkehrung der Differentation

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} = x^{\alpha} \quad \checkmark$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

2. partielle Integration

2. partielle Integration

Ziel: "Ableitung umwälzen"

Ausgangspunkt: Produktregel der Differentiation

$$\frac{d}{dx}(u\,v) = u'v + u\,v' \qquad \Big| \int dx \quad \boxed{u,\ v = u(x), v(x)}$$

$$\int \frac{d}{\cancel{dx}}(u\,v)\,\cancel{dx} = \int dx\, u'v + \int dx\, u\,v'$$

$$\int d(\underbrace{u\,v}_{y}) = \int dy = y = uv\ (+c) \qquad \int dx = x + c$$

d.h. $u\,v = \int dx\, u'v + \int dx\, u\,v'$

$$\Rightarrow \left\| \int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx \right\|$$

Bsp.: $\int x e^x \, dx$

wähle $v(x) = x \qquad u'(x) = e^x$

$v'(x) = 1 \qquad u(x) = e^x$

$\Rightarrow$ part. Int. $\int x e^x \, dx = \left[x e^x \right] - \underbrace{\int e^x \, dx}_{e^x + C_2} + C_1$

$= e^x (x - 1) + C \quad , C = C_1 - C_2$

$\int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} \, dx$

$u' = \cos x \qquad v = \cos x$

$u = \sin x \qquad v' = -\sin x$

$\Rightarrow$ p.I. $\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) - \int \sin(x)(-\sin x)\,dx$

$= \sin(x)\cos(x) + \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\,dx$

$= \sin(x)\cos(x) + \int (1-\cos^2 x)\,dx$

$= \sin(x)\cos(x) + \int dx - \int \cos^2 x\,dx$

$\Rightarrow 2\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + x + c$

$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + \tilde{c} \qquad (\tilde{c} = \frac{c}{2})$

Bronstein
Math. Formelsammlung

Manchmal hilft auch ein Trick:

$$\int \ln(x) \overbrace{\;}^{\cdot 1} dx$$

Wir wissen: $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$$

Benutze part. Int., um das Integral in eine bekannte Form zu überführen.

setze $\quad u = \ln(x) \qquad v' = 1$

$\qquad\quad u' = \dfrac{1}{x} \qquad v = x$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x}\, x\, dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

3. Substitution:

F sei Stammfunktion zu f

Kettenregel: $\frac{d}{dx} F(y(x)) = \underbrace{\frac{dF(y(x))}{dy}}_{f(y(x))} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'(x)}$

$= y'(x) f(y(x)) \quad \Big| \int dx$

$\underbrace{\int \frac{d}{\cancel{dx}} F(y(x))\, \cancel{dx}}_{F(y(x))} = \int y'(x) f(y(x))\, dx$

$= \int \frac{dy}{\cancel{dx}} f(y(x))\, \cancel{dx} = \int f(y)\, dy$

$$\Rightarrow \boxed{\int y'(x) f(y(x))\, dx = \int f(y)\, dy}$$

Bsp.:

$$\int 2x e^{x^2}\, dx$$

$y = x^2$ ← beide Seiten ableiten

$dy = 2x\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$$\Rightarrow \int \cancel{2x}\, e^{y} \frac{dy}{\cancel{2x}} = \int e^y\, dy = e^y + C = e^{x^2} + C$$

bei bestimmten Integralen:

$$\int_a^b y'(x) f(y(x))\, dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y)\, dy$$

also:

$$\int_0^2 2x\, e^{x^2}\, dx = \int_0^4 e^y\, dy = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$= e^{x^2} \Big|_0^2$$

Bsp.:

$$\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\, dt$$

sub.: $y = \omega t$

$$\frac{dy}{dt} = \omega \Leftrightarrow dy = \omega\, dt$$

$$y(t=0) = 0$$

$$y(t=\pi) = \omega \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,dt = \int_0^{\omega\pi} \sin(y)\,\frac{dy}{\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega\pi} \sin(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\omega} \cos(y)\Big|_0^{\omega\pi}$$

$$= \frac{1}{\omega}\left(\cos(\omega\pi) - 1\right)$$

3. Bsp.:

$$\int_0^b t^3 \exp(-\alpha t^2)\,dt$$

Sub.: $y = -\alpha t^2$

$$dy = -2\alpha t\,dt$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\alpha t$$

Grenzen: $y(t=0) = 0$

$y(t=b) = -\alpha b^2$

$$\Rightarrow \int_0^b t^3 \exp(-\alpha t^2)\, dt = \int_0^{-\alpha b^2} t^3 \exp(y) \frac{dy}{(-2\alpha t)}$$

$$= \int_0^{-\alpha b^2} t^2 \exp(y) \frac{dy}{(-2\alpha)}$$

Noch t^2 einsetzen: $t^2 = -\frac{1}{\alpha} y$

$$\Rightarrow \int_0^b t^3 \exp(-\alpha t^2)\, dt = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{-\alpha b^2} \left(-\frac{y}{\alpha}\right) e^y\, dy$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{-\alpha b^2} y\, e^y\, dy = \ldots \text{p.I.}$$

4. Trigonometrische Substitutionen

$$\int dx \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Versuch: $y = 1-x^2$

$dy = -2x \, dx$

$$\Rightarrow \int dx \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} \left(-\frac{1}{2x(y)} \right)$$

x durch y ausdrücken:

$$y = 1-x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y}$$

$$\stackrel{!}{=} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} \, \frac{-1}{2\sqrt{1-y}}$$

Diese Substitution bringt uns nicht weiter ... next try neuer Versuch:

Ausgangspunkt: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

Substitution: $x = \sin u$

$$\frac{dx}{du} = \cos u$$

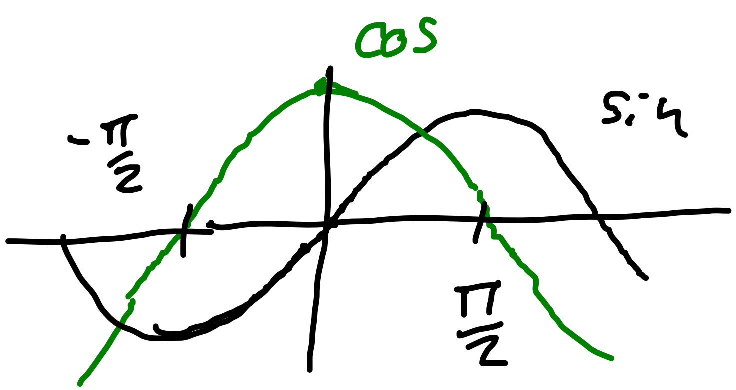
$$dx = \cos u \, du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \frac{\cos u \, du}{|\cos u|}$$

Die Substitution ist eindeutig falls $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos u \geq 0$

$\Rightarrow |\cos u| = \cos u$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cancel{\cos u}\, du}{\cancel{\cos u}} = \int du = u(x) + c$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \sin u \\ u = \arcsin x \end{array} \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \arcsin(x) + c$$

weiteres Beispiel: $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Benutze: $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$$

Substitution: $x = \sinh u$

$$dx = \cosh u \, du$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{\cosh^2 u} = |\cosh u|$$

$$= \cosh u \,,$$

$$\text{da } \cosh u > 0 \quad \forall u$$

$$\left[\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^{u}+e^{-u}\right)}_{\text{immer positiv}}\right]$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \cosh^2 u \, du$$

$$= \int \left[\tfrac{1}{2}\left(e^{u}+e^{-u}\right)\right]^2 du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2u} + 2u - \frac{1}{2}e^{-2u}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{2u} - e^{-2u}\right] + \frac{1}{2}u$$

$$= \frac{1}{8} \underbrace{(e^{u} + e^{-u})}_{2\cosh u} \underbrace{(e^{u} - e^{-u})}_{2\sinh u} + \frac{u}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cosh u \sinh u + \frac{1}{2} u$$

Resubstitution: $\cosh u = \sqrt{1+x^2}$

$\sinh u = x$

$u = \operatorname{arcsinh}(x)$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(x)$$

5. Integrale rationaler Funktionen

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

1. Versuche Nenner zu faktorisieren

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

$(l+m)^2$
$= l^2+2lm+m^2$

2. Fallunterscheidung

i) $-\frac{b^2}{4}+c < 0$

$\Rightarrow$ quadratische Form ist faktorisierbar

ii) $-\frac{b^2}{4}+c >$ $\Rightarrow$ Normalform

iii) $-\frac{b^2}{4}+c = 0$ $\rightarrow$ Substitution $y = x+\frac{b}{2}$

i) $-\frac{b^2}{4}+c<0$

$$\Rightarrow x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\right)$$

$$=(x+\alpha)(x+\beta)\ , \text{ wobei}$$

$$\alpha=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

$$\beta=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+bx+c}=\frac{1}{(x+\alpha)(x+\beta)}$$

$$\overset{!}{=}\frac{p}{x+\alpha}+\frac{q}{x+\beta}$$ mit geeigneten p und q

$\boxed{\text{Partialbruch-zerlegung!}}$

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{(x+\alpha)(x+\beta)} \overset{!}{=} \frac{p}{x+\alpha} + \frac{q}{x+\beta}$$

$$= \frac{p(x+\beta)+q(x+\alpha)}{(x+\alpha)(x+\beta)}$$

Zähler des Bruchs:

$$p(x+\beta) + q(x+\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (p+q)x + p\beta + q\alpha = 1$$

Koeffizientenvergleich:

$$p+q = 0 \quad \text{und} \quad p\beta + q\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad p = -q \quad \rightarrow \quad q(\alpha-\beta) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad p = -q \qquad q = \frac{1}{\alpha-\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+bx+c} = -\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{1}{x+\beta}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x^2+bx+c} = -\frac{1}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x+\alpha} + \frac{1}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x+\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\ln(x+\beta) - \ln(x+\alpha)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}} \ln\left(\frac{x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}}{x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}}\right)$$

ii) $-\frac{b^2}{4}+c > 0 \Rightarrow$ keine Faktorisierung möglich also: $$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}$$

bringe auf Normalform: $$\frac{1}{z^2+1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{c-\frac{b^2}{4}}}_{>0} \; \frac{1}{\underbrace{\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{c-\frac{b^2}{4}}}_{z^2} + 1}$$

Substitution: $$z = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\left(x+\frac{b}{2}\right)$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{c-b^2/4}}\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \right)$$

Uneigentliche Integrale

Häufig liegt eine Situation vor, in der sich das Integrationsintervall über die ganzen reellen Zahlen erstreckt. (Beispiel Gravitationskraft $\sim \frac{1}{r^2}$, Coulombkraft $\sim \frac{1}{r^2}$)

Wir bezeichnen als uneigentliche Integrale 1. Art die Grenzwerte:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Beispiel:</u> $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, x^{-(1+\varepsilon)}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-(1+\varepsilon)}\, x^{1-(1+\varepsilon)} \Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(-\varepsilon)} \, x^{-\varepsilon} \Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a^\varepsilon} - \frac{1}{b^\varepsilon} \right)$$

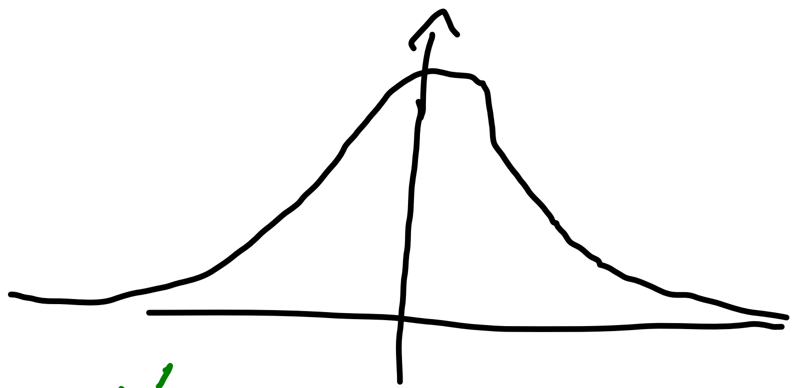
$$= \frac{1}{\varepsilon} \, \frac{1}{a^\varepsilon}$$

Grenzwert existiert für alle $\varepsilon > 0$

anderes wichtiges Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$e^{-\alpha x^2}$



Gauß'sche Glockenkurve

Normalverteilung

Berechne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

Trick: $x^2 e^{-\alpha x^2} = -\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x^2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{d e^{-\alpha x^2}}{d\alpha}\right) dx$$

$$= -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

Integration und Differentation vertauscht!

$$= -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

Uneigentliche Integrale der 2. Art

Hat der Integrand eine Unendlichkeitsstelle innerhalb des Integrationsintervalls, so sprechen wir von einem uneigentlichen Integral der 2. Art.

Beispiel:

$$\int_0^b \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \lim_{\eta \to 0} \int_\eta^b dx \; x^{-1+\varepsilon}$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\varepsilon} x^{\varepsilon} \Big|_\eta^b$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} b^{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \eta^{\varepsilon} \right]$$

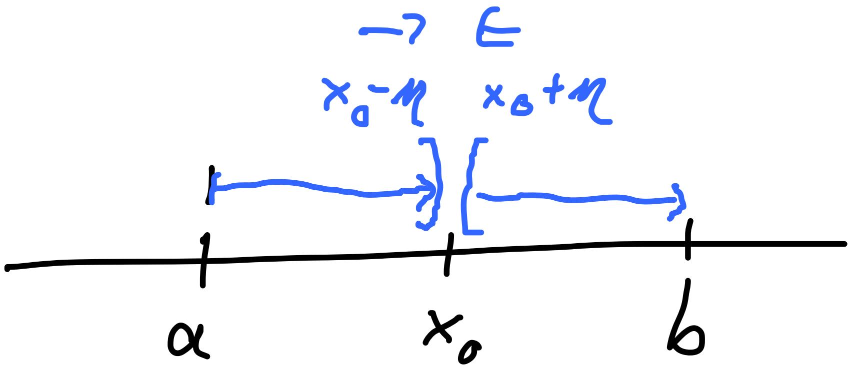
$$= \frac{1}{\varepsilon} b^{\varepsilon} - \underbrace{\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}}$$

Grenzwert existiert
für alle $\varepsilon > 0$
$= 0$

$$= \frac{1}{\varepsilon} b^{\varepsilon}$$

Liegt die Unendlichkeitsstelle von $f(x)$ bei $x_0 \in (a,b)$, so ist das uneigentliche Integral der Grenzwert:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to 0} \int_a^{x_0 - \eta} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{x_0+\eta}^{b} f(x)\,dx$$



Integration finito

komplexe Zahlen

$x^2+1=0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$

Mathematiker sind erfinderisch .... und konservativ...

Euler 1777: Definiert eine Lösung dieser Gleichung

und nennt die Lösung die

$\boxed{\text{imaginäre Einheit } i \text{ mit der Eigenschaft } i^2 = -1}$!

Was ist die Lösung von $x^2 = -2$

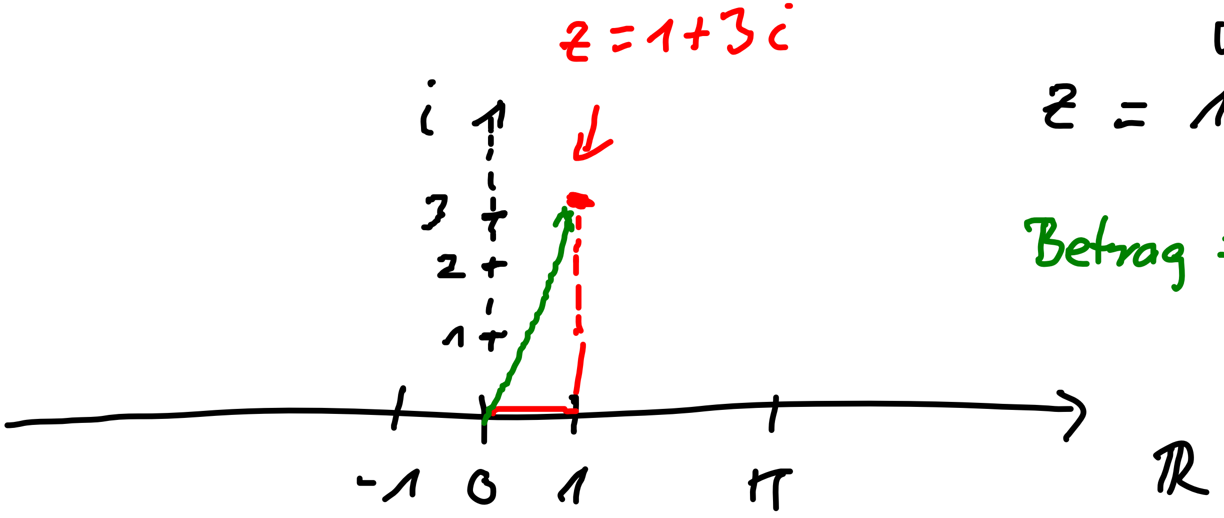
$$\frac{x^2}{2} = -1$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = (\pm)\, i$$

$$\Rightarrow x = (\pm)\, i\sqrt{2}$$

Wie stellen wir diese Zahlen dar?



Realteil

Imaginärteil

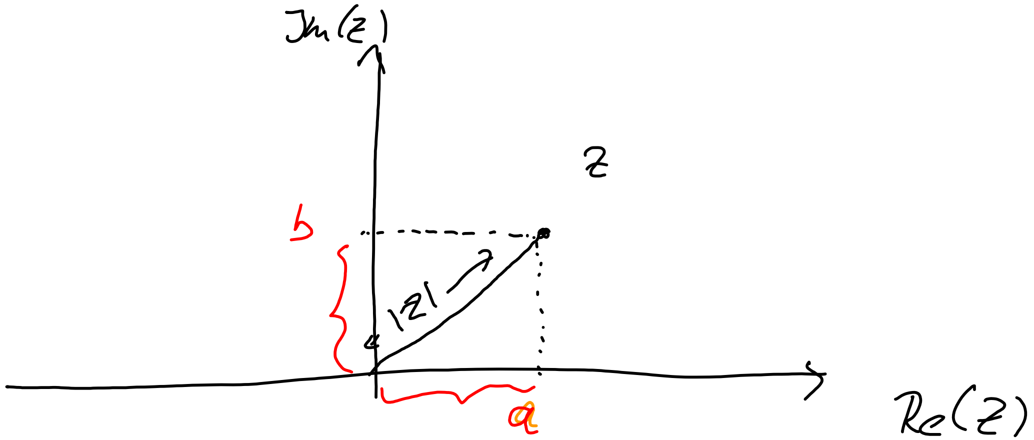
$$z = 1 + 3i$$

Betrag $z = \sqrt{1^2 + 3^2}$

komplexe Zahlen

$i^2 = -1$ d.h. $\sqrt{-1} = i$

Darstellung der komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene



komplexe Zahl

$$z = x + iy$$
$$= Re(z) + i\,Jm(z)$$

Betrag von $z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re^2(z) + Jm^2(z)}$

Beispiel: $z = 3 + 4i$ $\quad |z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Beachte: $|z| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\quad |z| = 0 \iff z = 0$

Es sollen für komplexe Zahlen die gleichen Rechenregeln gelten wie für reelle Zahlen:

Die Gleichung $x^2 - 2x + 3 = 0$

führt zu $(x-1)^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = -2 \qquad | \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad (x-1) = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{(-1)(2)} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\sqrt{2}$

$= \pm\sqrt{2}\, i$

$x = 1 \pm \sqrt{2}\, i$ komplexe Zahl

$= a + ib$

Wir definieren: Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist definiert durch

$$\boxed{\mathbb{C} = \{ z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}}$$

Wir bezeichnen

Realteil von z $= \mathrm{Re}(z) = a$

Imaginärteil von z $= \mathrm{Im}(z) = b$

$a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Ist $b = 0$, so ist z eine reelle Zahl

$\Rightarrow \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Ist $a = 0$, so ist z eine rein imaginäre Zahl

$\Rightarrow$ Die Rechenregeln für die komplexen Zahlen müssen so sein, daß die Regeln für die reellen Zahlen erhalten bleiben.

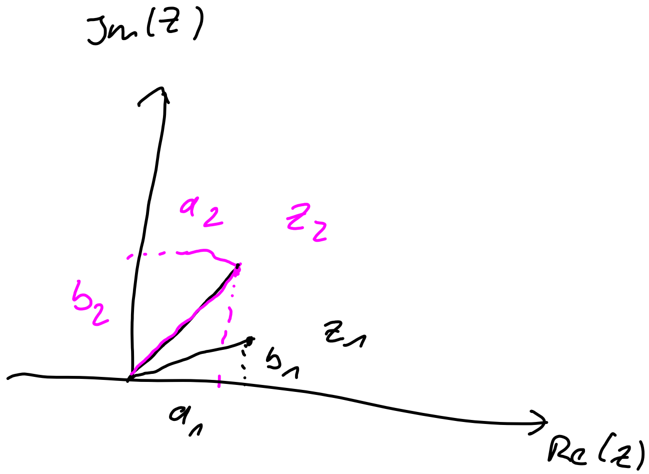
Remember: $\quad x^2 = -2 \qquad \frac{x^2}{2} = -1 \quad \Big| \sqrt{\ } \qquad \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{-1} = i$

d.h. $\quad x = \sqrt{2}\, i$

d.h. mit den Vorfaktoren ("Imaginär-Teil") von i verrechnen wir ebenso wie mit reellen Zahlen, denn $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Rechenregeln für komplexe Zahlen

1) $$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$
$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$



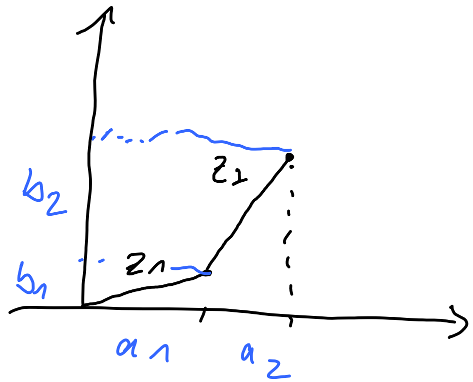
Beispiel:

$$(1 + 2i) + (3 + i) = 4 + 3i$$

Insbesondere gilt:

$$z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = 0$$

addiere $z_1 + z_2$:



2. Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + i b_1 i b_2$$
$$=$$

$$= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + \underbrace{(i)^2}_{=-1} b_1 b_2$$

$$= \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{\mathrm{Re}(z_1 z_2)} + i\underbrace{(a_1 b_2 + b_1 a_2)}_{\mathrm{Im}(z_1 z_2)}$$

Beispiel: $(3+4i)(7-5i) = 21 + 20 + i(-15 + 28)$
$= 41 + 13i$

Insbesondere gilt:

$i^2 = -1$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^3 = i \cdot i^2 = i(-1) = -i$

$\Rightarrow$ $i^{4n} = 1$ $\qquad$ $i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1$

$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = i$ $\qquad$ $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i$

3. Komplexe Konjugation

Zu jeder komplexen Zahl $z = a + ib$ gibt es eine komplex konjugierte Zahl $z^* = a - ib = \bar{z}$

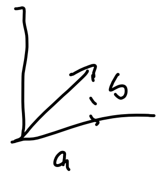
Bsp.: $(3+7i)^* = 3-7i$

$(6-5i)^* = 6+5i$

Es gilt: $z \cdot z^* = (a+ib)(a-ib)$

$= a^2 + iba - iab + ib(-ib)$

$= a^2 - \underbrace{i^2}_{-1} b^2 + i\underbrace{(ba-ab)}_{=0} = a^2+b^2$ ✓



$z \cdot z^* = \text{Betrag}^2 \in \mathbb{R}$ ist reell ✓

Test : $z \cdot z = (a+ib)(a+ib)$

$$= a^2 + i^2 b^2 + i(ba + ab)$$

$$= a^2 - b^2 + i(ba + ab) \in \mathbb{C}$$

kann kein Betragsquadrat sein ↯

$\Rightarrow$ daher Einführung der komplex konjugierten Zahl notwendig!

Insbesondere gilt :

$z = a$ d.h. reell $\Rightarrow z^* = a = z$

$z = ib$ imaginär $\Rightarrow z^* = -ib = -z$

Merke :

$$\boxed{\begin{aligned} z + z^* &= (a + \cancel{ib}) + (a - \cancel{ib}) \\ &= 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \\ z - z^* &= (\cancel{a} + ib) - (\cancel{a} - ib) \\ &= 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z) \end{aligned}}$$

$$z^* - z = (\cancel{a} - ib) - (\cancel{a} + ib)$$

$$= -2ib = -2i\,\mathrm{Im}(z)$$

4. Division durch eine komplexe Zahl

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \qquad z_2 \neq 0$$

Zurückführen auf Division durch reelle Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{\underbrace{z_2 \cdot z_2^*}_{\text{reell}}} = \frac{\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)}{z_2 z_2^*} + i\,\frac{\mathrm{Im}(z_1 z_2^*)}{z_2 z_2^*}$$

Beispiel:

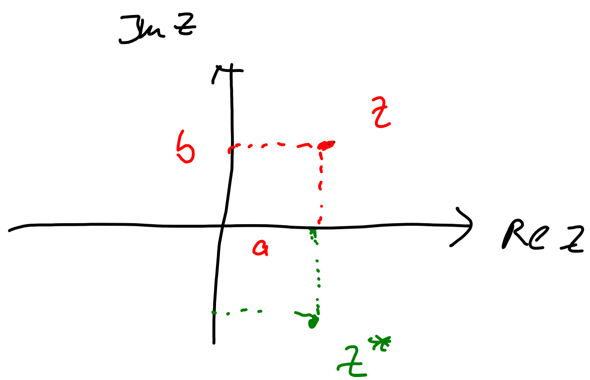
$$\frac{3+4i}{7-5i} = \frac{3+4i}{7-5i} \cdot \frac{7+5i}{7+5i} = \frac{(3+4i)(7+5i)}{7^2+5^2} = \frac{1}{74}\left(21 + i(28+15) - 20\right)$$

$$= \frac{1}{74}\,(1 + 43i)$$

$$= \frac{1}{74} + i\,\frac{43}{74}$$

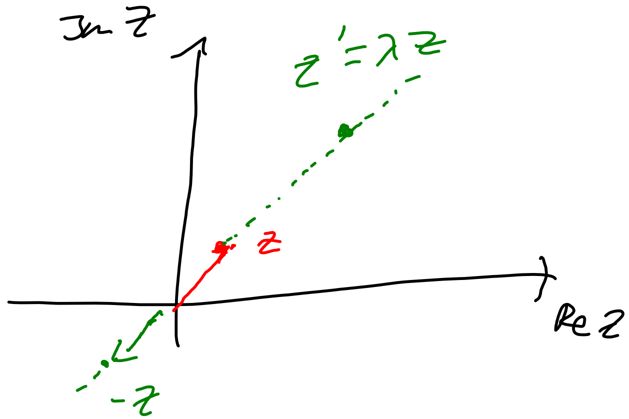
5. Graphische Darstellunge -

komplexe Konjugation : Spiegelung an der reellen Achse



Multiplikation mit einer reellen Zahl λ:

$$\lambda z = \lambda(a+ib) = \lambda a + i\lambda b$$



$\Rightarrow$ Streckung $\lambda > 1$

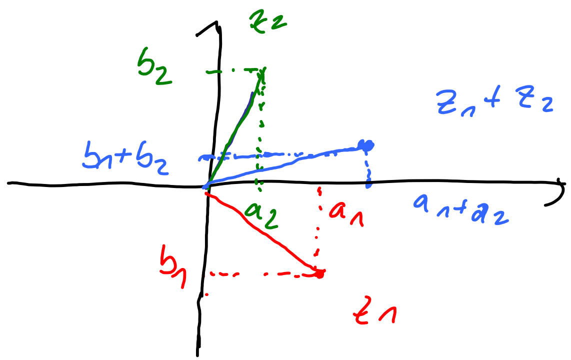
Stauchung $0 < \lambda < 1$

Punktspiegelung $\lambda = -1$

NR:

$z = a+ib$ $\qquad (-z) = (-1)\, z = (-1)(a+ib) = -a - ib$

Addition komplexer Zahlen in der komplexen Zahlenebene



$\Rightarrow$ sieht aus wie bei

Addition von Vektoren!

Bemerkung: aus der Darstellung in der komplexen Zahlenebene folgt:

Komplexe Zahlen kann man vergleichen, aber nicht (in der Größe) anordnen

Vergleich: $z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(z_2)$

$\iff Im(z_1) = Im(z_2)$

aber für $z_1 \neq z_2$ können wir keine "größer/kleiner"-Relation aufstellen.

Wohl aber für die Beträge: $|z_1| \gtrless |z_2|$

Quadratische Gleichungen:

in $\mathbb{C}$ haben alle Gleichungen der Form

$$z^2 + az + b = 0$$

mit reellen a, b eine Lösung:

$$z^2 + az + b = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b \qquad \Big| \sqrt{}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2}$$

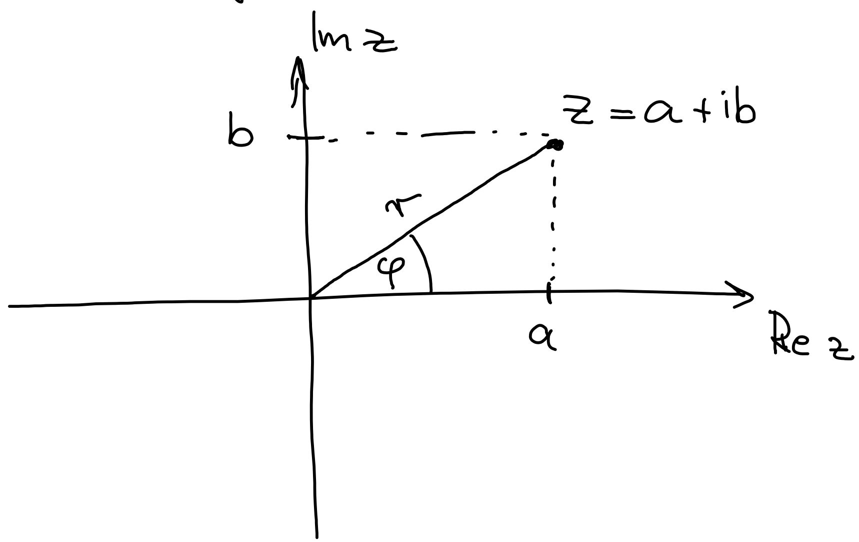
d.h.

$$\frac{a^2}{4} - b \geq 0 \Rightarrow \text{reelle Lösungen} \begin{cases} > 0 & 2 \\ = 0 & 1 \end{cases} \text{Lösung}$$

$$\frac{a^2}{4} - b < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{(-)\left(b - \frac{a^2}{4}\right)} = i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

2 komplexe Lösungen $\pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$

Polardarstellung der komplexen Zahlen



a, b reelle Zahlen
$i^2 = -1$

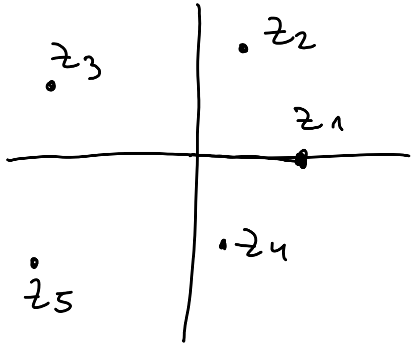
$a = \operatorname{Re} z$
$b = \operatorname{Im} z$

In der komplexen Zahlenebene kann man Zahlen entweder durch $a = \operatorname{Re} z$ und $b = \operatorname{Im} z$ charakterisieren, oder durch den sogenannten Betrag $r = |z|$, und den Polarwinkel.

$|z| = r$ = Abstand der Zahl vom Nullpunkt (Ursprung der komplexen Zahlenebene)

φ = Polarwinkel (gerichtet, kann auch < 0 werden)
"Argument von z" $\quad \arg(z) = \varphi$

Die häufigste Konvention: $-\pi < \varphi < \pi$



$\arg(z_1) = 0$

$\arg(z_2) \in (0, \pi/2)$

$\arg(z_3) \in (\pi/2, \pi)$

$\arg(z_4) \in (-\pi/2, 0)$

$\arg(z_5) \in (-\pi, \frac{-\pi}{2})$

Problem: $\arg(-1) = \pi$ oder $-\pi$?

Viele Leute definieren entweder $\arg(-1) = \pi$, aber noch besser ist es, festzulegen, dass $\arg(-1)$ nicht definiert ist.

$$z = a + ib$$
$$= r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$a = \operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = \operatorname{Im} z = |z| \sin\varphi = r \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{wenn: } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{wenn: } a < 0, b > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{wenn: } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

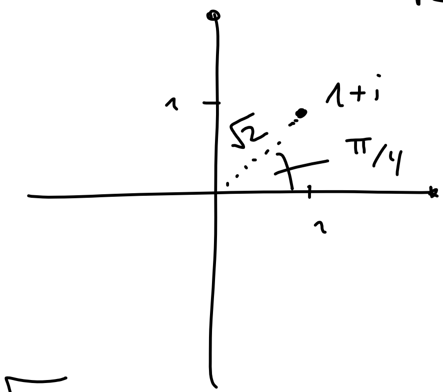
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$z = 0 \implies r = 0 \implies \varphi$ unbestimmt

(der Nullpunkt hat keine φ-Koordinate)

<u>Beispiel</u> $\quad z = 1 + i \qquad a = b = 1$

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (1+i)\cdot(1-i) = 1 + i - i + 1 = 2 \qquad \implies r = |z| = \sqrt{2}$$



$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\implies z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$r = \sqrt{2}$

$\varphi = \pi/4$

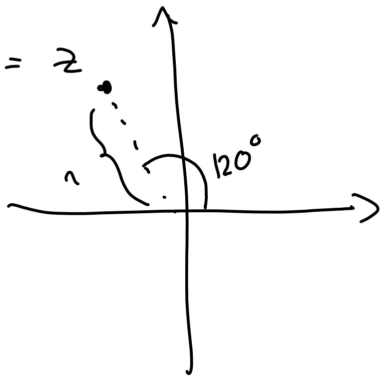
Beispiel 2:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad a = -1/2 \qquad b = \sqrt{3}/2$$

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + \pi = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z$



Funktionen von komplexen Zahlen

1.) Exponentialfunktion mit komplexem Argument:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!}$$

$$= e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

$$= e^a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ib)^n = e^a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n \cdot b^n$$

$i^n = \pm 1$ für gerade n

$= \pm i$ für ungerade n

$$= e^a \Big(\underset{m=0}{1} + \underset{k=0}{i\frac{b}{1!}} - \underset{m=1}{\frac{b^2}{2!}} - \underset{k=1}{i\frac{b^3}{3!}} + \underset{m=2}{\frac{b^4}{4!}} + \underset{k=2}{i\frac{b^5}{5!}} - \underset{m=3}{\frac{b^6}{6!}} - \underset{k=3}{i\frac{b^7}{7!}} \dots \Big)$$

Trenne Real- & Imaginärteil:

$$= e^a \Big(\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(-1)^m b^{2m}}_{\cos(b)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k b^{2k+1}}_{\sin(b)} \Big)$$

$$= e^a (\cos b + i \sin b)$$

Vergleiche mit der Polardarstellung:

$$r = e^a$$

$$\varphi = b$$

$$|e^{a+ib}| = e^a$$

$$\arg(e^{ib}) = b \qquad (\text{wenn } b \in (-\pi, \pi])$$

Speziell: $a = 0$, $b = \varphi \in (-\pi, \pi)$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$r = |z|$

$\varphi = \arg z$

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

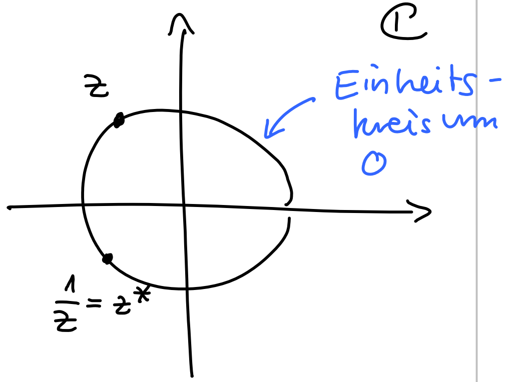
Nützliche Formeln:

- $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

- $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\cdot\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^* = (e^{i\varphi})^*$

  $= \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$

  "Die komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis sind genau diejenigen komplexen Zahlen, deren Kehrwert gleich ihrem komplex konjugierten ist"



- $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \underline{1}$

- $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cdot\cos\varphi$

  $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

$$\Rightarrow \int d\varphi \; \cos\varphi = \int d\varphi \left(\frac{1}{2} e^{i\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i} e^{i\varphi} + \frac{1}{-i} e^{-i\varphi} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right) = \sin\varphi$$

Alternative Schreibweise:
$\int \cos\varphi \, d\varphi$

Noch besser:

z.B.

$$\int d\varphi \; \sin^2\varphi = \int d\varphi \left(\frac{1}{2i} \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right) \right)^2 = \left(-\frac{1}{4} \right) \int d\varphi \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right) \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \int d\varphi \left(e^{2i\varphi} - 1 - 1 + e^{-2i\varphi} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \int d\varphi \left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} - 2 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2i} e^{2i\varphi} + \frac{1}{-2i} e^{-2i\varphi} - 2\varphi \right)$$

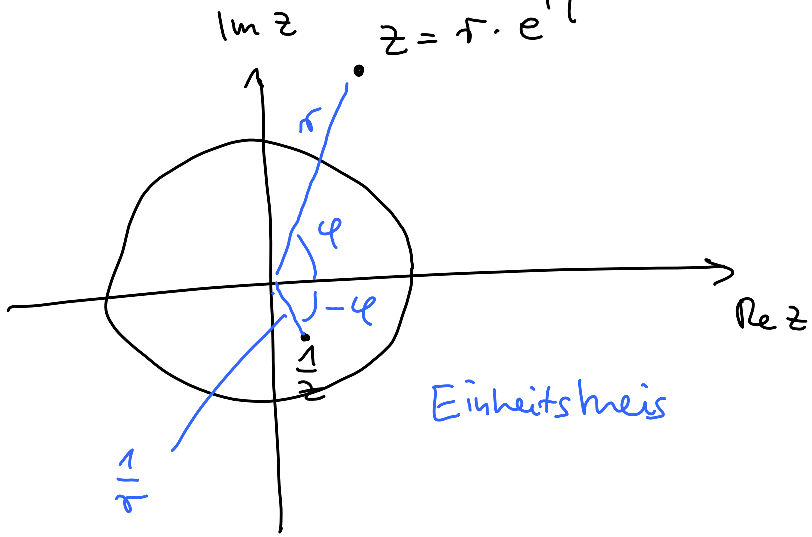
$$= \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi)$$

Multiplikation zweier komplexer Zahlen

- $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ $\Rightarrow$ $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

- Kehrwert: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$$



- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ wenn $r_2 \neq 0$ $(\Leftrightarrow z_2 \neq 0)$

Potenzen von z

$$w = z^n = (a+ib)^n$$

$$= (r e^{i\varphi})^n = r^n \cdot (e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$= r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$$

$$= r^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

$$\Rightarrow (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

"de Moivres Formel"

Beispiel: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi$

$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + i(2\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$= \cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)$$

$$\Rightarrow \cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

"Halbwinkelsätze"

Weitere Funktionen mit komplexen Argumenten:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$
für alle z

$$\cosh z + \sinh z = e^{z}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin(z)$$

$$\cosh(iz) = \cos(z)$$

Wurzeln von komplexen Zahlen

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{-mal}} \qquad \text{kein Problem}$$

$p \in \mathbb{Z}$

$q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$z^{p/q} = \left(z^p\right)^{1/q} \leftarrow \text{Was ist das?}$$

$$= \left(r e^{i\varphi}\right)^{p/q} = r^{p/q} \cdot \left(e^{i\varphi}\right)^{p/q} = r^{p/q} \underbrace{\left(e^{ip\varphi}\right)^{1/q}}_{=?}$$

Um rationale Potenzen von komplexen Zahlen zu definieren, muss man q-te Wurzeln aus komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis definieren.

Also: was ist $\sqrt[q]{e^{i\varphi p}}$?

die q-te Wurzel muss:

$$\left(\sqrt[q]{e^{i\varphi p}}\right)^q = e^{i\varphi p}$$

z. B.: $e^{i\varphi \frac{p}{q}}$ Problem: das ist nicht die einzige Lösung!

$$\left(e^{i\varphi p/q}\right)^q = e^{i\varphi p \frac{q}{q}} = e^{i\varphi p} \checkmark$$

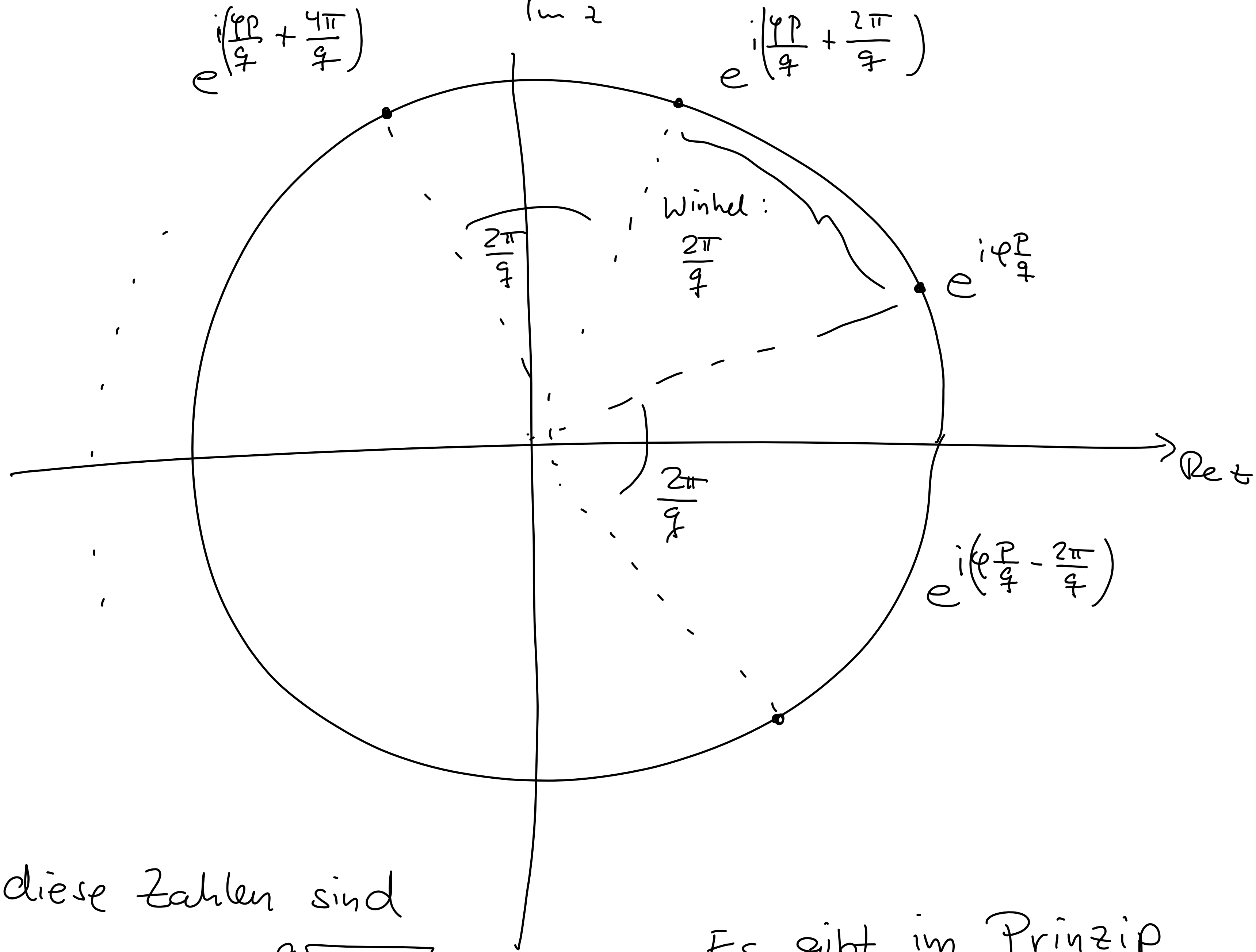
$$\left(e^{i\left(\varphi \frac{p}{q} + \frac{2\pi}{q}\right)}\right)^q = e^{i(\varphi p + 2\pi)} = e^{i\varphi p} \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{\substack{= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ = 1}} = e^{i\varphi p}$$

$$\left(e^{i\left(\varphi \frac{p}{q} + \frac{4\pi}{q}\right)}\right)^q = e^{i\left(\varphi \frac{p}{q} q + 4\pi\right)} = e^{i\varphi p} \cdot e^{4\pi i} = e^{i\varphi p}$$

$$\left(e^{i\left(\varphi \frac{p}{q} - \frac{2\pi}{q}\right)}\right)^q = e^{i(\varphi p - 2\pi)} = e^{i\varphi p} \underbrace{e^{-2\pi i}}_{\substack{= \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) \\ = 1}} = e^{i\varphi p}$$

Es gibt viele Lösungen!

Es gibt insgesamt q verschiedene Wurzeln, die allesamt auf dem Einheitskreis liegen



Alle diese Zahlen sind Lösungen zu $\sqrt[q]{e^{i\varphi p}}$

$\Longrightarrow$ Es gibt im Prinzip q verschiedene Möglichkeiten für $z^{p/q}$.

Beispiel: $\sqrt[3]{i}$

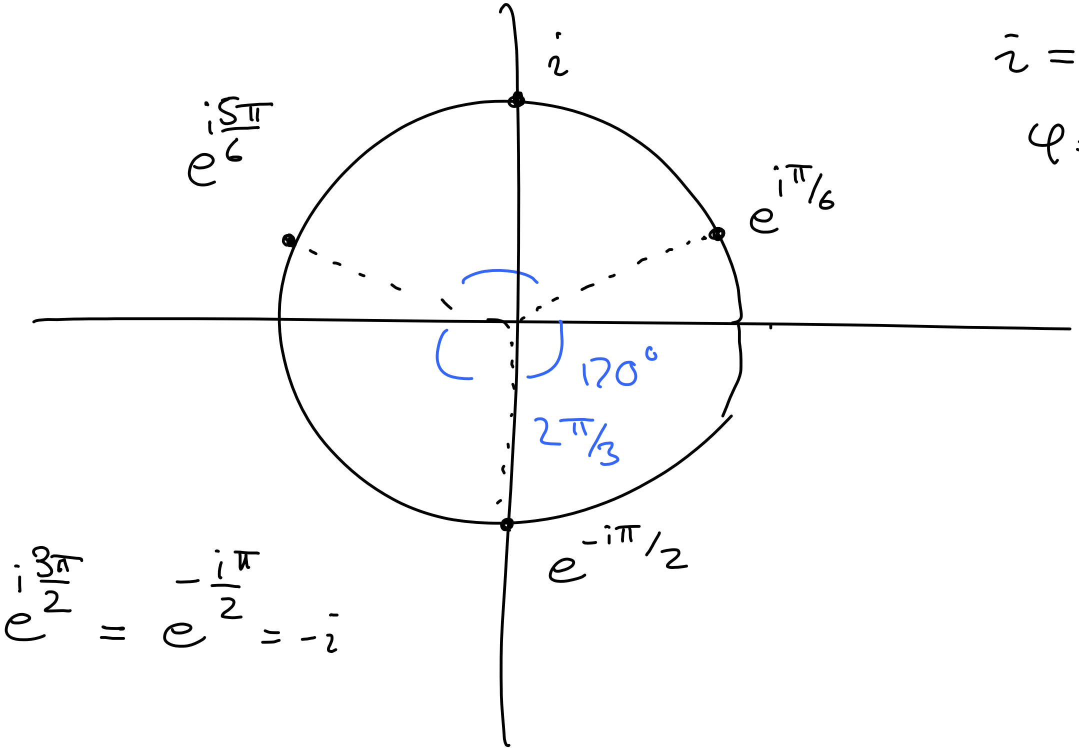
$i = e^{i\pi/2}$

$\varphi = \pi/2, \quad \rho = 1$

$= \sqrt[3]{e^{i\pi/2}}$

$e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}},$

$e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$



Das nächste Mal: komplexer Logarithmus !!

$\ln(e^{i\varphi}) = i\varphi$

$\ln(-1) = ?\; i\pi \;?\; -i\pi$

$(z^w)^u \neq z^{w\cdot u}$ für beliebige komplexe Zahlen!

$z^w = e^{w\cdot \ln z}$ Probleme!

$1 = 1^i = (e^{2\pi i})^i = e^{2\pi i\cdot i} = e^{-2\pi}$ ↯ $\simeq 0.00187\ldots$

Euler'sche Formel

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$ Euler

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$$\sinh\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)$$

$$\cosh\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)$$

---

4) Logarithmen

ganz naiv $\quad z = r e^{i\varphi} \quad \Big| \ln$

$$\ln z = \ln(r e^{i\varphi}) = \ln r + \ln(e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

etwas genauer: φ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt

Vereinbarung: Wähle $-\pi < \varphi \leq \pi$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)}$$

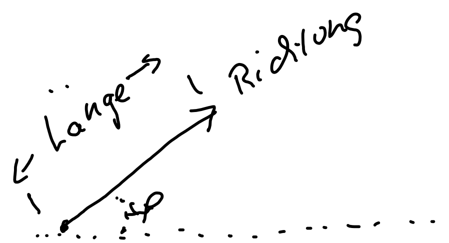
$\Rightarrow$ Funktionen mit komplexen Argumenten haben spannende Eigenschaften

$\Rightarrow$ Funktionentheorie

Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen, die durch ihren Betrag (Länge) und ihre Richtung gekennzeichnet sind

$\Rightarrow$ geometrische Größe



Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

Beispiele für Vektoren:

Kraft

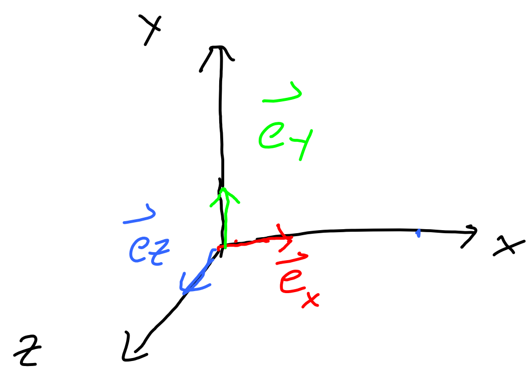
Windrichtung + Stärke

Strömungsgeschwindigkeit + -richtung

Richtungsangaben benötigen immer eine Bezugsrichtung

Beispiel: rechts, geradeaus, parallel zum Fluß

Koordinatensystem (kartesische):



Koordinatenachsen liegen die Bezugsrichtungen fest!

Einheitsvektoren legen die Längenmaßstäbe entlang der Koordinatenachsen fest

$$|\vec{e}_x| = 1 = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z|$$

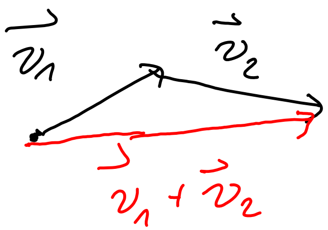
- Koordinatenachsen stehen senkrecht aufeinander

$$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z$$

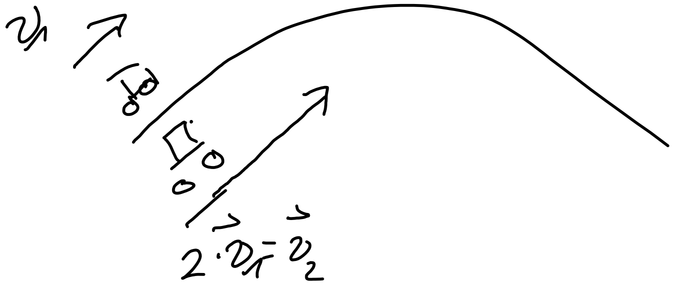
$\uparrow$: "steht senkrecht auf"

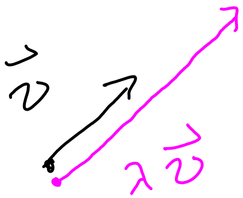
- Koordinatensystem ist rechtshändig (rechte-Hand-Regel)

Vektoraddition:



Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl:





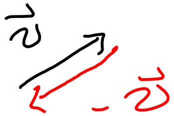
$\lambda > 0$: Richtung des Vektors bleibt gleich

$\lambda < 0$: Richtung des Vektors kehrt sich um

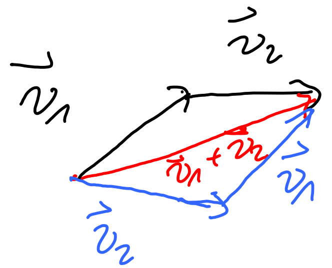
Betrag: $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| \, |\vec{v}|$

<u>Nullvektor</u>: hat die Länge Null und seine Richtung ist unbestimmt

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

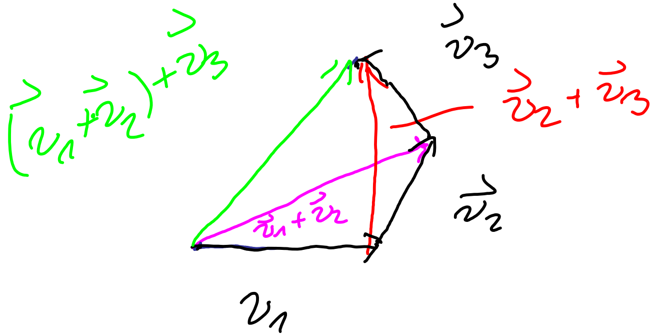


Vektoraddition ist kommutativ:



$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

Vektoraddition ist assoziativ:



$$(v_1 + v_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

Mit Hilfe der Vektoraddition kann jedem Vektor in einem kartesischen Koordinatensystem ein-eindeutig ein 3-Tupel von reellen Zahlen zugeordnet werden:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Die Zahlen v_x, v_y und v_z bezeichnen die Komponenten von v bzgl. der Richtungsvektoren.

Die Richtungsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ bilden eine orthogonale Basis.

Sie haben die Komponentendarstellung

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Wahl der Richtungsvektoren ist willkürlich.

Basis: Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden eine Basis eines dreidimensionalen Vektorraumes, falls sich jeder Vektor des Vektorraumes als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt

D.h. konkret:

Für jeden Vektor $\vec{v}$ gibt es Zahlen v_a, v_b und v_c, so daß gilt:

$$\vec{v} = v_a \vec{a} + v_b \vec{b} + v_c \vec{c} .$$

Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paarweise senkrecht aufeinander, $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c} \perp \vec{a}$,

so sprechen wir von einer Orthogonalbasis.

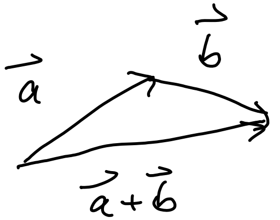
Wenn darüber hinaus gilt: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$,

so handelt es sich um eine Orthonormalbasis.

Vektoraddition in Komponentendarstellung:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

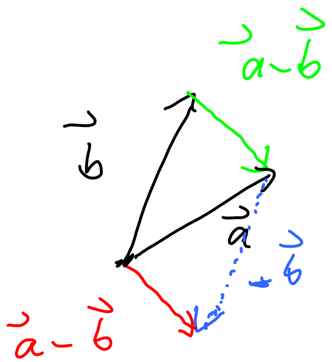


$$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$
$$+ b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$
$$= (a_x+b_x)\vec{e}_x + (a_y+b_y)\vec{e}_y + (a_z+b_z)\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

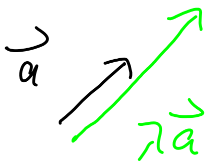
$$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren:



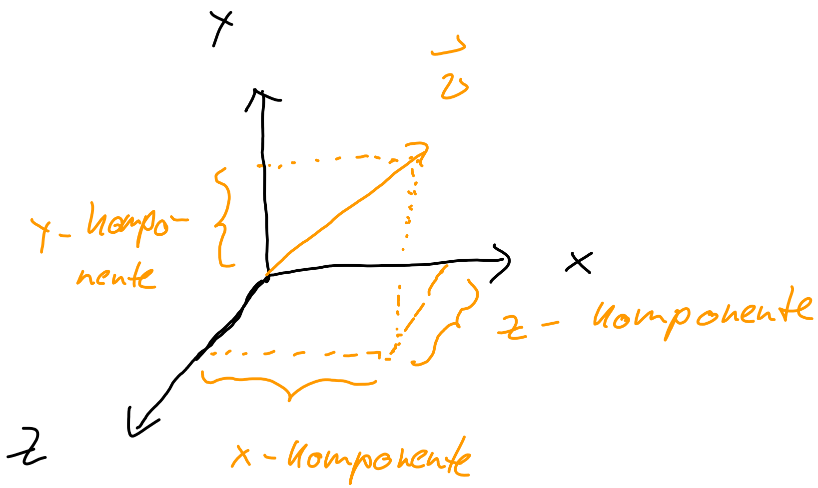
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl



$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors = Länge des Vektors



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Hilfreiche Literatur für Phys 1+2 in Bezug auf Mathe:

M. Otto, Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr

G. Berendt, E. Weimar, Mathematik für Physiker I+II

I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol, H. Muehlig, Taschenbuch der Mathematik

Koordinatensysteme

Orthonormalbasis

Normalerweise: KO-System bilden "Dreibein" $\hat{=}$ Achsen paarweise senkrecht

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \phantom{\text{für }} i \neq j \end{cases}$$

Falls $n = 3$ (3 Dimensionen): Achsen $\hat{=}$ Rechtssystem

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \underset{\text{"rechts"}}{\underset{\uparrow}{+}}\,1$$

Spatprodukt $\hat{=}$ "Zahl" und ist zyklisch, d.h.

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) \overset{!}{=} +1 \quad \text{für Rechts-System}$$

Bsp.: Teste, ob die Vektoren $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

eine Orthonormalbasis bilden.

$\vec{a}\cdot\vec{a} \overset{!}{=} 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\left(\underbrace{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}_{3}\right) = 1 \qquad \checkmark$

$\vec{a}\cdot\vec{b} \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}_{=0}\right) = 0 \quad \checkmark$

$\vec{a}\cdot\vec{c} \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\underbrace{0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}_{=0}\right) = 0 \quad \checkmark$

$\vec{b}\cdot\vec{b} \overset{!}{=} 1 \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\left(\underbrace{1\cdot 1+(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2})+(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2})}_{\underbrace{1+\frac{1}{4}+1/4}_{3/2}}\right) = 1 \quad \checkmark$

$\vec{b}\,\vec{c} \overset{!}{=} 0 \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}\cdot\sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1\cdot 0 + (-\tfrac{1}{4}) + 1/4\right) = 0 \quad \checkmark$

$$\vec{c}\cdot\vec{c} \stackrel{!}{=} 1 \qquad \sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\cdot\sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = 2\,(\underbrace{0+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}}_{1/2}) = 1 \checkmark$$

Test, ob Rechtssystem:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Determinante einer 3×3 Matrix

Determinante einer 2×2 Matrix

$$\boxed{\text{Determinante } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} =: \alpha\delta - \beta\gamma}$$

anwenden:

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}\,3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}\,3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{\frac{1}{2\cdot 3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\Rightarrow$ ergibt für die Determinante der 3×3 Matrix, bzw. das Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{e}_1\cdot 0 - \vec{e}_2\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)\right) + \vec{e}_3\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)\right)$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +1/3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \\ -1/3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)$$

$$= \cancel{2}\,\sqrt{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{3}(1+2) = 1 \quad \checkmark$$

ist ONB ✓

$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } i,j,k \text{ zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \\ -1 & \text{antizyklisch} \end{cases}$$

Levi-Civita-Symbol

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{e}_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + e_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$(\vec{a} \times \vec{b})_{i=1} = \varepsilon_{1jk}\, a_j b_k$ ← mit j,k nur noch 2,3 erlaubt, sonst 0

$= \underbrace{\varepsilon_{123}}_{+1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} a_3 b_2$

$= a_2 b_3 - a_3 b_2 \implies$ 1. Komponente ✓

$$(\vec{a} \times \vec{b})_{i=2} = \varepsilon_{2jk}\, a_j\, b_k$$

$\Rightarrow j, k$ nur $1, 3$ annehmen, sonst $\varepsilon = 0$

$$= \underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1}\, a_1 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{231}}_{+1}\, a_3 b_1$$

$$= -a_1 b_3 + a_3 b_1$$

2. Komponente ✓

$$(\vec{a} \times \vec{b})_{i=3} = \varepsilon_{3jk}\, a_j\, b_k$$

$\Rightarrow j, k$ können nur $1, 2$ annehmen, sonst $\varepsilon = 0$

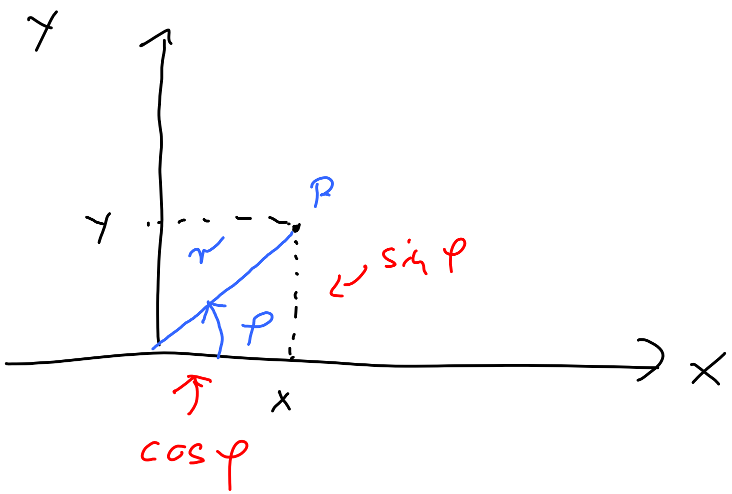
$$= \underbrace{\varepsilon_{312}}_{}\, a_1 b_2 + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1}\, a_2 b_1$$

zyklisch ε_{123}

$$= +1 \cdot a_1 b_2 - a_2 b_1 = +a_1 b_2 - a_2 b_1$$ ✓

zurück im Text:

Polarkoordinaten, 2-Dimensionen: r, φ ebene Bewegung



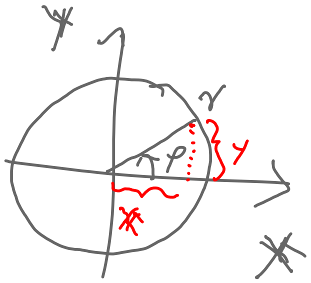
$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Wir erreichen jeden Punkt dieser Ebene xy durch

$r = [0, \infty[$ und $\varphi = [0, 2\pi]$

Nochmal Polarkoordinaten (als Einstieg zu Zylinder- und Kugelkoordinaten)



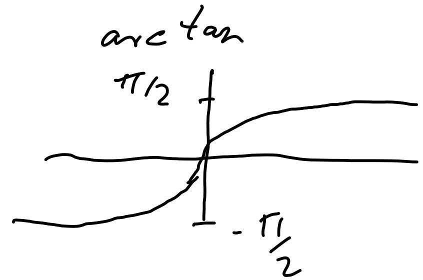
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors $|\vec{r}|$:

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{r^2(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1})} = r$$

Umkehrung von kartesischen auf Polarkoordinaten:

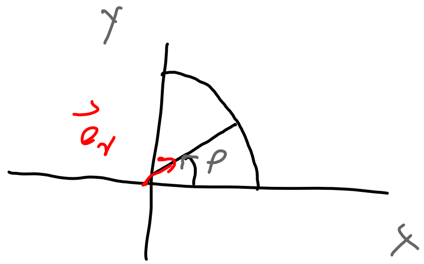
$$\frac{y}{x} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



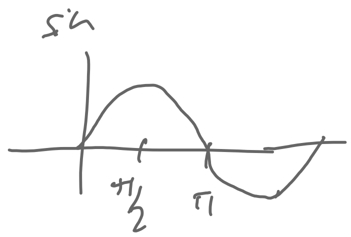
Basisvektoren:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

radial nach außen gerichtet



Gesucht: orthogonaler Vektor zu $\vec{e}_r$ mit Länge 1:

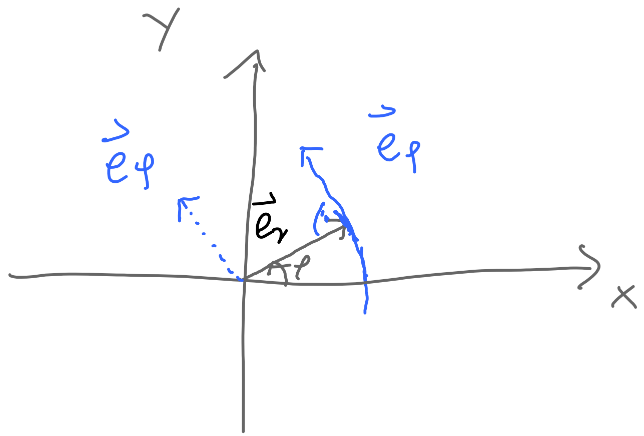


$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_{\varphi,x}\\ e_{\varphi,y}\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 = \left(\cos\varphi \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ -\sin\varphi}}{e_{\varphi,x}} + \sin\varphi \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \cos\varphi}}{e_{\varphi,y}}\right)$$

raten:

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$



↙ im kartesischen System $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

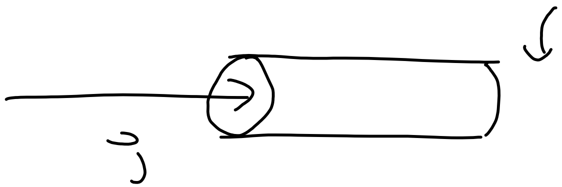
Basisvektoren der Polarkoordinaten im kartesischen System ausgedrückt

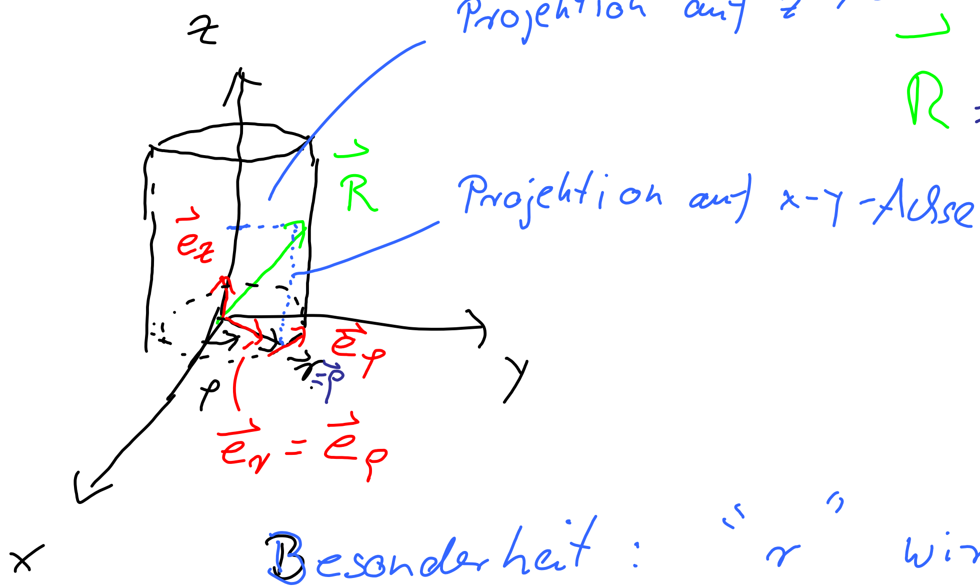
Wie lauten die Basisvektoren der Polarkoordinaten $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ im Polarkoordinaten-System?

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}: \qquad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten (3-dim), orthonormales System

Bsp.: Nützlich, falls Felder von stromdurchflossenen Leiter





$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Besonderheit: "r" wird zu "ρ" unbenannt in x-y Ebene

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ bilden Rechts-System, hier ausgedrückt im kartesischen KO-System.

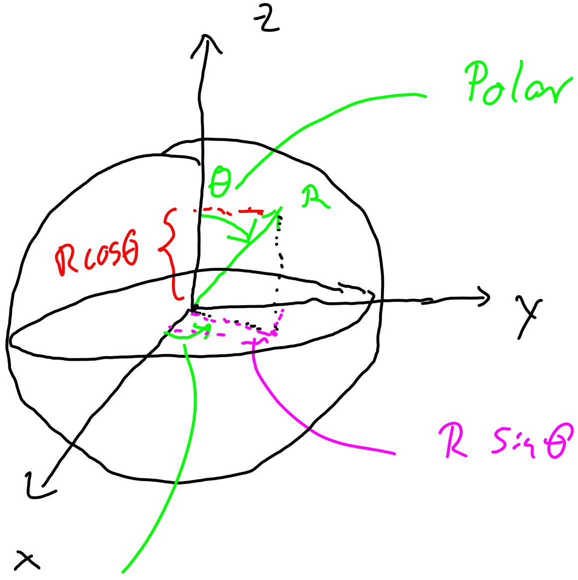
Basisvektoren $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ im Zylinderkoordinaten-System ausgedrückt:

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{im} \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:

Bsp.: Tritt immer bei rotationssymmetrischen Problemen auf,

z.B. Zentralkräfte in 3-dim., z.B. Keplerproblem, Coulombkraft, ...



Polarwinkel $\theta \in [0, \pi]$

Azimutalwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\underbrace{R^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}_{= R^2 \sin^2\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} + R^2 \cos^2\theta}$$

$$= \underbrace{R^2 \sin^2\theta + R^2 \cos^2\theta}_{R^2}$$

✓

Umkehrung von kartesischen in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Basisvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ausgedrückt in $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – Komponenten:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

wie vorher

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orthonormales Rechtssystem, d.h.

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = 1$$

$+$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Vergleich zum Planbeispiel machen

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Basisvektoren der Kugelkoordinaten im Kugelkoordinaten-System $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kurzer Ausblick auf Differentialgleichungen:

radioaktiver Zerfall:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

"Zerfälle pro Zeiteinheit proportional zur Anzahl der Kerne"

$$-\dot{N} = \lambda N$$

$$0 = \lambda N + \dot{N}$$

Differentialgleichung 1. Ordnung
"homogen", da rechte Seite = 0 ist

Wie lösen wir das?

$\Rightarrow$ viele Verfahren, häufig raten

$\Rightarrow$ in unserem Fall: "Variablentrennung" geeignet

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad \Big| \cdot dt$$

$$-dN = \lambda N \, dt \qquad \Big| : \lambda N$$

$$-\frac{1}{\lambda N} dN = dt \qquad \Big| \int$$

$$\int -\frac{1}{\lambda N} dN = \int dt$$

$$-\frac{1}{\lambda} \int \frac{dN}{N} = t + c$$

eine Konstante, da Dgl. $\underline{\underline{1.}}$ Ordnung

$$-\frac{1}{\lambda} \ln N = t + c \qquad \Big| \exp$$

$$N(t) = \tilde{c} \exp(-\lambda t)$$

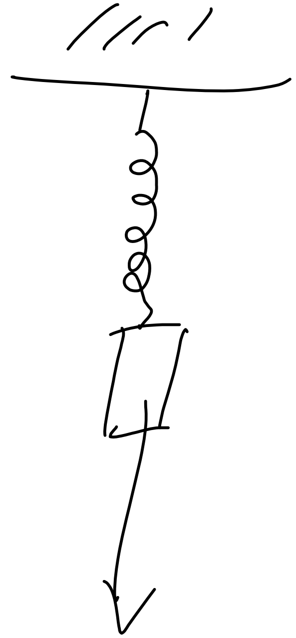
Wie bestimmen wir $\tilde{c}$? $\Rightarrow$ mit Anfangsbedingungen

$N(t=0) = N_0$

einsetzen: $N(t=0) = \tilde{C} \exp(-\lambda \cdot 0) = \tilde{C} \stackrel{!}{=} N_0$

$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$

Schwingung:



Welche Kräfte wirken: Hook'sches Gesetz kx

$\uparrow$
Federkonstante

$+$ Newton $\quad ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} = kx \qquad$ Dgl. einer harm. Schwingung

$$m\ddot{x} - kx = 0$$ ← Dgl. 2. Ordnung, homogen

gesucht: $x(t)$, $\dot{x}(t)$

Welches Verfahren? → Variablentrennung?

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx$$ → kein dt da?

Was dann? Raten: $\cos \omega t$

Ansatz: $x(t) = \cos \omega t$

$\dot{x}(t) = -\omega \sin \omega t$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cos \omega t$

einsetzen (try + error):

$$-m\omega^2 \cancel{\cos} \omega t = k \cancel{\cos} \omega t \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = -\frac{k}{m}$$

ist Lösung